6 Neostatistická koncepce – Theilova indexní čísla

Nizozemský matematik a ekonometr 50. - 70. let Henri Theil použil pro návrh indexních čísel postup, který vychází ze statistické (regresní) koncepce. Jednotlivé kroky tohoto postupu zde vyložíme.

Předpokládejme, shodně jako dříve, že pracujeme se souborem $N \geq 2$ komodit, o kterých registrujeme informace o cenách a kvantitách v průběhu nějakého časového období délky $T \geq 2$. V případě cen dostupná pozorování vytvářejí maticovou strukturu v podobě (kladných) $T \times N$ prvků matice $P_{T \times N}$ ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} p_1(1) & p_1(2) & p_1(3) & \cdots & p_1(N) \\ p_2(1) & p_2(2) & p_2(3) & \cdots & p_2(N) \\ p_3(1) & p_3(2) & p_3(3) & \cdots & p_3(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_T(1) & p_T(2) & p_T(3) & \cdots & p_T(N) \end{pmatrix}.$$

Obdobný požadavek klademe na dostupnost informací o kvantitách, které požadujeme v analogickém tvaru matice Q o rozměrech $T \times N$. Každý řádek matic P a Q tedy představuje informaci o cenách resp. kvantitách celého komoditního souboru v nějakém pevném čase t^* $(t^* = 1, 2, ..., T)$. Smyslem konstrukce hledaného indexního čísla je pak nalézt (agregací přes soubor komoditních cen resp. kvantit) vektory cen p a kvantit q pro každý časový okamžik $t = 1, 2, ..., T$, tedy sestrojit vektory $p = (p_1, p_2, p_3, ..., p_T)'$ a $q = (q_1, q_2, q_3, ..., q_T)'$ tak, aby každý z nich (dle zvoleného kritéria) vystihoval vývoj celkové cenové resp. množstevní úrovně v daném období.

6.1 Odvození neostatistických indexních čísel

Nejprve popíšeme postup, který povede ke konstrukci vektoru generujícího cenová indexní čísla p pro daný okruh období (popř. územních jednotek) založený na informacích, které máme k dispozici v podobě matic pozorování cen P a kvantit Q.

A) Při konstrukci vektoru p se omezíme na lineární případ (jako nejtypičtější) vztahu mezi p a P. Budeme tedy hledat vektor p (řádkový o délce T) jako lineární kombinaci řádků matice P

(6.1) $$p = P \cdot \alpha,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ je (dosud neznámý, sloupcový) vektor délky N. Jestliže interpretujeme t-tý řádek matice P jako bod v N – rozměrném Eukleidovském prostoru (jde o vektor cen komodit v čase t), pak hledáním vektoru α usilujeme o nalezení nadroviny v E_N, která prochází počátkem a (v dále definovaném smyslu) aproximuje jednotlivé *řádkové* vektory matice P. Poté sestrojíme projekce všech T takových N – rozměrných bodů (řádků matice P) na tuto nadrovinu. Za vektor cenových indexních čísel p pak vezmeme délky takto projektovaných bodů/vektorů od počátku souřadnic.

Parametrickým vyjádřením vyrovnávající nadroviny budou vztahy (pro $k = 1, 2, ..., N$)

(6.2) $$p_k = \beta_k \cdot p \qquad (\beta_k \text{ kladné}).$$

Odchylky „pozorovaných“ cen $p_k(t)$ od jejich lineární aproximace $\beta_k \cdot p(t)$ označíme jako

(6.3) $$u_k(t) = p_k(t) - \beta_k \cdot p(t).$$

Tyto dohromady vytvářejí matici cenových diferencí U, která je rovněž typu $T \times N$. V maticovém zápisu s vyjádřením dimenzí

(6.4) $$U_{T\times N} = P_{T\times N} - p_{T\times 1} \cdot \beta'_{1\times N}$$

(připomeňme, že p je sloupcový vektor typu $T \times 1$ a β sloupcový vektor typu $N \times 1$).

Jednoduchou substitucí z (6.1) pak dostáváme

(6.5) $$U_{T\times N} = P - P \cdot \alpha \cdot \beta' = P(I_N - \alpha \cdot \beta'),$$

kde I_N je jednotková matice řádu N.

Úlohou, která bude dále řešena, je minimalizace matice U (v nějakém maticovém smyslu) v závislosti na parametrech β a α. Ze vztahu (6.5) je současně zřejmé, že takovéto řešení nebude jednoznačné, nýbrž bude určeno až na multiplikativní konstantu $c > 0$, neboť zřejmě přenásobené vektory $c \cdot \beta$ a $\frac{1}{c} \cdot \alpha$ (resp. $\frac{1}{c} \cdot \beta$ a $c \cdot \alpha$) budou stejně tak vyhovovat minimalizační podmínce jako původní vektory β, α.

Nyní přistoupíme k využití informace o kvantitách obsažených v matici Q: Nejprve vytvoříme matici $H = Q' \cdot Q$, která je zřejmě rozměrů $N \times N$. Tato matice je zřejmě symetrická a pozitivně semidefinitní a přísluší k ní kvadratická forma $x'Q'Qx$ pro nějaký N – složkový vektor x, ne identicky nulový. Prvky matice H jsou nezáporné, neboť prvky Q (jde o kvantity) jsou rovněž nezáporné.

Za minimalizační kritérium nyní zvolíme výraz

(6.6) $$Min\ Tr(HU'U) = Min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[h_{ij} \left(\sum_{t=1}^{T} u_i(t) \cdot u_j(t) \right) \right] = F(\alpha, \beta),$$

tedy stopu matice $HU'U$. Minimalizaci provádíme podmíněně vzhledem k prvkům vektorů α, β. Předmětem dalších úvah bude tedy určení podmínek pro α, β, za kterých je výraz (6.6) minimální. Postup rozdělíme do několika kroků:

1) Nejprve upravíme výraz pro $U'U$ na základě znalosti generujících prvků. Postupně dostaneme:

(6.7)
$$U'U = [P' - \beta \cdot \alpha' \cdot P'] \cdot [P - P \cdot \alpha \cdot \beta'] = P'P - \beta \cdot \alpha' \cdot P' \cdot P - P' \cdot P \cdot \alpha \cdot \beta' + \beta \cdot \alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha \cdot \beta',$$

kde poslední člen můžeme zapsat jako $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta \cdot \beta')$, neboť $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha)$ je skalární hodnota.

