

2.4 Příklady dvoukomoditních uživatkových funkcí

V této části uvedeme několik příkladů z oblasti běžných analytických tvarů, které vyšetříme z hlediska vhodnosti jejich použití jako uživatková funkce. Odvodíme dále u nich analytické tvary pro nepřímou uživatkovou funkci, výdajovou funkci a pro poptávkové funkce po komoditách, a to jak v *Hicksově*, tak v *Marshallově tvaru*. Odvození poptávkových funkcí provedeme buď přímou cestou (na základě využití nutných podmínek pro nalezení rovnovážného bodu), nebo nepřímou z nepřímé uživatkové funkce (pomocí *Royovy identity*) popř. výdajové funkce (pomocí *Shephardova lemmatu*). Poznamenejme, že z každého jednoduchého funkčního tvaru lze odvodit řadu dalších, uplatníme-li na tento tvar spojitou rostoucí transformaci s vědomím, že (přímá) uživatková funkce je určena pouze s ordinální přesností ve smyslu vlastnosti (U5) obecné uživatkové funkce.

4.1 Lineární uživatková funkce

Nejjednodušší možnou specifikací uživatkové funkce je lineární funkce tvaru

$$(4.1) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

s těmito omezeními na parametry : konstantní člen = 0 (nutné pro platnost $u(\mathbf{0}) = 0$) a $\alpha_i > 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ (vzhledem k požadavku kladných mezních užiteků). Jak se lze ihned přesvědčit, při těchto omezeních vyhovuje lineární tvar všem požadavkům (U1)-(U4),(U6) kladeným na uživatkovou funkci. Zřejmě dále $u_r(\mathbf{x}) = \alpha_r$ pro všechna r nezávisle na \mathbf{x} , $m_{rs} = \frac{\alpha_r}{\alpha_s}$ (tedy rovněž nezávisle na \mathbf{x}) a $u_{rs}(\mathbf{x}) = 0$ pro všechna $r, s = 1, 2, \dots, n$. Jak mezní užitek, tak mezní míra substituce mezi kterýmikoliv dvěma statky jsou tedy nezávislé na poloze kombinace statků v komoditním prostoru.

Přesto lineární tvar není jako uživatková funkce vhodný a v aplikacích se lineární uživatková funkce neužívá. Proč tomu tak je, napoví obrázek [2A], který vystihuje situaci pro dvě komodity x_1, x_2 : Na něm jsou zakresleny tři indifferenční křivky odpovídající hladinám užitku u^1, u^2, u^3 při $u^1 < u^2 < u^3$. Výdajové omezení tvaru $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$ je představováno úsečkou AB spojující body $A \equiv \left[\frac{M}{p_1}; 0 \right]$, $B \equiv \left[0; \frac{M}{p_2} \right]$. Rovnovážný bod je charakterizován stavem, v němž se některá z indifferenčních křivek (při konstantní úrovni příjmu M a daných cenách p_1, p_2) při přibližování zprava shora k počátku poprvé dotkne výdajového omezení. V zakresleném případě je to indifferenční křivka na hladině u^1 dotýkající se výdajového omezení v bodě A .

Mezní míra substituce je u dvoukomoditní lineární funkce rovna podílu $m_{12} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ a je tedy

konstantní v celém komoditním prostoru. Dále je patrné, že bod A bude rovnovážným bodem právě tehdy, jestliže mezní míra substituce bude větší než poměr relativních cen, tedy při $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{p_1}{p_2}$.

Pokud bude tento poměr opačný, nastane rovnováha (ustálení poptávky na rovnovážné úrovni) v bodě B . Ve výjimečné situaci, kdy platí $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{p_1}{p_2}$, existuje nekonečná množina rovnovážných bodů

představovaných celou úsečkou AB . Jestliže relativní cenový poměr $\frac{p_1}{p_2}$ bude vykazovat hodnotu

blízkou $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, potom to bude znamenat, že kolísání kolem $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ povede ke skokovým přesunům rovnovážného bodu z A do B a naopak.

