Axiomaticko-testový přístup Irvinga Fishera a následovníků

Axiomatická/testová teorie indexních čísel[1], jejímž iniciátorem byl Irving Fisher ve 20.letech minulého století, sestává z několika logicky odůvodněných předpokladů, jejichž splnění - lze vyžadovat od každého dostatečně "rozumného" indexního čísla. Výčet ani přesné formulace těchto axiomů/testů nejsou však všemi problémem se zabývajícími autory přijímány jednotně. Zde se přidržíme původních formulací, kategorizace a uspořádání testů zastávaných Irvingem Fisherem a jeho současníky. Ve druhé polovině 20.století byly totiž formulovány další testy, které původní Fisherovu soustavu svým způsobem „zúplňují". Z nich zde uvádíme jen část, konkrétně ty, které jsou četněji komentovány v literatuře a které mohou být vcelku elegantně interpretovány. S ohledem na některá problematiku téměř vyčerpávající pojednání z nedávné doby lze do budoucna již sotva očekávat, že se na této „sestavě" něco ještě podstatněji změní. Zde uvedené axiomy/testy budeme značit **(F1) - (F12)**, přičemž jako prvních 8 axiomů uvádíme ty, které pocházejí z Fisherova, Walshova, Bowleyho či Frischova období.

Dobře zkonstruované indexní číslo by mělo vyhovovat co největšímu počtu z těchto požadavků. Jak však dále zmíníme, optimální (tj. všem níže uvedeným axiomům vyhovující) konstrukci indexního čísla vytvořit nelze.

(F1w**) test** (*slabé*) **identity** [weak identity test]**:**

$$\textit{Jestliže platí } \boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{p}(1) \textit{ a současně } \boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{q}(1), \textit{ pak } \widetilde{P}_{01}=1, \quad \textit{což lze psát } P_{00}=1.$$

(F1s**) test** (*silné*) **identity** [strong identity test]**:**

$$\textit{Jestliže platí } \boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{p}(1) \textit{ pak } \widetilde{P}_{01}=1$$

konstatuje, že "neutrální" hodnota indexního čísla (vzatého jako podílový ukazatel) je rovna jedné. Shodu cen (příp. i kvantit) v obou obdobích lze pokládat též za "nedostatek času" ke změně komplexu. Uveďme, že axiom **(F1w)** je splněn všemi výše uvedenými indexními čísly.

(F2w**) test záměny faktorů** [factor reversal test]**:**

$$P_{01}\cdot\widetilde{P}_{01}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(0)} \quad \text{resp.}$$

(F2s**) „součinový" test[2]** [product test]**:**

$$P_{01}\cdot Q_{01}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(0)}$$

požadují, aby hodnota součinu P_{01} a indexního čísla $\widetilde{P}_{01}$ téže konstrukce získaného záměnou cen za kvantity a obráceně (interpretovatelného obvykle jako kvantový index) dávala podíl peněžních agregátů, tj. vynaložených výdajů na komodity v běžném a základním období"[3].

[1] Není až tak podstatné, zda používáme pojem test či axiom. Jde tak či onak o podmínku, kterou určitý konstrukt
tj. indexní číslo testujeme z toho hlediska, zda jej splňuje nebo ne, či se na ni díváme jako na postulát vyvozený z elementární ekonomicko-matematické podstaty věci.

[2] Možná ne zcela zřetelně postřehnutelný rozdíl mezi tímto a předchozím testem (F2w) spočívá v tom, že ne vždy je kvantové indexní číslo vytvořeno mechanickou záměnou cen a kvantit z cenového. Jako příklad mohou sloužit např. mikroekonomická indexní čísla, která jsou předmětem výkladu 5.části.

[3] Výraz na pravé straně (F2) by mohl být považován také za určitý typ indexního čísla, avšak při bližším

(F3) test záměny období (míst) [time reversal test]: $P_{01} \cdot P_{10} = 1$

znamená požadavek, aby při "inverzním" pohledu na změnu komplexu v čase (návrat do výchozího období) bylo "časově převrácené" indexní číslo reciprokou hodnotou původního. Tentýž požadavek lze analogicky vyslovit při prostorovém srovnání, kde ovšem zpravidla máme libovůli při přiřazení "0" a "1" srovnávaným územním celkům.