Vynásobíme-li vztah (6.7) zleva maticí H a vyjádříme-li stopu součinové matice, dostaneme

(6.8) $$Tr(H \cdot U' \cdot U) = Tr[H \cdot P' \cdot P] - 2 \cdot Tr[H \cdot \beta \cdot \alpha' \cdot P' \cdot P] + (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot Tr[\beta' \cdot H \cdot \beta].$$

Dále, s přihlédnutím k tomu, že platí $Tr[(H \cdot \beta) \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P)] = Tr[(\alpha' \cdot P' \cdot P) \cdot (H \cdot \beta)]$, přičemž výraz na pravé straně této rovnosti je skalár, a proto, že rovněž stopa $Tr[\beta \cdot H \cdot \beta']$ je skalár, upravíme (6.8) na

(6.8A) $Tr(H \cdot U' \cdot U) = Tr[H \cdot P' \cdot P] - 2 \cdot \alpha \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta + (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta)$.

2) Dále vyšetříme, kdy tento výraz nabývá (v závislosti na α a β) svého minima. Jak známo, nutnou podmínkou extrému je, aby obě parciální derivace (vektorově zapsané) byly nulové, tj. platnost relací

(6.9A) $\dfrac{\partial Tr(H \cdot U' \cdot U)}{\partial \alpha} = -2 \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta + 2 \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot P' \cdot P \cdot \alpha = 0$ a podobně

(6.9B) $\dfrac{\partial Tr(H \cdot U' \cdot U)}{\partial \beta} = -2 \cdot H \cdot P' \cdot P \cdot \alpha + 2 \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot H \cdot \beta = 0$.

Tuto soustavu $2N$ rovnic pro $2N$ neznámých α a β upravíme zkrácením dvěma, přičemž dále první rovnici vynásobíme zleva maticí H a druhou rovnici zleva maticí $-P'P$. Po těchto úpravách obdržíme

(6.10A) $-H \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta + H(\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot P' \cdot P \cdot \alpha = 0$ a podobně

(6.10B) $P' \cdot P \cdot H \cdot P' \cdot P \cdot \alpha - P' \cdot P \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot H \cdot \beta = 0$.

Z (6.9A) však dále plyne, že $(\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot P'P \cdot \alpha = P'P \cdot H \cdot \beta$, čehož využijeme tak, že do druhého členu (6.10B) dosadíme za $P'P \cdot H \cdot \beta$ zmíněný výraz. (To lze beztrestně provést, neboť $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha)$ je skalár.) Rovnice (6.10B) tak přejde na tvar

(6.10B*) $P'P \cdot H \cdot P'P \cdot \alpha - (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot P' \cdot P \cdot \alpha = 0$,

resp. dále na

(6.11) $P'P[H \cdot P' \cdot P - (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot I_n] \cdot \alpha = 0$,

neboť také $\beta' \cdot H \cdot \beta$ je skalár.

3) Nyní provedeme obdobnou substituci ve vztahu k (6.10A). Z (6.9B) totiž plyne, že $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot H \cdot \beta = H \cdot P' \cdot P \cdot \alpha$. Nahradíme tedy v druhém členu levé strany (6.10A) výraz $H \cdot P' \cdot P \cdot \alpha$ a dostaneme

(6.10A*) $H \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta - (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot (\alpha' \cdot P \cdot P \cdot \alpha) \cdot H \cdot \beta = 0$, neboli

(6.12) $H \cdot [P' \cdot P \cdot H - (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot I_N] \cdot \beta = 0$.

Skalární výraz $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta)$ vyskytující se jak v (6.11), tak v (6.12) nyní označíme jako λ^2 a (6.11) můžeme vyjádřit buď ve tvaru

(6.13A) $P' \cdot P \cdot [H \cdot P' \cdot P - \lambda^2 \cdot I_N] \cdot \alpha = 0$, nebo také jako

(6.13B) $P' \cdot P \cdot [H - \lambda^2 \cdot I_N] \cdot P' \cdot P \cdot \alpha = 0$.

Tytéž úpravy učiníme s výrazem (6.12) a dostaneme obdobně dvojici vztahů:

(6.14A) $H \cdot [P' \cdot P \cdot H - \lambda^2 \cdot I_N] \cdot \beta = 0$, resp.

(6.14B) $H \cdot [P' \cdot P - \lambda^2 \cdot I_n] \cdot H \cdot \beta = 0$.

4) Nyní ještě jednou užijeme vztah (6.9A), který po zkrácení 2 vynásobíme α' zleva. Dostaneme:

(6.15) $(\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) = \alpha' \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta$.

Odtud vidíme, že minimum výrazu $Tr(H \cdot U' \cdot U)$ lze vyjádřit jako

(6.16) $\underset{\alpha,\beta}{Min}\, Tr[H \cdot U' \cdot U] = Tr(H \cdot P' \cdot P) - (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) = Tr(H \cdot P' \cdot P) - \lambda^2$.

5) Nyní rozebereme možnosti, kdy platí podmínka (6.13B): Aby platila, musí být $P' \cdot P \cdot \alpha = 0$ anebo $P' \cdot P \cdot \alpha$ je vlastní vektor matice $P' \cdot P \cdot H$ a současně λ^2 je vlastní číslo této matice.

Z hlubších poznatků teorie matic (konkrétně z Perronovy věty) vyplývá, že maximální vlastní číslo matice, která má pouze kladné prvky, je vždy kladné a složky k němu příslušného vlastního vektoru jsou rovněž kladné. (Pro nezápornou a nerozložitelnou matici platí obdobné Frobeniovo zobecnění.) Ve vztahu k hledanému vektoru p tak máme zaručeno, že $P' \cdot P \cdot \alpha$ může být interpretován jako vektor indexních čísel.

Uvedené věty a vlastnosti aplikujeme na matice $PHP', P'PH$ a $HP'P$. Matice PHP' je symetrická (v důsledku symetrie H) a je pozitivně semidefinitní, protože $P \geq 0$. Všechny tyto tři matice mají nezáporná vlastní čísla, přičemž největší z nich (co do absolutní hodnoty) je jednoduchým kladným kořenem charakteristického polynomu, který je stejný pro všechny tři matice. K tomuto vlastnímu číslu příslušné (u různých matic) vlastní vektory jsou různé, avšak všechny mají kladné všechny složky.

