4 Obecný problém dekompozice - Divisiův přístup a řešení

Odlišný způsob k řešení problému indexních čísel uplatnil v polovině 20.let našeho století francouzský matematik Francois Divisia[1], který formuloval úlohu nalezení agregátního indexu zcela obecně v tom smyslu, že hledal - pro libovolné časové období t - multiplikativní rozklad „makroagregátu“ $P(t)\cdot Q(t)$ reprezentujícího součin agregátního cenového a kvantového indexního čísla do tvaru

$$P(t)\cdot Q(t)=\sum_{i=1}^{N} p_i(t)\cdot q_i(t) \quad , \tag{4.1}$$

tj. tak , aby ve všech okamžicích spojitě uvažovaného času platila aditivní dekompozice agregátu na dílčí součiny příslušné cenové a kvantové „mikrofunkce“ všech uvažovaných komodit. Funkce $P(t)$ jako indikátor všeobecné cenové úrovně má přitom co nejlépe vystihovat pohyb cenové hladiny, podobně funkce $Q(t)$ jako reprezentant souhrnného fyzického objemu vývoj množstevního indexu. Obě tyto „makrofunkce“ jsou kladné se spojitou derivací na $<0,T>$ podle času.

O „mikrofunkcích“ cen a kvantit $p_i(t)$, resp. $q_i(t)$ Divisia předpokládal, že mají:

- spojité první derivace (podle času),
- kladné hodnoty na celém uvažovaném intervalu $<0,T>$,
- konečnou variaci na každém podintervalu $<t-1,t>$ spadajícího do $<0,T>$.

Takto obecně formulovaná úloha však není bez dalších předpokladů jednoznačně řešitelná, což snižuje její uplatnitelnost pro reálné potřeby. Je např. zřejmé, že vedle funkcí $P(t)$ a $Q(t)$, je řešením úlohy také každá dvojice tvaru $c\cdot P(t)$ a $\dfrac{Q(t)}{c}$ pro nějakou kladnou konstantu c.

Divisia samostatně uvažoval dekompozici (4.1) pro spojitý a diskrétní případ.

4.1 Situace se spojitým časem

Jelikož předpokládáme derivovatelnost makrofunkcí $P(t)$, $Q(t)$ i mikrofunkcí $p_i(t)$, $q_i(t)$, můžeme derivace obou stran výrazu (4.1) zapsat jako

$$Q(t)\cdot\frac{\partial P(t)}{\partial t}+P(t)\cdot\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N} q_k(t)\cdot\frac{\partial p_k(t)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{N} p_k(t)\cdot\frac{\partial q_k(t)}{\partial t} \quad . \tag{4.2}$$

Předpokládáme-li kladnost funkcí $P(t)$ a $Q(t)$ na celém intervalu $<0,T>$, můžeme dále (4.2) dělit součinem $P(t)\cdot Q(t)>0$. Dostaneme

$$\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{\partial P(t)}{\partial t}+\frac{1}{Q(t)}\cdot\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}\cdot\frac{\partial p_k(t)}{\partial t}+\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}\cdot\frac{\partial q_k(t)}{\partial t} \quad . \tag{4.3}$$

Jak je patrno, obě vývojové změny se odehrávají odděleně: cenová v prvních, objemová ve druhých členech identity (4.3). Proto uvažujeme zvlášť aditivní rozklad cenové změny v (4.3) jako

[1] Divisia, F.: L´indice monétaire et la Theorie de la monnaie-revue d´Economie politique (1925)

(4.4A)
$$\frac{1}{P(t)}\cdot\frac{\partial P(t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}\cdot\frac{\partial p_k(t)}{\partial t}\quad,$$

resp. obdobně kvantové změny v témže výrazu v podobě

(4.4B)
$$\frac{1}{Q(t)}\cdot\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}\cdot\frac{\partial q_k(t)}{\partial t}\quad.$$

Aditivním rozkladem změny cenové a kvantové situace a dále úpravami využívajícími aparátu Stieltjesova integrálu (pro funkce s konečnou variací) lze následně dospět z původní formulace problému k aproximativnímu tvaru

(4.5)
$$\frac{1}{P(t^*)}\cdot[P(t)-P(t-1)]=\sum_{i=1}^{N}g_k(t_k^*)\cdot[p_k(t)-p_k(t-1)]$$

pro nějaké body t^*, t_k^* ležící v intervalu $< t-1, t >$ a nějakou rozumnou váhovou funkci g_k, jmenovitě např. tvaru

(4.6A)
$$g_k(t_k^*)=\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}\quad.$$

Pokud za oba tyto body vezmeme levý krajní bod intervalu, tj. $t^* = t_k^* = t-1$ a podobně dosadíme za funkci $g_k(t_k^*) = g_k(t-1)$ výraz

(4.6B)
$$g_k(t_k^*)=\frac{q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t-1)\cdot q_i(t-1)}\quad,$$

obdržíme po malé úpravě vztah

(4.7)
$$\frac{P(t)}{P(t-1)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_k(t)\cdot q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N}p_k(t-1)\cdot q_k(t-1)}\quad,$$

což je Laspeyresovo cenové indexní číslo vztažené k bodům $t-1,\ t$ dělícího intervalu. Cenové indexní číslo pro celé uvažované období $< 0, T >$ pak získáme prostým zřetězením