(F4s) test okružnosti (též **cirkularity** či **tranzitivity)** [circularity test]: $P_{02} = P_{01}.P_{12}$

požaduje, aby se přechod ze základního období "0" do běžného období "2" (přes meziobdobí "1") odehrál bez tranzitivního zkreslení (a to při libovolném meziobdobí). Při územním srovnání půjde o analogický požadavek, ať volíme "přestupný" územní celek jakkoliv.

Slabší vyjádření předchozího testu představuje

(F4w) bazický test [base test]:

výraz $P_{01} = \dfrac{P_{02}}{P_{12}}$ ***je nezávislý na volbě období „2".***

Ten (pouze) požaduje, aby podíl P_{02} / P_{12} byl nezávislý na hodnotách $\mathbf{p}(2), \mathbf{q}(2)$ neboli, aby srovnání vývoje spotřeb a cen základního období vůči spotřebám a cenám běžného období prováděné přes třetí časový bod nebylo závislé na hodnotách výchozího období.

(F5) test určenosti [determinateness test]:

P_{01} je vždy určité, konečné a ne identicky nulové reálné číslo.

představuje požadavek, aby indexní číslo bylo vždy definováno a mělo konečnou, ne identicky nulovou hodnotu v jakékoliv situaci (např. při nepřítomnosti některé z komodit v základním nebo v běžném období). Zesílenou verzí tohoto testu je níže uvedený axiom **(F12)**.

Další dvojici představují

(F6w) test (*slabé*) **souměřitelnosti** [commensurability test] konstatující toto

Jestliže provedeme *stejnou* proporční změnu měrových jednotek kvantit, tj. $q_1^*(1) = d \cdot q_i(1)$, $q_i^*(0) = d \cdot q_i(0)$ pro nějaké reálné $d > 0$ a adekvátní změnu cen $p_i^*(1) = d^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d^{-1}.p_i(0)$, potom musí vždy platit $\tilde{\boldsymbol{P}}_{01} = \boldsymbol{P}_{01}$, neboli

P_{01} nezávisí na měrové jednotce komodit ,

popř.

(F6s) test (*silné*) **souměřitelnosti** konstatující totéž , ovšem za volnější podmínky

pokud ceny i kvantity změníme vzájemně konformně (*každou však v obecně jiném poměru*)

Jestliže platí $q_1^*(1) = d_i.q_i(1)$, $q_i^*(0) = d_i \cdot q_i(0)$ pro nějaký vektor d *s kladnými složkami* a podobně $p_i^*(1) = d_i^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d_i^{-1} \cdot p_i(0)$, potom musí vždy platit $\tilde{\boldsymbol{P}}_{01} = \boldsymbol{P}_{01}$.

Slabá i silná verze testu vyjadřují očekávání, že indexní číslo nesmí být ovlivněno změnou velikosti měrových jednotek komodit analyzovaného souboru: např. v situaci, kdy se mění měrové jednotky, ve kterých uvádíme množství komodit, musí být zachována hodnota indexního čísla vyčíslená před touto změnou a po ní. Jako příklad vezměme situaci, kdy

zkoumání zjistíme, že jeho konstrukce není vhodná - viz dále komentář k (F11).

přecházíme z kg na tuny: jednotková cena komodity se 1000-násobně zvětší, avšak současně se také 1000-násobně zmenší původní množství komodity vyjádřené v nové jednotce (kg = 0,001t). Konstrukce indexního čísla musí být vůči těmto změnám invariantní.

(F7w) test (slabé) **úměrnosti** [weak proportionality test]**:**

$$\textit{Jestliže platí } p_i(1) = c \cdot p_i(0) \textit{ a též } q_i(1) = q_i(0) \textit{ pro všechna } i$$

$$\textit{a pro nějakou konstantu } c > 0, \textit{ pak musí platit } \widetilde{P}_{01} = c.$$

Upuštěním od druhé podmínky získáme

(F7s) test (silné) **úměrnosti** [strong proportionality test]**:**

$$\textit{Jestliže platí } p_i(1) = c \cdot p_i(0) \textit{ pro všechna } i \text{ (nezávisle na hodnotách kvantit)}$$

$$\textit{a pro nějakou kladnou konstantu } c, \textit{ pak musí platit } \widetilde{P}_{01} = c.$$

Axiom **(F7s)** vyžaduje, aby v "ideálním" případě, kdy by ceny všech komodit vzrostly ve stejném poměru (např. c-násobně), bylo cenové indexní číslo rovno příslušné konstantě úměrnosti c. Jiná hodnota by zřejmě signalizovala nekorektnost konstruktu. K platnosti slabé verze tohoto testu postačuje, platí-li tento závěr tehdy, nedojde-li mezi základním a běžným obdobím k žádným změnám v kvantitách..