Nevhodnost uplatnění lineární funkce jako užtkové vyplývá tedy z následujícího :

a) Substituce mezi komoditami probíhá zpravidla obtížněji, než jak udává konstantní poměr $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Zpravidla při dosažení určité (kriticky malé) hodnoty jedné z komodit množství druhé, která ji má nahradit, výrazně vzrůstá, čímž se substituce stává stále obtížnější.

b) **Není typické, aby - až na výjimku $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ - bylo rovnovážné řešení charakterizováno stavem, kdy**

je poptávána jen jedna komodita (x_1 v případě, že rovnováha nastane v A , resp. x_2 , pokud je rovnováha v B).

c) Podobně nepřirozené je alternování (přeskakování) polohy rovnovážného bodu (z A do B a

naopak) při malé změně poměru $\frac{P_1}{P_2}$ v okolí hodnoty $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Odporuje to pozorovaným setrvačností v

chování spotřebitelů ve vztahu k nakupovaným statkům. Navíc, rovnováha je při uvedeném poměru relativních cen vysoce nestabilní.

Nepřímou užtkovou funkci příslušnou k lineární užtkové funkci nelze odvodit z nutných podmínek pro polohu rovnovážného bodu, protože mezní užtky neobsahují jako argumenty příslušné souřadnice (ani pro x_1 ani pro x_2). Můžeme však vyjít přímo ze souřadnic, kterými je definován rovnovážný bod (viz též obrázek). Je však třeba přitom rozlišit dva případy :

a) je-li nakupován pouze první statek, pak je rovnováha určena bodem $A \equiv \left[\frac{M}{P_1}; 0 \right]$,

Poptávková funkce v **Marshallově vyjádření** má tedy tvar

$$(4.2) \quad {}^M x_1 = \frac{M}{P_1}$$

Nepřímou užtkovou funkci obdržíme snadno dosazením této poptávky do (přímé) užtkové funkce. Dostaneme :

$$(4.3) \quad \Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_1 M}{P_1}$$

Výdajovou funkci pak získáme substitucí, při níž zapíšeme levou stranu (4.3) jako ${}^0 u$ a kde na pravé straně téhož výrazu nahradíme výdaj M výrazem $M = E({}^0 u, p)$. Odtud snadno získáme výraz

$$(4.4) \quad E({}^0 u, p) = \frac{P_1}{\alpha_2} \cdot {}^0 u$$

b) je-li nakupován pouze druhý statek, pak je rovnováha určena bodem $B \equiv \left[0; \frac{M}{P_2} \right]$.

Poptávková funkce v Marshallově vyjádření má nyní tvar

$$(4.5) \quad {}^M x_2 = \frac{M}{P_2}$$

Nepřímou užtkovou funkci a výdajovou funkci obdržíme stejným postupem jako dříve :

$$(4.6A,B) \quad \Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_2 M}{P_2} \quad E({}^0 u, p) = \frac{P_2}{\alpha_2} \cdot {}^0 u$$

Poznámka 1 Třetí případ představovaný situací, kdy je rovnovážný „bod“ tvořen celou úsečkou AB, není třeba uvažovat zvlášť, neboť jde o jistý „průnik“ obou předchozích. V něm platí $\alpha_1 p_2 = \alpha_2 p_1$.

Odvození poptávkových funkcí je možné provést též nepřímo, vyjdeme-li z již známé nepřímé uživatelské nebo výdajové funkce. Protože platí

$$(4.7) \quad \frac{\partial \Psi(P, M)}{\partial M} = \frac{\alpha_i}{p_i} \quad \text{a podobně} \quad \frac{\partial \Psi(P, M)}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i M}{p_i^2} \quad \text{pro } i=1,2$$

obdržíme výrazy (4.2) resp. (4.5) též aplikací *Royovy identity*, obdobně jako bychom uplatněním *Shephardova lemmatu* na (4.4) resp. (4.6B) dostali vztahy

$$(4.8) \quad {}^H x_i = \frac{\partial E({}^0 u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0 u}{\alpha_i}, \quad \text{z nichž po dosazení za } {}^0 u = \frac{\alpha_i M}{p_i} \quad \text{máme ihned (4.2), (4.5).}$$

4.2 Kvadratická uživatelská funkce

Ani tento funkční tvar není, jak níže ukážeme, jako uživatelská funkce vhodný: n -komoditní ryze kvadratická uživatelská funkce může být zapsána ve tvaru

$$(4.9) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

při $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ zajišťujících kladné mezní užítky. Absence konstantního členu vyplývá opět z podmínky $u(\theta) = 0$. Ryze kvadratická funkce s kladnými koeficienty je konečná, nezáporná, rostoucí ve všech komoditách, spojitá a neomezeně diferencovatelná, není však kvazikonkávní. K přiblížení negativního důsledku nesplnění posledně jmenované vlastnosti stačí uvažovat dvoukomoditní případ

$$(4.10) \quad u(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$$

jehož geometrickým vyjádřením je elipsa tvaru

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = u^0 \quad \text{resp.}$$

$$(4.11) \quad \frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2} = 1$$

tedy se středem v počátku a s poloosami $\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_1}}$ resp. $\frac{\sqrt{u^0}}{\sqrt{\alpha_2}}$. Na obrázku [2B] je zakreslena situace

se třemi indifferenčními křivkami na hladinách užítku u^1 , u^2 , u^3 při $u^1 < u^2 < u^3$. Výdajové omezení je opět znázorněno úsečkou AB s rovnicí $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$ spojující body $A \equiv \left[\frac{M}{p_1}; 0 \right]$,

