

Obecný problém dekompozice - Divisiův přístup a řešení

Odlíšný způsob k problematice indexních čísel uplatnil v polovině 20.let 20.století francouzský matematik Francois Divisia¹. Formuloval úlohu nalezení agregátního indexu tak, že hledal - pro libovolné časové období t - multiplikatívni rozklad „makroagregátu“ $P(t) \cdot Q(t)$ reprezentujícího součin cenového a kvantového indexního čísla do tvaru

$$(4.1) \quad P(t) \cdot Q(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t) ,$$

tj. tak, aby ve všech okamžicích spojitě uvažovaného času platila aditivní dekompozice agregátu na dílčí součiny příslušné *cenové a kvantové „mikrofunkce“* všech komodit. Funkce $P(t)$ jako indikátor všeobecné cenové úrovně má přitom co nejlépe vystihovat pohyb cenové hladiny, podobně funkce $Q(t)$ jako reprezentant souhrnného fyzického objemu vývoj množstevního indexu.

O „mikrofunkcích“ cen a kvantit $p_i(t)$, resp. $q_i(t)$ Divisia předpokládal, že mají:

- spojitě první derivace (podle času),
- kladné hodnoty na celém uvažovaném intervalu $\langle 0, T \rangle$,
- konečnou variaci na každém podintervalu $\langle t-1, t \rangle$ spadajícího do $\langle 0, T \rangle$.

Takto obecně formulovaná úloha však není bez dalšího jednoznačně řešitelná, což snižuje její uplatnitelnost pro reálné potřeby. Je zřejmé, že spolu s funkcemi $P(t)$ a $Q(t)$ je řešením úlohy také každá dvojice tvaru $c \cdot P(t)$ a $\frac{Q(t)}{c}$ pro nějakou kladnou konstantu c .

4.1 Spojitý přístup

Vzhledem k derivovatelnosti funkcí $P(t)$ a $Q(t)$, můžeme derivaci (4.1) zapsat jako (4.2)

$$Q(t) \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} + P(t) \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t} .$$

Předpokládáme-li kladnost funkcí $P(t)$ a $Q(t)$ na celém intervalu $\langle 0, T \rangle$, můžeme dělit součinem $P(t) \cdot Q(t) > 0$. Dostaneme (4.3)

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} + \frac{1}{Q(t)} \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t} .$$

Dále samostatně uvažujeme aditivní rozklad cenové změny v (4.3) na

$$(4.4A) \quad \frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} ,$$

¹ Divisia, F.: L'indice monétaire et la Theorie de la monnaie-revue d'Economie politique (1925)

resp. kvantové změny v témže výrazu na

$$(4.4B) \quad \frac{1}{Q(t)} \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t} .$$

Aditivním rozkladem změny cenové a kvantové situace a dále úpravami využívajícími aparátu Stieltjesova integrálu (*pro funkce s konečnou variací*) lze dospět k aproximativnímu tvaru

$$(4.5) \quad \frac{1}{P(t^*)} \cdot [P(t) - P(t-1)] = \sum_{i=1}^N g_k(t_k^*) \cdot [p_k(t) - p_k(t-1)]$$

pro nějaké body t^*, t_k^* z intervalu $\langle t-1, t \rangle$ a nějakou váhovou funkci g_k , např. tvaru

$$(4.6A) \quad g_k(t_k^*) = \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} .$$

Pokud za oba tyto body vezmeme levý krajní bod intervalu, tj. $t^* = t_k^* = t-1$ a podobně dosadíme za funkci $g_k(t_k^*) = g_k(t-1)$ výraz

$$(4.6B) \quad g_k(t_k^*) = \frac{q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^N p_i(t-1) \cdot q_i(t-1)} ,$$

obdržíme po úpravě vztah

$$(4.7) \quad \frac{P(t)}{P(t-1)} = \frac{\sum_{i=1}^N p_k(t) \cdot q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^N p_k(t-1) \cdot q_k(t-1)} ,$$

neboli Laspeyresovo cenové indexní číslo vztažené k bodům $t-1, t$ intervalu. Cenové indexní číslo pro celé uvažované období $\langle 0, T \rangle$ pak získáme zřetězením, tedy

$$(4.8) \quad P_{0T}^D = \overline{P_{0T}^L} = P_{01}^L \cdot P_{12}^L \cdot \dots \cdot P_{T-1,T}^L .$$

Nahrazením $t^* = t_k^* = t$ a dosazením $g_k(t_k^*) = g_k(t)$ výrazu

$$(4.9) \quad g_k(t) = \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)}$$

odvodíme tímto postupem *zřetězené Paascheho cenové indexní číslo* P_{01}^P . Podobně lze jinými speciálními volbami získat i jiná zřetězená indexní čísla, např. *Edgeworthovo*.