Konečně máme

(F8) test symetrie [symmetry test] vyslovuje požadavek, že

Indexní číslo musí být invariantní vůči jakékoliv permutaci** (záměně) **pořadí** cen **komodit (při analogické záměně pořadí příslušných kvantit).[4]

Je zřejmé, že závislost hodnoty indexního čísla na pořadí komodit nelze připustit, neboť bychom nemohli přistupovat ke všem statkům v příslušném konstruktu rovnocenně.

Axiom **(F8)** splňují zřejmě všechny v části [2.1] uvedené návrhy "inteligentních" indexních čísel. Protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikativní operace (jinými slovy jak při aritmetickém, tak geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciační kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

Samotný počet splněných testů však nemůže být jediným vodítkem při komparaci vhodnosti návrhů jednotlivých indexních čísel. Důležitou roli hraje rovněž otázka, do jaké míry umožňuje zvolená váhová struktura vyhovět odlišnostem v poměřování vlivu komodit u jednotlivých agregátních výrazů. V tomto smyslu jsou obecně průměry "váženého typu" nadřazeny indexním číslům založeným na prostém průměrování (Carli, Jevons), neboť přinejmenším v určité míře dovedou stupeň významové odlišnosti komodit postihnout. Rovněž záměr objektivizovat či neutralizovat vliv volby období, která se objevuje v konstrukci Fisherova, Edgeworthova, Walshova a Törnquistova indexu (nehledě na určitou nevýhodu související s potřebou opatřit větší množství empirických dat) staví tato indexní čísla nad "nesymetricky formulovanými" indexy Paascheho či Laspeyresova typu.

Uvedených 8 testů základní soustavy (ať už vzatých v silných či slabých verzích) nicméně není

---

[4] Z uvedených 8 testů je I.Fisherovi [1911], [1922] přímo přisuzováno autorství axiomů (F1), (F3), (F6), (F8) a spolu s Walshem [1901] test (F7), zatímco axiom okružnosti (F4) formuloval již Westergaard [1890]. Důraz na význam axiomu záměny faktorů (F2) kladl zejména R. Frisch [1930]. Test (F6) údajně poprvé navrhl již holandský ekonom Pierson [1896] pod názvem *test invariance vůči změnám v jednotkách měření* . Tentýž autor vyslovil poprvé podnět pro test (F3). Laspeyres {1871] se mj. zasloužil o uvedení testu (F1s) představované požadavkem, aby hodnota cenového indexního čísla byla rovna 1, kdykoliv za $p(0)$ a $p(1)$ dosadíme shodné vektory.

vzájemné nezávislých. Kromě toho, že ze silných verzí testů vyplývají slabé verze, lze dále snadno vyvodit platnost např. těchto tvrzení:

(F9) axiom monotónnosti: [monotonicity test]

Jestliže platí $p_i(1) \leq p_i^*(1)$ **pro všechna i** při nezměněných $p(0), q(0), q(1)$, **potom vždy platí**

$$P_{01} \leq P_{01}^*.$$

Axiom říká, že taková změna cen všech komodit mezi základním a běžným obdobím, při které jsou alternativně vzaté hodnoty cen $p_i *(1)$ u všech komodit nejméně rovné původním cenám $p_i(1)$ běžného období, musí vést k indexnímu číslu, které je hodnotou aspoň stejně velké jako původní indexní číslo.

(F10) axiom střední hodnoty [mean value test] **(W.Eichhorn – J.Voeller [1976])**

$$\underset{I=1,\dots,N}{Min} \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \leq P_{01} \leq \underset{I=1,\dots,N}{Max} \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

požaduje, aby se velikost (cenového) indexního čísla nacházela mezi hodnotami nejmenší a největší individuální poměrové cenové změny.