6) Vrátíme-li se k výrazu pro stopu matice $[HU'U]$, dostaneme

(6.17) $$Tr[HU'U] = Tr[HP'P] - \lambda^2.$$

Aby tedy byl výraz $Tr[HU'U]$ minimální, musí být λ^2 maximální (stopa $Tr(HP'P)$ je pevná hodnota nezávislá na α, β). Volíme tedy λ^2 jako největší vlastní číslo matice $P'PH$ resp. $HP'P$ a $P'P\alpha$ je vlastní vektor (nezáporných složek) příslušný λ^2. Poznamenejme však, že minima $Tr[HU'U]$ v (6.16) nedocílíme, když platí $P'P\alpha = H\beta = 0$ - viz (6.13B) resp. (6.14B).

Označíme-li $(HP'P - \lambda^2 I_N) \cdot \alpha = d$, pak platí $P'Pd = 0$ a platí dvě možnosti

a) buď $d = 0$ nebo b) matice $P'P$ je singulární.

Nastává-li případ a), potom α je vlastním vektorem matice $HP'P$ příslušným kořeni λ^2. Nastane-li naopak případ b), je možné volit α i jinak. Pokud je $P'P$ je singulární, zvolíme α tak, že odpovídá charakteristickému číslu matice $HP'P$.

Postačující podmínkou minimalizace je platnost vztahu $(\alpha P'P\alpha) \cdot (\beta' H\beta) = \lambda^2$, kde vektory $\alpha . \beta$ současně vyhovují nutným podmínkám (6.13A-B) i (6.14A-B).
Tím platí i v tomto případě podmínka (6.15), stejně jako nutná podmínka (6.10A-B) pro existenci extrému. Určení α tedy není jednoznačné, ale každé takové α je optimální.

Obdobně z podmínky (6.14A) zvolíme vektor β tak, aby byl vlastním vektorem matice $P'PH$ a odpovídal témuž vlastnímu λ^2. Tím je splněn požadavek na minimalizaci kvadratické formy cenových odchylek i pro případ, kdy $P'P$ je singulární.

Vektor $p = P\alpha$ je určen jednoznačně až na multiplikativní skalár. Ze vztahu $P'Pd = 0$ plyne, že

(6.18) $d'P'Pd = 0$ a tedy, že $Pd = 0$.

Jestliže za d položíme $d = [HP'P - \lambda^2 I_N] \cdot \alpha$, dostaneme

(6.19) $$P\left[HP'P-\lambda^2 I_N\right]\cdot\alpha=0\,.$$

To lze vyjádřit ekvivalentně jako

(6.20) $$\left[PHP'-\lambda^2 I_N\right]\cdot P\alpha=\left[PHP'-\lambda^2 I_N\right]\cdot p=0\,.$$

Vektor generující cenová indexní čísla (určený zatím až na multiplikativní konstantu) tak dostáváme jako vlastní vektor matice $PHP'=P'Q'QP$ odpovídající největšímu vlastnímu číslu této matice (které je, jak již bylo řečeno, kladné). Jednoznačnost určení tohoto vektoru však není zaručena ve smyslu dříve učiněných poznámek o vlastnostech matic s nezápornými prvky.

7) Nyní se budeme zabývat problémem určení kvantových indexních čísel obsažených ve vektoru q. Budeme přitom postupovat analogickou cestou jako při odvození cenových indexních čísel. Symetricky k (6.1) budeme tedy požadovat platnost

(6.21) $$q=Q\cdot\gamma\,,$$

kde γ je vektor typu $N\times 1$. Parametrické vyjádření vyrovnávající nadroviny bude pro $k=1,2,....,N$ vypadat takto

(6.22) $$q_k=\eta_k q \qquad (\eta_k \text{ s kladnými složkami})$$

a matice odchylek W s prvky $w_k(t)=q_k(t)-\eta_k\cdot q(t)$ sestavená obdobně jako U v (6.3) bude

(6.23) $$W=Q(I-\gamma\cdot\eta),$$

kde η je vektor „odhadů“ složek vektoru γ typu $N\times 1$.

S obdobným cílem jako v případě vektoru generujícího cenová indexní čísla zavedeme pozitivně semidefinitní matici $G=P'P$ a postupujeme cestou minimalizace kvadratické formy

(6.24) $$Min\,Tr(GW'W)=Min\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[g_{ij}\left(\sum_{t=1}^{T}w_i(t)\cdot w_j(t)\right)\right]=F(\gamma,\eta).$$

Postup vede k získání čtveřice vztahů analogických k (6.13A) - (6.14B) a k dovození toho, že hledaný vektor q generujícího kvantová indexní čísla je určen jako vlastní vektor matice $QGQ'=Q'P'PQ$ odpovídající největšímu vlastnímu číslu této matice, kterým je opět λ^2.

Nutné podmínky pro minimalizaci matice odchylek (6.24) a matici odchylek (6.6) jsou vyjádřeny následující soustavou podmínek (sloučením (6.13A) - (6.14B) a jejich analogiemi pro vektor generující kvantová indexní čísla):

(6.25)

$$\left[P'PQ'Q-(\alpha'P'P\alpha)\cdot(\beta'Q'Q\beta)I_N\right]\cdot P'P\alpha=0 \qquad \text{(A)}$$
$$Q'Q\left[P'PQ'Q-(\alpha'P'P\alpha)\cdot(\beta'Q'Q\beta)I_N\right]\cdot\beta=0 \qquad \text{(B)}$$
$$\left[P'PQ'Q-(\eta'P'P\eta)\cdot(\gamma'Q'Q\gamma)I_N\right]\cdot P'P\eta=0 \qquad \text{(C)}$$
$$Q'Q\left[P'PQ'Q-(\eta'P'P\eta)\cdot(\gamma'Q'Q\gamma)I_N\right]\cdot\gamma=0 \qquad \text{(D)}$$

$$\left[Q'QP'P-(\alpha'P'P\alpha)\cdot(\beta'Q'Q\beta)I_N\right]\cdot Q'Q\beta=0 \qquad \text{(E)}$$
$$P'P\left[Q'QP'P-(\alpha'P'P\alpha)\cdot(\beta'Q'Q\beta)I_N\right]\cdot\alpha=0 \qquad \text{(F)}$$
$$\left[Q'QP'P-(\eta'P'P\eta)\cdot(\gamma'Q'Q\gamma)I_N\right]\cdot Q'Q\gamma=0 \qquad \text{(G)}$$

$$P'P\left[Q'QP'P - (\eta'P'P\eta)\cdot(\gamma'Q'Q\gamma)I_N\right]\cdot\eta = 0 \qquad \text{(H)}$$