Kvantová indexní čísla bychom získali obdobně z rozkladu kvantové změny v (4.4B). Dosazením $t^* = t_k^* = t-1$ obdržíme $Q_{t-1,t}^L$ a již popsáním následným zřetězením Q_{0t}^L .

4.2 Diskrétní přístup

Postup lze obdobně použít také na diskrétní případ, kdy v intervalu $\langle 0, T \rangle$ uvažujeme množinu ekvidistantních izolovaných bodů $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Opět uvažujeme rozklad agregátu

$$(4.10) \quad P(t) \cdot Q(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t) \quad t = 0, 1, 2, \dots, T \quad \text{v } T+1 \text{ okamžicích.}$$

Nejprve vyjádříme levou stranu změny agregátu mezi obdobími $t-1$ a t (libovolnými následujícími): $P(t) \cdot Q(t) - P(t-1) \cdot Q(t-1)$ v podílovém vyjádření (4.11)

$$\frac{[P(t) - P(t-1)] \cdot Q(t) + [Q(t) - Q(t-1)] \cdot P(t-1)}{P(t-1) \cdot Q(t)} = \frac{[P(t) - P(t-1)]}{P(t-1)} + \frac{[Q(t) - Q(t-1)]}{Q(t)}$$

Odpovídající souhrnnou změnu N dílčích změn cen a kvantit napravo vyjádříme jako

$$(4.12) \quad \sum_{k=1}^N \frac{[p_k(t) - p_k(t-1)] \cdot q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t-1) \cdot q_i(t)} + \sum_{k=1}^N \frac{[q_k(t) - q_k(t-1)]}{\sum_{i=1}^N p_i(t-1) \cdot q_i(t)}$$

Přijmeme-li, že se cenová a množstevní změna hodnotového komplexu odehrávají nezávisle na sobě, můžeme porovnat "stejnolehlé" cenové a kvantové složky samostatně.

Pro relativní cenovou složku dostaneme rozklad tvaru

$$(4.13) \quad \frac{P(t) - P(t-1)}{P(t-1)} = \frac{\sum_{i=1}^N [p_k(t) - p_k(t-1)] \cdot q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t-1) \cdot q_i(t)} = P_{t-1,t}^P - 1,$$

kde $P_{t-1,t}^P$ představuje Paascheho cenové indexní číslo pro změnové období $t-1, t$.

Obdobně odvodíme pro relativní kvantovou změnovou komponentu vyjádření

$$(4.14) \quad \frac{Q(t) - Q(t-1)}{Q(t)} = \frac{\sum_{i=1}^N [q_k(t) - q_k(t-1)] \cdot p_k(t-1)}{\sum_{i=1}^N p_i(t-1) \cdot q_i(t)} = 1 - (Q_{t-1,t}^L)^{-1},$$

kde $Q_{t-1,t}^L$ zastupuje Laspeyresovo kvantové indexní číslo pro změnové období $t-1, t$.

(Po odstranění -1 na obou stranách dostaneme $\frac{P(t)}{P(t-1)} = P_{t-1,t}^P$ a $\frac{Q(t)}{Q(t-1)} = Q_{t-1,t}^L$).