(4.8)
$$P_{0T}^{D}=\overline{P_{0T}^{L}}=P_{01}^{L}\cdot P_{12}^{L}\cdot\ldots\cdot P_{T-1,T}^{L}\quad.$$

Jinou volbou, tentokrát nahrazením t^* a t^*_k pravým krajním bodem intervalu, tj. $t^* = t_k^* = t$ a dosazením za funkci $g_k(t_k^*) = g_k(t)$ výrazu

(4.9)
$$g_k(t)=\frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(t)\cdot q_i(t)}$$

odvodíme Divisiovým postupem zřetězené Paascheho cenové indexní číslo $P^{P}{}_{01}$. Podobně lze dalšími speciálními volbami získat jiná (zřetězená) cenová indexní čísla, např. Edgeworthovo.

Kvantová indexní čísla bychom získali obdobně z rozkladu kvantové změny v (4.4B). V případě dosazení $t^* = t_k^* = t-1$ obdržíme $Q_{t-1,t}^L$ a již popsaným následným zřetězením Q_{0t}^L .

4.2 Situace s diskrétním časem

Uvedený postup lze obdobně použít také na diskrétní případ, kdy v intervalu $< 0, T >$ uvažujeme množinu ekvidistantních izolovaných bodů $t = 0,1,2,....,T$ představujících okamžiky měření cen a kvantit. Opět uvažujeme rozklad agregátu

$$(4.10) \qquad P(t)\cdot Q(t) = \sum_{i=1}^{N} p_i(t)\cdot q_i(t) \qquad t = 0,1,2,....,T$$

v $T+1$ okamžicích.

Nejprve vyjádříme levou stranu změny agregátu mezi obdobími $t-1$ a t (libovolnými následujícími): $P(t)\cdot Q(t) - P(t-1)\cdot Q(t-1)$ v podílovém vyjádření

$$(4.11) \qquad \frac{[P(t)-P(t-1)]\cdot Q(t) + [Q(t)-Q(t-1)]\cdot P(t-1)}{P(t-1)\cdot Q(t)} = \frac{[P(t)-P(t-1)]}{P(t-1)} + \frac{[Q(t)-Q(t-1)]}{Q(t)} .$$

Tomu odpovídající souhrnnou změnu N jednotlivých dílčích změn cen a kvantit na pravé straně (4.11) lze vyjádřit jako

$$(4.12) \qquad \sum_{k=1}^{N} \frac{[p_k(t)-p_k(t-1)]\cdot q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\cdot q_i(t)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{[q_k(t)-q_k(t-1)]p_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\cdot q_i(t)} .$$

Přijmeme-li i zde, že se cenová a množstevní změna hodnotového komplexu odehrávají nezávisle na sobě, můžeme porovnat "stejnolehlé" cenové a kvantové složky samostatně.

Pro relativní cenovou změnovou složku dostaneme rozklad tvaru

$$(4.13) \qquad \frac{P(t)-P(t-1)}{P(t-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[p_k(t)-p_k(t-1)]\cdot q_k(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\cdot q_i(t)} = P_{t-1,t}^P - 1 \quad ,$$

kde $P_{t-1,t}^P$ představuje Paascheho cenové indexní číslo pro změnové období $t-1, t$.

Zcela obdobně odvodíme pro relativní kvantovou změnovou komponentu vyjádření

$$(4.14) \qquad \frac{Q(t)-Q(t-1)}{Q(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[q_k(t)-q_k(t-1)]\cdot p_k(t-1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t-1)\cdot q_i(t)} = 1 - \left(Q_{t-1,t}^L\right)^{-1} \quad ,$$

kde tentokrát $Q_{t-1,t}^L$ zastupuje Laspeyresovo kvantové indexní číslo pro změnové období $t-1, t$.

Obě předchozí rovnosti upravíme odstraněním -1 na obou stranách, čímž dostaneme

$$(4.15\text{A,B}) \qquad \frac{P(t)}{P(t-1)} = P_{t-1,t}^P \qquad \text{a podobně} \qquad \frac{Q(t)}{Q(t-1)} = Q_{t-1,t}^L \quad .$$

Jestliže nyní dále sestavíme konečnou posloupnost řetězových indexů

$\frac{P(1)}{P(0)}, \frac{P(2)}{P(1)}, \ldots, \frac{P(T-1)}{P(T-2)}, \frac{P(T)}{P(T-1)}$ a tyto vzájemně vynásobíme, dostaneme pomocí (4.15A) vyjádření

(4.16)
$$\frac{P(T)}{P(0)} = P^P_{t,1} \cdot P^P_{1,2} \cdot \ldots \cdot P^P_{t-2,t-1} \cdot P^P_{t-1,t} = P^{*P}_{0T} \quad ,$$

což není nic jiného, než zřetězené Paascheho cenové indexní číslo P^{*P}_{0T}. Podobně bychom z (4.15B) získali pro podíl $\frac{Q(T)}{Q(0)}$ zřetězené Laspeyresovo kvantové indexní číslo Q^{*L}_{0T} .