Z těchto vztahů plyne, - stejně jako v předchozím případě vektoru generujícího cenová IČ - že vektory $P'P\alpha, \beta, P'P\eta$ a γ jsou vlastními vektory matice $P'PQ'Q$ a podobně vektory $Q'Q\beta, \alpha, Q'Q\gamma$ a η jsou vlastními vektory matice $Q'QP'P$, přičemž všechny tyto vlastní vektory přísluší největšímu vlastnímu číslu matic $P'PQ'Q$ resp. $Q'QP'P$ (ta jsou shodná) λ^2. Všechny uvedené vlastní vektory jsou určeny až na kladné multiplikativní konstanty a odpovídající si vektory v každé z obou čtveřic vztahů se mohou v této multiplikativní konstantě lišit. Nic přitom nebrání zvolit $\beta = \gamma$, při kteréžto volbě se první a třetí rovnost v obou soustavách ztotožní. Vzhledem k (6.25A,D) a k (6.25F,G) můžeme psát

(6.26) $\qquad P'P\alpha = k_1\gamma \qquad$ a podobně $\qquad Q'Q\gamma = k_2\alpha$,

neboť jde o vlastní vektory příslušné k největšímu vlastnímu číslu λ^2 matic $P'PQ'Q$ resp. $Q'QP'P$. Tyto vektory se mohou lišit nanejvýš ve zmíněné multiplikativní konstantě. Sloučením obou vztahů v (6.26) obdržíme dále

(6.27) $$Q'QP'P\alpha = k_1 Q'Q\gamma = k_1 \cdot k_2\alpha .$$

V (6.27) vidíme, že součin konstant $k_1 \cdot k_2$ zde reprezentuje maximální vlastní číslo matice $Q'QP'P$, tedy λ^2 (přičemž α je k němu příslušný vlastní vektor). Můžeme tedy vyjádřit

(6.28) $$r_1 * r_2 = \lambda^2 = (\alpha'P'P\alpha)\cdot(\beta'Q'Q\beta) = (\alpha'P'P\alpha)\cdot(\gamma'Q'Q\gamma) = p'p\cdot q'q ,$$

přičemž pro určení r_1 a r_2 máme jeden stupeň vůle (druhý z obou skalárů je vázán vztahem $r_2 = \frac{\lambda^2}{r_1}$). Zvolíme-li bez újmy na obecnosti $r_1 = \lambda$ (s kladným λ), dostaneme zřejmě také $r_1 = \lambda$ (jako odmocninu z největšího vlastního čísla matic $P'PQ'Q$ resp. $Q'QP'P$). Vztahy (6.26) se „zesymetrizují“ na

(6.29) $\qquad P'P\alpha = \lambda\gamma \qquad$ resp. $\qquad Q'Q\gamma = \lambda\alpha$.

Tvrzení 6.1 Pro vektory p a q generující indexní čísla cenová a kvantová platí vztahy:

(6.30) $$p'p = q'q = \lambda ,$$

kde λ je odmocnina z největšího vlastního čísla matic $P'PQ'Q$ resp. $Q'QP'P$.

__Ověření__: Užijeme postupně vztahů (6.1): $p = P\alpha$, (6.21): $q = Q\gamma$ a vztahu (6.29) a dostaneme:

(6.31A) $\qquad q'QP'p = q'QP'P\alpha = \lambda q'Q\gamma = \lambda q'q$ a podobně

(6.31B) $\qquad p'PQ'q = p'PQ'Q\gamma = \lambda p'P\gamma = \lambda p'p$.

Poněvadž z rovnosti $q'QP'p = p'PQ'q$ (výraz je skalár) plyne, že $p'p = q'q$ a podle vztahu (6.28) platí $p'p \cdot q'q = \lambda^2$, máme $p'p = q'q = \lambda$. □

Dále platí

Tvrzení 6.2 Pro vektory α a γ určující generující vektory p a q indexních čísel platí:

(6.32) $$\alpha'\gamma = 1 .$$

Ověření: Z (6.29) víme, že $P'P\alpha = \lambda\gamma$, což po vynásobení α' zleva dává $\alpha'P'P\alpha = \lambda\alpha'\gamma$. Výraz $\alpha'P'P\alpha = \lambda$, neboť $p = P\alpha, p' = \alpha'P, p'p = \lambda$ (dle Tvrzení 6.1) a tedy musí platit $\alpha'\gamma = 1$. □

Pro další účely označíme součin matic P a Q (Q v transpozici) zkráceně jako $R = P \cdot Q'$, kde R je matice typu $T \times T$ sestavená z prvků

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{N} p_k(i) * q_k(j), \quad i, j = 1, 2, ..., T.$$

Nyní ukážeme, že platí

Tvrzení 6.3 Pro hledané generující vektory indexních čísel p, q a pro matici $R = P \cdot Q'$ platí vztahy

(6.33A,B) $$R'p = \lambda \cdot q \qquad R \cdot q = \lambda \cdot p.$$

Ověření: Z předchozího víme, že platí $P'P\alpha = \lambda \cdot \gamma$. Vynásobíme-li tento vztah zleva maticí Q, dostaneme

$$QP'P\alpha = \lambda \cdot Q\gamma$$

a protože dále platí $QP' = R'$, $Q\gamma = q$ a $P\alpha = p$, dostáváme dokazovaný vztah (6.33A). Pro druhou část tvrzení využijeme analogicky rovnost $Q'Q\gamma = \lambda\alpha$, kterou násobíme zleva maticí P s výsledkem

$$PQ'Q\gamma = \lambda \cdot P\alpha$$

a protože $PQ' = R$, $Q\gamma = q$ a $P\alpha = p$, můžeme konstatovat platnost vztahu (6.33B). □

Tvrzení 6.4 Pro generující vektory indexních čísel p a q, matici $R = P \cdot Q'$ a skalár $\lambda > 0$ platí:

(6.34) $$p'R'Rq = \lambda^2 p'q.$$

Ověření: Vynásobením vztahu (6.33B) maticí R' zleva dostaneme

(6.35) $$R'Rq = \lambda \cdot R'p = \lambda QP'p.$$

Vynásobení (6.35) vektorem p' zleva pak vede k dokazovanému vztahu

$$p'R'Rq = \lambda p'QP'p = \lambda^2 p'q,$$

neboť dle (6.33A) platí $QP'p = \lambda q$. □

Definice 6.1

Vektory p a q zkonstruované předchozím postupem, minimalizující kvadratickou formu (6.24) a splňující (6.26) a (6.29) se nazývají (podle H. Theila) vektory generující „Theilova symetrická nejlepší lineární cenová (resp. kvantová) indexní čísla“ (zkráceně SBLIN).