(F11) axiom invariance vůči změnám v měřítkách [**] **(Y.Vartia [1985]).**

Jestliže změníme měnovou jednotku u všech cen v obou obdobích "0" a "1", tzn. položíme-li $\boldsymbol{p}*(0) = d.\boldsymbol{p}(0)$ a $\boldsymbol{p}*(1) = d.\boldsymbol{p}(1)$, pak při libovolných proporčních změnách měrových jednotek kvantit v základním i běžném období, přičemž v každém období může jít o jinou proporční změnu v jednotkách měření kvantit, tzn. $\boldsymbol{q}*(0) = b.\boldsymbol{q}*(0)$ a $\boldsymbol{q}*(1) = c.\boldsymbol{q}*(1)$, musíme dospět k původní hodnotě indexního čísla. Jestliže tedy změněné indexní číslo (s ohvězdičkovanými veličinami) označíme $P_{01}*$, musí platit $P_{01}* = P_{01}$.

Smyslem tohoto testu mj. je, aby "vážení" spotřebami probíhalo vždy srovnatelným způsobem (tedy buď spotřebami vždy ze základního nebo vždy z běžného období). Všimněme si, že tomuto testu nevyhovuje např. konstrukt objevující se na pravé straně axiomu záměny faktorů **(F2)**, pokud bychom uvažovali o jeho použití též jako jistého "indexního čísla".

(F12) axiom konzistence při mizející komoditě [**] **(E.Diewert [1992])**,

vyjádřený následovně

$$\lim_{q_N(0) \to 0,\, q_N(1) \to 0} P_{01}^{(N)} = P_{01}^{(N-1)},$$

kde výrazy $P_{01}^{(N)}, P_{01}^{(N-1)}$ označují totéž indexní číslo, jednou spočtené včetně, podruhé bez určité (pro jednoduchost zápisu řekněme N-té) komodity: pokud se množství této komodity neomezeně zmenšuje, musí být limitním výrazem indexní číslo vytvořené pouze ze zbývajících $N-1$ komodit.

Účelem tohoto axiomu je, podobně jako u **(F5)**, ošetřit situace, kdy není přítomna některá komodita a zabránit, aby při její nepřítomnosti došlo ke zhroucení hodnoty indexního čísla. Lze ho považovat za určité zpřesnění axiomu určenosti; ten sám o sobě nespecifikuje, jak má vypadat výraz při výpadku jedné nebo více komodit. Požadavku vyžadovanému testem **(F12)** zpravidla nevyhovují indexní čísla založená na geometrickém průměrování.

Naproti tomu testu okružnosti **(F4)** vyhovuje jen relativně malý počet indexních čísel. Stojí za zmínku, že v r.1979 dokázali Funke, Hacker a Voeller, že indexní číslo, které má tento axiom splňovat a současně vyhovuje určitým podmínkám regularity zaručujícím, že i z jiných hledisek půjde o „rozumné“ indexní číslo, musí mít tvar vyjádřitelný obecným (váženým) geometrickým průměrem (2.2), u kterého budou váhy – konstanty α_i splňovat podmínky

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \quad \text{a} \quad \alpha_i > 0 \qquad \text{pro} \quad i = 1,2,\ldots,N \,.$$

Z uvedených tedy tento axiom splňují pouze Jevonsův a Törnquistův index.

Pokud jde o axiom **(F4)**, ukázalo se, že jeho přesnou platnost lze oželet, pokud zkoumané indexní číslo vyhovuje tomuto testu aspoň s určitou přibližností. Již Irving Fisher v tomto směru shledal, že v praktických situacích, kdy pracujeme s reálnými ekonomickými daty, jsou odchylky u $P_{02}{}^{F}$ od součinu $P_{01}{}^{F}.P_{12}{}^{F}$ obvykle velmi malé. Podobná zkušenost byla získána i u dalších indexních čísel, které zacházejí symetricky v vahami, jako je Walshovo indexní číslo $P_{01}{}^{W}$, případně i jiná.