Jestliže sestavíme řetězové indexy $\frac{P(1)}{P(0)}, \frac{P(2)}{P(1)}, \dots, \frac{P(T-1)}{P(T-2)}, \frac{P(T)}{P(T-1)}$ a tyto vzájemně

vynásobíme, dostaneme vyjádření $\frac{P(T)}{P(0)} = P_{t,1}^P \cdot P_{1,2}^P \cdot \dots \cdot P_{t-2,t-1}^P \cdot P_{t-1,t}^P = P_{0T}^{*P}$, což je zřetěžené

Paascheho cenové indexní číslo P_{0T}^{*P} . Podobně bychom získali pro podíl $\frac{Q(T)}{Q(0)}$ zřetěžené

Laspeyresovo kvantové indexní číslo Q_{0T}^{*L} .

Poznámka Pokud bychom vycházeli z dekompozice hodnotového makroagregátu způsobem

$$(4.17) \quad [P(t) - P(t-1)] \cdot Q(t-1) + [Q(t) - Q(t-1)] \cdot P(t) ,$$

obdrželi bychom analogickou cestou dvojici zřetězených indexních čísel P_{0T}^{*L}, Q_{0T}^{*P} .

Postupem podle Divisiova schématu obdržíme pro spojitý i diskrétní případ *zřetězené indexní číslo splňující axiom záměny faktorů*. Nevyhneme se však nejednoznačnosti určení v důsledku neurčitosti volby multiplikativního rozkladu (*diskrétní případ*), resp. odhadu aproximujícího Stieltjesova integrálu (*spojitý případ*).

Problém spojený s praktickou aplikací Divisiova přístupu je ten, že ceny a kvantita nelze měřit kontinuálně, ale vždy jen v určitých odstupech. Pro praktické užití by musely být Divisiovy indexy se spojitým časem aproximovány diskrétními, přičemž existuje více možností jak takovou aproximaci provést.

E.Diewert [1980] ukázal, že kromě Laspeyresova a Paascheho indexu mohou být získány jako speciální aproximace $P(1)/P(0)$ další indexy, např. Törnquistův index, pokud vezmeme

$$\ln P_{01}^T = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (s_i(0) + s_i(1)) \cdot \ln \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right) , \text{ kde } s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{j=1}^N p_j(t)q_j(t)}$$

Postup, který použil Divisia v případě indexů se spojitým časem, uplatnil již o něco dříve anglický statistik T.L.Bennet² až na to, že neuplatnil v (4.1) dělení výrazem $p(t) \cdot q(t)$.

T.L.Bennet [1920] navíc navrhl následující diskrétní aproximaci k měření diferencí (nikoliv tedy podílů jako Divisia) na agregátních cenových a množstvích úrovních:

$$(4.18) \quad \Delta P \equiv P(1) - P(0) \equiv 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (q_i(0) + q_i(1)) \cdot (p_i(1) - p_i(0)) ,$$

$$(4.19) \quad \Delta Q \equiv Q(1) - Q(0) \equiv 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (p_i(0) + p_i(1)) \cdot (q_i(1) - q_i(0)) .$$

Ukázal přitom, že rozdíl výdajů mezi obdobími $\sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)$ dává přesně výraz rovný $\Delta P + \Delta Q$, kde ΔP a ΔQ jsou definovány pravými stranami (4.18), (4.19).

Poznámka Obecná definice Divisiova spojitého indexu je čistě matematickou konstrukcí a nemusí mít žádnou souvislost s rozklady indexních čísel, dokonce ani nemusí mít žádný vztah k ekonomickému prostředí.

Jean Villé [1951-52] a **C.R.Hulten** [1973] analyzovali Divisiovy indexy v prostředí cen a spotřebovaných množství za předpokladu, že spotřebitel optimalizuje své chování (z hlediska minimalizace nákladů) a že příslušná užitková funkce je lineárně homogenní³.

Protože se indexy $P_{01}^L, P_{01}^P, P_{01}^T$ mohou lišit, Divisiův přístup nevede k jednoznačnému návodu, jak řešit problém. Jiné návrhy, jak aproximovat Divisiův index se spojitým časem pomocí diskrétních dat podali **Paul A. Samuelson** a **Subramanian Swamy** [1974].

² Bennet, T.L.: The Theory of Measurement of Changes in Cost of Living. Journal of the Royal Statistical Society 83/1920 s.455-462

³ Lineárně homogenní funkce N – proměnných $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ splňuje vlastnost $F(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \cdot F(\mathbf{x})$ pro libovolné skalární $\lambda > 0$.