Jestliže v předchozí definici uvolníme požadavek na „symetrii" reprezentovanou vztahy (6.26) a obdobně formulovaných vztahů propojujících β a η, můžeme formulovat tzv. nejlepší lineární cenová indexní čísla (BLIN).

Definice 6.2

(a) Mějme matici $P_{T \times N}$ složenou (po řádcích) z T pozorování cenových vektorů p, dále libovolnou pozitivně definitní matici H^* typu $N \times N$ takovou, že součin PH^*P' není nulová matice. Nechť dále λ^2 je největší (kladné) vlastní číslo matice PH^*P'. Potom řešení (vektor p^*) maticové rovnice

(6.36) $$\left[PH^*P' - \lambda^2 I_N\right] \cdot p^* = 0$$

nazveme vektor generující nejlepší lineární cenové indexní číslo (BLPIN).

(b) Mějme matici $Q_{T \times N}$ složenou (po řádcích) z T pozorování vektorů kvantit q, dále libovolnou pozitivně definitní matici G^* typu $N \times N$ takovou, že součin QG^*Q' není nulová matice. Nechť dále μ^2 je největší (kladné) vlastní číslo matice QG^*Q'. Potom řešení (vektor q^*) maticové rovnice

(6.37) $$\left[QG^*Q' - \mu^2 I_N\right] \cdot q^* = 0$$

nazveme vektor generující nejlepší lineární kvantové indexní číslo (BLQIN).

Jak je z předchozí definice patrné, v případě (nesymetrických) BLIN indexních čísel jsou hledané vektory cen p^* a kvantit q^* určeny nezávisle na sobě (což vyplývá z obecné možnosti volby pozitivně definitních matic H^* a G^*).

Jednotlivá cenová indexní čísla P_{St}^T a kvantová indexní čísla $Q_{St}^T \ (s,t = 1,2,....,T)$ dostaneme jako podíly t-tého a s-tého členu (složky) konečného řetězce (vektoru) p, neboť máme zaručeno, že tyto členy jsou vesměs kladná čísla. Definujeme tedy

Definice 6.3

(a) Theilovým cenovým indexním číslem (SBLIN) vyjadřujícím globální cenovou změnu komplexu mezi obdobím s a t $(s,t = 1,2,....,T)$ nazveme podíl

(6.38) $$P_{St}^T = \frac{p(t)}{p(s)},$$

kde $p(t)$ a $p(s)$ označuje t-tou, resp. s-tou složku vektoru p odvozeného předchozím postupem.

(b) Theilovým kvantovým indexním číslem vyjadřujícím globální množstevní změnu komplexu mezi obdobím s a t $(s,t = 1,2,....,T)$ nazveme podíl

(6.39) $$Q_{St}^T = \frac{q(t)}{q(s)},$$

kde $q(t)$ a $q(s)$ označuje t-tou, resp. s-tou složku vektoru q odvozeného v (6.21).

Poznámka 6.1 Jak vyplývá z výše vyslovené definice, cenové ani kvantové Theilovo indexní číslo není závislé na normování vektorů p a q.

Nyní už jen přehledně shrneme základní kroky algoritmu, který vede k získání symetrických nejlepších nestranných lineárních čísel (SBLIN). Modifikace postupu pro BLIN vzhledem k zavedené definici 6.2 (s nutností specifikace matic H^* a G^*) je zřejmá.

Krok 1: Sestavíme matici $R'R = PQ'QP'$ a nalezneme (pomocí vhodné výpočetní metody) její největší vlastní číslo λ^2, o kterém víme, že je kladné.

Krok 2: Řešíme soustavu homogenních lineárních rovnic (6.20), tj.

(6.40) $$\left[PQ'QP' - \lambda^2 I_N\right] \cdot P\alpha = \left[PQ'QP' - G\lambda^2 I_N\right] \cdot p = 0$$

(jde o T rovnic pro T neznámých, jimiž jsou složky vektoru p) a určíme tak vektor p až na multiplikativní konstantu.

Krok 3: Nesplňuje-li hledaný vektor p podmínku (6.30), tj. $p'p \neq \lambda$, normujeme jeho složky takto

(6.41) $$p_i = \frac{1}{\sqrt{p'p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot p_i .$$

Krok 4: Získáme-li podle kroku 3 (normovaný) vektor generující cenová indexní čísla p, pak ze vztahu (6.33A), tj. $PQ'p = \lambda \cdot q$ dostaneme vektor generující nejlepší nestranná kvantová indexní čísla q jako

(6.42) $$q = \frac{1}{\lambda} \cdot PQ' \cdot p .$$

6.3 Vlastnosti nejlepších lineárních indexních čísel (BLIN)

Stejně jako u klasických indexních čísel podrobme nyní Theilova indexní čísla zavedená definicí 6.3 vyšetření, které z axiomů zavedených v části [2.3] tato indexní čísla splňují. Omezíme se přitom na prvních Fisherových 8 testů. Vzhledem k tomu, že zde máme co činit s T obdobími (nejen se dvěma obdobími „0“ a „1“), provedeme ověření vůči kterékoliv dvojici období (popř. území) $s, t \in \{1, 2, ..., T\}$. Vyšetření provedeme ve sledu, který umožní využít dosažené mezivýsledky.

Poznámka k dále použitému značení Vzhledem k tomu, že v této části budeme potřebovat blíže popsat vnitřní strukturu matic R, P a Q, použijeme pro jejich prvky označení ξ, π a ρ, neboť symboly p a q jsme již vyhradili pro jiný účel. Označíme tedy $P = \{\pi_{ji}\}, Q = \{\xi_{ji}\}$ $(j = 1, 2, ..., T,\ i = 1, 2, ..., T)$, $R = \{\rho_{jk}\}, (j, k = 1, 2, ..., T)$. Dále: j-tý řádek matice P označíme $\pi_{j.}$, i-tý řádek matice P označíme $\pi_{.i}$ a stejnou konvenci uplatníme u matic P a Q. Vlastní čísla matice R budeme značit $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_T$.