$B \equiv \left[0; \frac{M}{p_2} \right]$. Bod Q , v němž se indifferenční křivka u^1 dotýká výdajového omezení, však není

rovnovážným bodem v plnohodnotném slova smyslu. Naopak, posun z něj po výdajovém omezení v obou možných směrech vede k dosažení bodů (komoditních kombinací), které leží na indifferenčních křivkách o vyšších hladinách užítku, což je v protikladu s požadavkem na vlastnost rovnovážného bodu. Lze pozorovat pouze to, že jsou-li vybrány komodity v množstvích odpovídajících souřadnicím bodu Q , potom úbytek množství jednoho či druhého statku bude znamenat vždy přechod na nižší

indiferenční křivku. To však nemá žádný vztah ke kritériu požadovanému pro rovnovážný bod, aby se komodity nakupovaly v poměrech, které zajišťují nejlevnější možný výdaj (pro danou hladinu užítku).

Na uvedeném obrázku lze též dobře ilustrovat rozdíl mezi rostoucí a kvazikonkávní funkcí. Uvažovaná ryze kvadratická funkce s kladnými α_i , $i = 1, 2$ je neklesající (je dokonce rostoucí) v každé proměnné, není však kvazikonkávní. Množině dvoukomoditních rostoucích funkcí odpovídá třída indiferenčních křivek, u kterých průběh (zleva shora) po kterékoliv z nich je charakterizován klesající hodnotou x_2 a rostoucí hodnotou x_1 , zatímco *kvazikonkávnost* navíc mj. vyžaduje, aby mezní míra substituce při tomto pohybu kontinuálně klesala (což u kvadratické funkce splněno není) a aby všechny indiferenční křivky byly pro danou užítkovou funkci vždy "vyklenuty směrem k počátku".

Mezní užítky u ryze kvadratické funkce jsou $u_1 = 2\alpha_1 x_1$, $u_2 = 2\alpha_2 x_2$ (a jsou tedy závislé na bodu komoditního prostoru, v němž jsou vyčísleny), mezní míra substituce je rovna $\frac{\alpha_1 x_1}{\alpha_2 x_2}$ (a je tedy rostoucí při snižování x_2 a zvyšování x_1).

Poznámka 2 Je zřejmé, že ke zlepšení vlastností ryze kvadratické funkce nepovede specifikace se zápornými koeficienty α_1 , α_2 . Při nich bude sice tato funkce kvazikonkávní, ale funkce sama bude záporná a klesající, oba mezní užítky budou tedy záporné. Jako užítková funkce je tedy nepoužitelná.

Odvození poptávkových funkcí po komoditách provedeme na základě maximalizace výrazu

$$W = \text{Max}[u(x) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)] = \text{Max}[\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)]$$

Parciálními derivacemi podle x_1, x_2 a λ a jejich anulováním dostaneme tři podmínky :

$$\begin{aligned} u_1 = 2\alpha_1 x_1 - \lambda p_1 = 0 & & u_2 = 2\alpha_2 x_2 - \lambda p_2 = 0 & & \frac{\partial W}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - M = 0 & \text{ tzn.} \\ 2\alpha_1 x_1 = \lambda p_1 & & 2\alpha_2 x_2 = \lambda p_2 & & p_1 x_1 + p_2 x_2 = M \end{aligned}$$

z nichž odvodíme (řešením tří rovnic pro neznámé x_1, x_2, λ) v závislosti na parametrech úlohy, tj. $\alpha_1, \alpha_2, p_1, p_2$ a M poptávkové funkce po obou komoditách jako

$$(4.12) \quad x_1 = \frac{\alpha_2 p_1 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)} \quad x_2 = \frac{\alpha_1 p_2 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)} \quad \lambda = \frac{\alpha_1 \alpha_2 M}{(p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1)}$$

V obou případech roste poptávka přímo úměrně příjmu M a nepřímo úměrně s cenou této komodity. Přístupme nyní k odvození nepřímé užítkové funkce. K tomu stačí dosadit x_1, x_2 z (2.4.12) do (2.4.10).