Stanovit, které z uvedených 12 testů jsou více "fundamentální" než jiné, není dost dobře možné a názory jednotlivých autorů se v hodnocení dosti liší. Přece jen však můžeme vyslovit názor, že axiomy záměny faktorů **(F2)** okružnosti **(F4)** a snad i **(F11)** bychom mohli považovat za ty, jejichž nesplnění lze bez větší újmy tolerovat. Pokud jde o „samozřejmý“ požadavek vyjádřený testem **(F8)**, lze říci, že jeho splnění je nutné ; protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikativní operace (jinými slovy při aritmetickém i při geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciační kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

Samotný počet splněných testů však nemůže být jediným vodítkem při komparaci vhodnosti návrhů různých indexních čísel. Důležitou roli hraje rovněž otázka, do jaké míry umožňuje zvolená váhová struktura vyhovět odlišnostem v poměřování vlivu komodit u jednotlivých agregátních výrazů. V tomto smyslu jsou obecně průměry váženého typu nadřazeny indexním číslům založeným na prostém průměrování (Carli, Jevons), neboť přinejmenším v určité míře dovedou stupeň významové odlišnosti komodit postihnout. Rovněž snaha pro objektivizaci či neutralizaci vlivu volby období, která se objevuje v konstrukci Fisherova, Edgeworthova, Walshova a Törnquistova indexu (nehledě na určitou nevýhodu související s potřebou opatřit větší množství empirických dat) staví tato indexní čísla nad "jednostranně formulované" indexy Paascheho či Laspeyresova typu.

Patrně nejpodrobnější rozvedení axiomaticko-testového přístupu lze nalézt v nedávné Diewertově práci [8], kde autor dospívá k systému celkem 20 axiomů, které člení do 5 následujících skupin :

- 4 „samozřejmé“ testy, mezi něž patří *spojitost* a *nezápornost* kteréhokoliv indexního čísla ve všech prvcích vektorů $\boldsymbol{p}(0), \boldsymbol{p}(1), \boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{q}(1)$, dále *test silné identity* požadující, aby $P_{01} = 1$ vždy, když platí $\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}(0)$ [5], a též symetrický požadavek ve vztahu k neměnícím

[5] Za zmínku stojí, že z testu silné identity plyne (F1) , přičemž tato vlastnost plyne též z (F7), což ukázal již Walsh [1901].

se kvantitám, kde je vyžadováno, aby $P_{01} = \sum p_i(1)q_i \Big/ \sum p_i(0)q_i$ vždy, když platí $\boldsymbol{q}(1) = \boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{q}$.

- 4 testy „homogenity", mezi které náleží mj. *silnější verze testu úměrnosti* (F7) požadující, aby platilo $P_{01}{*} = \lambda . P_{01}$, jestliže v indexním čísle $P_{01}{*}$ operujeme s $\lambda -$ násobkem cenového vektoru $\boldsymbol{p}(1)$, dále obdobný *test inverzní úměrnosti v cenách základního období* a dva *testy invariance vůči proporčním změnám v kvantitách základního a běžného období* požadující, aby se cenové indexní číslo nezměnilo, jestliže se proporčně změní kvantity v základním resp. v běžném období.
- 5 testů invariance a symetrie ; Je sem řazen *test symetrie při záměně pořadí komodit* (F8), dále *test souměřitelnosti* (F6*)* - zde nazýván *testem invariance vůči změnám měrových jednotek*, dále *test záměny období* (F3) a dvojice testů nazvaných *testy záměny cen*, resp. *kvantit* vyjadřující požadavky na neměnnost cenového indexního čísla při prohození kvantit základního a běžného období a stejně tak *vice versa* ve vztahu ke kvantovému indexnímu číslu.
- 3 testy střední hodnoty ; Kromě (F10) sem patří též analogický test střední hodnoty formulovaný pro Q_{01} a dále striktní požadavek na to, aby indexní číslo vždy leželo mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem, tzn. aby pro cenové platila nerovnost $P_{01}^{\ P} \le P_{01} \le P_{01}^{\ L}$.
- 4 testy monotónnosti, z nichž jedním je právě test (F9). Další 3 požadavky na monotónnost jsou zde vysloveny nejen ve vztahu ke změně cen v $\boldsymbol{p}(1)$, ale též vůči změnám v $\boldsymbol{p}(0)$, $\boldsymbol{q}(1)$, $\boldsymbol{q}(0)$.

V uvedeném Diewertově souhrnu 20 testů nejsou tedy zahrnuty zde formulované testy určenosti (F5), dále test (F12), který je jeho zesílením, ani axiom okružnosti (F4), který autor posuzuje mimo kontext bilaterálních indexů. Samostatně, jako poněkud stranou stojící 21.test je uvažován (F2).