(F1) axiom identity $\left(P_{ss}^T = 1\right)$ je splněn.

Ověření: Ztotožníme-li obě období (tedy $s = t$), znamená to stejnou situaci v cenách i v množstvích pro vektory cen a kvantit příslušné těmto obdobím, jinými slovy shodu prvků v s-tém a t-tém řádku matice cen P a stejně tak v s-tém řádku a t-tém řádku matice kvantit Q. Odtud následně vyvodíme shodu příslušných prvků s-tého a t-tého sloupce matice Q', která se uplatňuje v matici $R = PQ'$.

Pro s-tý a t-tý řádek matice R to dále znamená (označíme-li ρ_{sj} prvek na místě (s, j) matice R), že

$$\rho_{sk} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{si}\xi_{ki} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ti}\xi_{ki} = \rho_{tk} ,$$

tzn., že s-tý a t-tý řádek matice R se sobě rovnají.

Podobně bychom dostali pro prvky ve sloupcích matice R

$$\rho_{js} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ji} \xi c_{si} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ji} \xi_{ti} = \rho_{jt} \ ,$$

tzn., že také s-tý a t-tý sloupec matice R mají shodné prvky.

(Vše platí pro libovolné j, k a $s = t$ v rozsahu $1, \ldots, T$.) Matice $R = PQ'$ má tedy stejný s-tý a t-tý řádek a stejně tak stejný s-tý a t-tý sloupec.

Pro hledané vektory p $\left(= P_{st}^{T}\right)$ a q $\left(= Q_{st}^{T}\right)$ tedy platí

(6.43) $\qquad QP'p = \lambda q \qquad$ a podobně $\qquad PQ'q = \lambda p$.

Označíme-li řádky matice R jako r_i $(i = 1, 2, \ldots, T)$ a sloupce téže matice jako r_j^* $(j = 1, 2, \ldots, T)$, můžeme „definiční“ vztahy (6.31A,B) zapsat jako

(6.44) $\qquad r_j^* p = \lambda \cdot q(j) \qquad$ resp. $\qquad r_k q = \lambda \cdot p(k) \qquad j, k = 1, 2, \ldots, T$.

Jestliže platí podle předpokladu $r_s = r_t$ (stejně jako $r_s^* = r_t^*$), potom též musí platit $p(s) = p(t)$ a obdobně $q(s) = q(t)$ při $s, t \in \{1, 2, \ldots, T\}$. Jinými slovy $p_s = p_t$ a $q_s = q_t$. □

Obdobný postup lze uplatnit pro ověření **(F7)**:

(F7) axiom úměrnosti - proporční změna všech cen ($p_{ti} = c \cdot p_{si}$ pro všechna j) resp. kvantit - je splněn.

Ověření: Z předpokladu $p_{tj} = c \cdot p_{sj}$ (pro nějaké kladné c, které představuje poměrovou změnu cen) vyvodíme snadno, že

$$\rho_{tk} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ti} \xi_{ki} = \sum_{i=1}^{N} c \cdot \pi_{si} \cdot \xi_{ki} = c.\rho_{sk} \ ,$$

tzn, že prvky t-tého řádku R jsou c-násobky prvků s-tého řádku R.

Podobně dostaneme pro prvky ve sloupcích matice R

$$\rho_{jt} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ji} \xi_{ti} = \sum_{i=1}^{N} \pi_{ji} \cdot c \cdot \xi_{si} = c \cdot \rho_{jt} \ ,$$

tzn, že také $t -$ tý sloupec R má prvky $c -$ násobky $s -$ tého sloupce R.

K ověření **(F7)** potřebujeme prokázat, že $P_{st}^{T} = c$, resp., že také Q_{st}^{T} = c.

Z rovnic (6.42) vyvodíme, že jestliže $r_t = c \cdot r_s$ (stejně jako $r_{.s}^* = r_{.t}^*$), potom platí $p(t) = c \cdot p(s)$ při $s, t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, tzn. $p_t = c \cdot p_s$.Obdobně - *mutatis mutandis* - dostaneme, že $q_t = c \cdot q_s$. □

(F2) axiom záměny faktorů $\left(P_{st}^{T} * Q_{st}^{T} = 1\right)$ není splněn.

Odůvodnění:

Pokud by tento axiom byl splněn, muselo by to znamenat, že výraz (skalární součin) $p(t) * q(t)$ přesně vystihuje agregátní hodnotu v obdobích $t = 1, 2, \ldots, T$, tzn. že $p(t) * q(t) = \sum_{i=1}^{N} p_i(t) \cdot q_i(t)$ (sčítáme přes všech N komodit). Potom by musela platit přinejmenším rovnost prvků na hlavní diagonále matice pq' a matice $PQ' = R$. Toto však obecně nijak zaručit nelze. Rozepíšeme-li prvky na hlavní diagonále matice pq' $(p = P\alpha,\ q = Q\gamma)$ dostáváme:

(6.45) $$\left[\sum_{i=1}^{N} p_i(t)\alpha_i(t)\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} q_j(t)\gamma_j(t)\right] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\gamma_j \cdot p_i(t)\cdot q_j(t) \qquad t = 1,2,....,T\,,$$

kde α_i, γ_i jsou příslušné složky N-členných vektorů α, γ. V případě platnosti **(F2)** by muselo platit

(6.46) $$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\gamma_j \cdot p_i(t)\cdot q_j(t) = \sum_{i=1}^{N} p_i(t)\cdot q_j(t),$$

což však není obecně zajistitelné, neboť rovnic v (6.44), kterých je celkem T, je (až na výjimečný případ, kdy $T = 2N$) vždy více než neznámých (prvků vektorů α, γ, jichž je $2N$).

□

Před vyšetřením axiomů **(F3)** a **(F4)** se zabývejme vlivem dopadu záměny dvou komodit a záměny dvou období (území) na Theilova indexní čísla. Jak ukážeme v následujících dvou tvrzeních, indexní čísla SBLIN jsou vůči oběma takovým změnám invariantní:

Tvrzení 6.5 Vektory p a q generující Indexní čísla SBLIN zavedené *Definicí 6.1* jsou invariantní vůči jakékoliv záměně pořadí komodit (tj. vůči simultánní permutací sloupců matic P a Q).