Zvolený způsob rozkladu podle (4.11) vede tedy ke dvěma speciálním situacím, které představují dříve známá dvě zřetězená "klasická" indexní čísla.

Poznámka 4.1 Pokud bychom vycházeli z dekompozice hodnotového makroagregátu způsobem

(4.17)
$$[P(t) - P(t-1)] \cdot Q(t-1) + [Q(t) - Q(t-1)] \cdot P(t) \quad ,$$

obdrželi bychom analogickou cestou dvojici zřetězených indexních čísel P^{*L}_{0T}, Q^{*P}_{0T} .

Postupem podle Divisiova schématu obdržíme pro spojitý i diskrétní případ zřetězené indexní číslo splňující axiom záměny faktorů. Nevyhneme se však již zmíněné nejednoznačnosti určení v důsledku neurčitosti volby multiplikativního rozkladu (diskrétní případ), resp. odhadu aproximujícího Stieltjesova integrálu (spojitý případ). Určitá zpřesnění získaných hodnot jsou nicméně možná v případech, kdy máme k dispozici dodatečné údaje o množinách bodů popisujících vývoj individuálních cen a kvantit.

Základní a závažný problém spojený s praktickou aplikací Divisiova přístupu je ten, že ceny a kvantity nemůžeme měřit kontinuálně, ale vždy jen v určitých odstupech. Takže pro jakékoliv praktické použití by musely být Divisiovy indexy se spojitým časem aproximovány diskrétními, přičemž existuje více možností jak takovou diskrétní aproximaci provést.

Diewert [1980] ukázal, že nejen Laspeyresův a Paascheho index mohou být vzaty jako speciální aproximace podílu $P(1)/P(0)$, ale že tomu tak může být i u Törnquistova indexu (exaktního pro *TRANSLOG* užitkovou funkci, jak zmiňujeme níže v kapitole [7]), pokud definujeme

$$\ln P_{01}{}^{T} = 1/2.\sum_{i=1}^{N} (s_i(0) + s_i(1)).\ln(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}) \quad \text{, s účastmi} \quad s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(t)q_j(t)}$$

Za zmínku stojí, že postup, který použil Divisia v případě indexů se spojitým časem, uplatnil ještě o něco dříve anglický statistik T.L.Bennet[2] až na to, že nepoužil na (4.1) dělení výrazem $\boldsymbol{p}(t).\boldsymbol{q}(t)$.

Bennet [1920] navrhl následující diskrétní aproximaci k měření diferencí (nikoliv tedy podílů jako Divisia) na agregátních cenových a množstevních úrovních:

(4.18) $$\Delta P \equiv P(1) - P(0) \equiv 1/2.\sum_{i=1}^{N}(q_i(0) + q_i(1)).(p_i(1) - p_i(0)) \quad ,$$

(4.19) $$\Delta Q \equiv Q(1) - Q(0) \equiv 1/2.\sum_{i=1}^{N}(p_i(0) + p_i(1)).(q_i(1) - q_i(0)) \quad .$$

Bennet přitom jako první také ukázal, že rozdíl ve výdajích mezi dvěma obdobími $\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1) - \sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)$ dává přesně výraz rovný $\Delta P + \Delta Q$, kde ΔP a ΔQ jsou definovány pravými stranami (4.18), (4.19).

<u>Poznámka 4.2</u> Obecná definice Divisiova spojitého indexu je čistě matematickou konstrukcí a nemusí mít žádnou bezprostřední souvislost s rozklady zasazenými do prostředí indexních čísel, dokonce ani nemusí mít vůbec žádný vztah k ekonomickému prostředí. Teprve později, Jean Villé [1951-52][3] a C.R.Hulten v [19] analyzovali Divisiovy indexy v prostředí cen a spotřebovaných množství za předpokladu, že spotřebitel optimalizuje své chování (z hlediska minimalizace nákladů) a že příslušná užitková funkce je lineárně homogenní [4].

Protože se, jak známo, indexy $P_{01}{}^{L}, P_{01}{}^{P}, P_{01}{}^{T}$ mohou značně lišit, Divisiův přístup nevede k praktickému jednoznačnému návodu, jak řešit problém měření cenového vývoje. Alternativní návrhy, jak aproximovat Divisiův index se spojitým časem pomocí diskrétních dat podali Paul Samuelson a Subramanian Swamy v [25].

---

2 Bennet,T.L.: The Theory of Measurement of Changes in Cost of Living. Journal of the Royal Statistical Socierty 83/1920 s.455-462

3 Villé, J. The Existence-Conditions of a Total Utility Function. Přeloženo v The Review of Economic Studies 19/1951, s.123-128

4 Lineárně homogenní funkce N – proměnných $\mathbf{x} = (x_1,..., x_N)$ splňuje vlastnost $F(\lambda\, \mathbf{x}) = \lambda.F(\mathbf{x})$ pro libovolné skalární $\lambda > 0$.