Ověření: Pro prvky matice R zřejmě platí

(6.47) $$\rho_{jk} = \sum_{i=1}^{N}\pi_{ji}\xi_{ki} \qquad (j,k = 1,2,....,T)$$

a vůbec tedy nezáleží na pořadí komodit vstupujících do těchto skalárních součinů. Výpočet vlastních čísel μ_i $(i = 1,2,....,T)$ matice RR není změnou pořadí komodit nijak dotčen. Podle (6.33A,B) to zajišťuje invarianci vektorů p, q vůči přečíslování komodit. □

Tvrzení 6.6 Vektory p a q generující Indexní čísla SBLIN zavedené *Definicí 6.1* jsou invariantní vůči jakékoliv záměně pořadí dvou období (tj. vůči simultánní permutaci řádků matic P a Q).

Ověření: Prohození dvou období (výměna s-tého za t-tý řádek a naopak v P a tatáž výměna v Q) znamená, že v matici R se prohodí řádek r_s s r_t a současně sloupec r_s^* se sloupcem r_t^*. Totéž platí pro součin $R'R$ a také pro matici $R'R$ - μI_T, protože prvky této matice, které obsahují μ (tj. diagonální prvky) budou i poté opět diagonálními prvky. Jak známo, determinant (čtvercové) matice je invariantní vůči *současné* výměně dvou řádků a týchž sloupců, takže bude i potom platit

$\det[R'R - \mu I_T] = 0$ pro tytéž hodnoty μ a nebude tedy nijak záviset na pořadí jednotlivých období. Platí-li to obecně pro všechna μ_j; $j = 1,2,....,T$, musí to platit zřejmě i pro největší vlastní číslo λ^2 (k němuž se váže hledaný vektor indexních čísel). □

Provedená permutace řádků s a t a současně analogická permutace sloupců s a t vede toliko k tomu, že matice $R'R - \mu I_T$ bude mít na diagonále obecně jinak seřazená vlastní čísla (pokud netrváme striktně na jejich sestupném řazení). Hodnoty těchto čísel budou ovšem shodné jako v původním případě). To nic nemění na určení maximálního vlastního čísla λ^2, jehož hodnota se nezmění. Stejně tak se zachová vlastní vektor tomuto vlastnímu číslu příslušný.

(F3) axiom záměny období (území) $P_{st}^T * P_{ts}^T = 1$ je splněn.

Ověření: S ohledem na definiční podílový vztah (6.38) je ihned zřejmé, že bude platit

(6.48)
$$P_{st}^T \cdot P_{ts}^T = \frac{p(t)}{p(s)} \cdot \frac{p(s)}{p(t)} = 1 .$$

(F4) axiom okružnosti je splněn.

Ověření: V našem $T-$ dimenzním kontextu to znamená prokázat, že platí

$$P_{sv}^T \cdot P_{vt}^T = P_{st}^T \qquad \text{(nezávisle na zvoleném meziobdobí „}v\text{“).}$$

To je ovšem s ohledem na definiční vztah (6.38) okamžitě zřejmé:

(6.49)
$$P_{st}^T \cdot P_{ts}^T = \frac{p(v)}{p(s)} \cdot \frac{p(t)}{p(v)} = \frac{p(t)}{p(v)}$$ □

(F5) axiom určenosti (při nepřítomnosti některé komodity v některém období) je splněn.

Ověření: Je zřejmé, že cenová indexní čísla P_{st}^T definovaná definicí 6.1 tvoří ve všech složkách konečný, ne identicky nulový vektor (vlastní vektor příslušný kladnému vlastnímu číslu) a že v případě absence některé komodity se tento konstrukt nezhroutí. Totéž platí i pro kvantová indexní čísla Q_{st}^T. □

(F6) axiom souměřitelnosti je splněn.

Ověření: Nezávislost vektoru (cenových) indexních čísel na měrových jednotkách komodit lze vyvodit opět z invariance prvků matice R vůči případným těmto změnám: d-násobné zvětšení (pro $D > 0$) původní měrové jednotky vede k $\frac{1}{d}$ násobnému zmenšení původní jednotkové ceny. Prvky matice R vyjadřující hodnotové agregáty (dané součiny $r_{jk} = \sum_{i=1}^{N} p_{ji} \cdot q_{ki}$) tedy vyvolanou změnou měrové jednotky komodity ovlivněny nebudou. □

6.4 Vztah Theilových a klasických indexních čísel

Poslední otázkou, která nás zde bude v souvislosti s indexními čísly zavedenými H.Theilem zajímat, je případná souvztažnost konstruovaných SBLIN-indexních čísel vůči některým klasickým typům indexních čísel. S ohledem na výsledky dosažené v předchozích částech (zejména 2.4) lze za ústřední považovat otázku, zda (aspoň některá z nich) mohou být situována do intervalu vymezeného (zdola) Paascheho a (shora) Laspeyresovým indexním číslem. Ukážeme, že odpověď na takto položenou otázku je kladná.

Za uvedeným účelem omezíme (jinak libovolný konečný) počet T období, za která registrujeme údaje o cenách a kvantitách N komodit, na 2 $(T = 2)$. Nejprve sestrojíme matici R „hodnotových“ skalárních součinů $R = P \cdot Q'$ pro dvě (časová) období:

(6.50) $$R = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1) \\ \sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0) & \sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1) \end{pmatrix},$$

v níž význam všech přítomných symbolů je známý. Čtveřici prvků této matice nyní budeme normovat hodnotovým agregátem základního období $\Sigma p_i(0)\cdot q_i(0)$. Po vydělení dostaneme matici R^* tvaru

(6.51) $$R^* = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)} & \dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)} \end{pmatrix},$$

v níž mimodiagonální prvky jsou představovány Laspeyresovými indexními čísly Q_{01}^L a P_{01}^L. Ve zkráceném zápisu tedy

(6.52) $$R^* = \begin{pmatrix} 1 & Q_{01}^L \\ P_{01}^L & \dfrac{M(1)}{M(0)} \end{pmatrix},$$

kde$M(1)$ a $M(0)$ jsou hodnotové agregáty běžného a základního období (značení je shodné jako u Stuvelova indexního čísla v části [3.3]).

Nyní si připomeneme von Bortkiewiczův vztah - viz část [2.6] - platný pro podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla, podle kterého lze psát

(6.53) $$P_{01}^P = P_{01}^L(1+\omega),$$

kde symbol ω vyjadřuje součin tří členů: (vážených) výběrových variačních koeficientů Vx, Vy a (váženého) výběrového korelačního koeficientu r_{xy} vektorů x a y určených vztahy

(6.54) $$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \qquad y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(0)},$$

(6.54A) s vahami $$w_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}.$$

Jak známo, párový korelační koeficient r_{xy} má v důsledku protichůdné tendence ve vývoji cen a kvantit (vůči příslušným průměrným hodnotám) ve shodném období změn ($0 \to 1$) záporné znaménko. S ohledem na výše konstatované lze dále psát

(6.55) $$R^* = \begin{pmatrix} 1 & Q_{01}^L \\ P_{01}^L & P_{01}^L Q_{01}^L(1+\omega) \end{pmatrix}$$

V dalším kroku stanovíme poměry P_{01}^{Th} a Q_{01}^{Th} jako $P_{01}^{Th} = \frac{p(1)}{p(0)}$ resp. $Q_{01}^{Th} = \frac{q(1)}{q(0)}$, tedy indexní čísla typu BLIN (vyjadřují pohyb cenové a množstevní hladiny mezi základním a běžným obdobím). Velikost podílového zkreslení ω bude zpravidla malá. V rámci sledovaného cíle nás (pro dvě období 0 a 1) nebude zajímat absolutní velikost složek hledaných vektorů p a q, nýbrž jen jejich vzájemný poměr (obejdeme se tedy i bez znalosti vlastního čísla λ). Vektory p a q dostaneme v souladu s dříve popsaným schématem pomocí maticových rovnic

$$\left(R'R - \lambda^2 I_N\right) \cdot p = 0 .$$

Nejprve se budeme věnovat Theilovu cenovému indexnímu číslu P_{01}^{T}. K jeho výpočtu slouží první z předchozích rovnic, která v rozepsání po prvcích (dle období) představuje zápis:

(6.56) $$\begin{pmatrix} 1 & Q_{01}^L \\ P_{01}^L & P_{01}^L \cdot Q_{01}^L \cdot (1+\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & P_{01}^L \\ Q_{01}^L & P_{01}^L \cdot Q_{01}^L \cdot (1+\omega) \end{pmatrix} - \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Po dalších poněkud zdlouhavějších úpravách se zanedbáním členů vyjadřujících zkreslení nižších řádů dostaneme pro hledané Theilovo cenové indexní číslo P_{01}^{T} vztah:

(6.57) $$P_{01}^{Th} = P_{01}^{L} \left(\frac{1 + \theta \cdot \left(Q_{01}^L\right)^2}{1 + \left(Q_{01}^L\right)^2} \right) + o(\omega), \text{ kde}$$

ω představuje již zmíněný výraz z von Bortkieviczova poměru jako součin $V_{\frac{p1}{p0}} \cdot V_{\frac{q1}{q0}} \cdot r_{\frac{p1}{p0}, \frac{q1}{q0}}$

a $o(\omega)$ vyjadřuje výraz, pro který při $\omega \to 0$ $\lim \left[\frac{o(\omega)}{\omega} \right] = 0$ a který je zanedbáván.

Podobně lze vyjádřit pro Theilovo kvantové indexní číslo vztah

(6.58) $$Q_{01}^{Th} = Q_{01}^{L} \left(\frac{1 + \omega \left(P_{01}^L\right)^2}{1 + \left(P_{01}^L\right)^2} \right) + o(\omega).$$

Vzhledem k tomu, že platí nerovnosti (s ohledem na záporné θ a kladnou hodnotu P_{01}^{L})

(6.59) $$1 + \omega < 1 + \omega \left[\frac{\left(P_{01}^L\right)^2}{1 + \left(P_{01}^L\right)^2} \right] < 1 ,$$

dostáváme odtud platnost

(6.60) $$P_{01}^{P} < P_{01}^{Th} < P_{01}^{L} ,$$

což znamená, že hodnota Theilova cenového indexního čísla se rovněž nachází v intervalu tvořeného zdola Paascheho a shora Laspeyresovým cenovým indexním číslem. Uvážíme-li dále, že v případě nevelkých kvantových a cenových změn mezi porovnávanými obdobími (jsou-li tato relativně blízko sebe a kdy Q_{01}^{L} i P_{01}^{L} se neliší příliš od 1) platí

(6.61) $$\frac{\left(Q_{01}^L\right)^2}{1 + \left(Q_{01}^L\right)^2} \cong \frac{1}{2} \cong \frac{\left(P_{01}^L\right)^2}{1 + \left(P_{01}^L\right)^2} \quad ,$$

potom lze říci, že Theilovo (cenové) indexní číslo leží zhruba ve středu intervalu vymezeného zdola P_{01}^{P} a shora P_{01}^{L}. □

Stejný závěr lze vyslovit i pro Theilovo kvantové indexní číslo, pro něž platí obdobně

(6.62) $$Q_{01}^{P} < Q_{01}^{Th} < Q_{01}^{L}.$$

Theilův přístup vycházející z regresního principu není však jediným v úvahu přicházejícím. Krátce po jeho vyvinutí přišli s určitou jeho modifikací Theilovi krajané Kloek a de Witt [1961]. Stručně lze základní myšlenku jejich přístupu uvést takto:

Je-li Theilův přístup ve své podstatě založen na nepodmíněné minimalizaci výrazu

(6.63) $$Min\, E = Min\left[PQ' - pq'\right],$$

kde E lze interpretovat jako matici "odchylek pozorovaných a vyrovnaných hodnot", přičemž SBLINy minimalizují

(6.64) $$Tr\, E \cdot E' = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} e_{jk}^{2},$$

potom metoda Kloeka a de Witta spočívá rovněž v minimalizaci (6.63), avšak při platnosti apriorně vyžadované podmínky $Tr\, E = 0$. Tato podmínka je - jak lze ukázat - slabší než požadavek na platnost axiomu záměny faktorů **(F2)**, který - jak víme - Theilovy SBLINy nesplňují - avšak míra nesplnění **(F2)** je při této dodatečné podmínce nižší než v případě Theilových SBLINů. Postup odvození příslušných indexních čísel (pojmenovaných BLAU - nejlepší nestranná průměrná indexní čísla) je založen na metodě Lagrangeových multiplikátorů (která je obvyklým nástrojem analýzy při aplikaci metody nejmenších čtverců s lineárními omezeními) a má iterační charakter.