Po drobných úpravách dostaneme

$$(4.13) \quad \Psi(p_1, p_2, M) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 M^2}{p_1^2 \alpha_2 + p_2^2 \alpha_1}$$

Nepřímá užítková funkce je tedy rovněž kvadratická v M a klesající se čtvercem každé z cen p_1, p_2 .

Výdajovou funkci získáme standardně nahrazením levé strany (2.4.13) pevnou hodnotou $^0 u$ a položením $M = E(^0 u, p)$. Pak již snadno z (2.4.13) získáme výraz

$$(4.14) \quad E(^0u, p) = \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)^0 u}{\alpha_1 \alpha_2}}$$

Výdajová funkce je tedy odmocninná ve vztahu k hladině užitku

Marshallův tvar poptávkových funkcí lze odvodit též pomocí *Royovy identity*, přičemž z (2.4.13) máme

$$(4.15) \quad \frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial M} = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 M}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} \quad \text{a též}$$

$$\frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial p_i} = -\frac{2\alpha_1 \alpha_2 M^2 p_1 p_2 p_i}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)^2}$$

zatímco k vyjádření v Hicksově tvaru musíme použít *Shephardovo lemma*, na základě něhož

$$(4.16) \quad {}^H x_i = \frac{\partial E(^0u, p)}{\partial p_i} = 0,5 \cdot \left(\frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)^0 u}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^{-1/2} \cdot \frac{2\alpha_2 p_1^0 u}{2\alpha_2 p_1^0 u} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{p_1^2 u}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)}} \quad \cdot$$

Shodu obou výrazů prověříme např. dosazením výdajové funkce $E(^0u, p)$ za M

$${}^M x_1 = \frac{\alpha_2 p_1 M}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2} \cdot \sqrt{\frac{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)^0 u}{\alpha_1 \alpha_2}} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{p_1^2 u}{(\alpha_2 p_1^2 + \alpha_1 p_2^2)}} = {}^H x_1$$

4.3 Leontiefova užitková funkce

Tento typ užitkové funkce (též užitková funkce s pevnými koeficienty) lze zapsat ve tvaru

$$(4.17) \quad u(x) = \text{Min}[\beta_1 x_1; \beta_2 x_2; \dots; \beta_n x_n]$$

kde $\beta_i = 1, 2, \dots, n$ jsou nějaké kladné konstanty. Tato užitková funkce je charakterizována indifferenční mapou sestávající z indifferenčních křivek, které mají podobu „rohů“ (vrcholů a hran) neomezených n -rozměrných kvádrů. Vrcholy přitom leží na polopřímce vycházející z počátku souřadnic.

Pro případ dvou komodit má tato polopřímka rovnici $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$ a celou situaci lze vyjádřit

obrázkem [2C], který opět obsahuje indifferenční křivky pro tři úrovně užitku u^1, u^2, u^3 . Jako oblast X^D označíme množinu všech $[x_1, x_2]$, pro které platí $x_1 \geq x_2$ a jako X^H oblast, v níž platí $x_2 \geq x_1$. Hranici obou množin tvaru $x_1 = x_2$ tvoří polopřímka vycházející z počátku souřadnic pod úhlem ϕ , pro který platí $\text{tg} \phi = \frac{\beta_2}{\beta_1}$.

Jinak je patrné, že Leontiefovská funkce splňuje vlastnosti užitkové funkce, neboť je :

(U1) : reálná konečná a platí $u(\theta) = 0$, (U2): neklesající v celé definičním oboru, přesněji rostoucí ve směru přírůstku každé komodity až do hodnoty $x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot x_1$, poté je konstantní, (U3) spojitá v celém definičním oboru a (U4) kvazikonkávní, neboť funkční hodnota v bodě ležícím na spojnici libovolných dvou bodů komoditního prostoru nikdy neklesne (jak plyne z konvexnosti množin) pod menší z obou hodnot užítka v krajních bodech. Aplikace (U5) pak vede k obecnějším strukturám komplementárních užítkových funkcí.

Pokud jde o hodnoty mezních užítků, musíme rozlišit oblasti X_d a X_h vyznačené na obrázku [2C] :

v oblasti X^H platí $u_1 = \beta_1$, resp. $u_2 = 0$.

zatímco

v oblasti X^D platí $u_1 = 0$, resp. $u_2 = \beta_2$.

Dále zřejmě v celém komoditním prostoru platí $u_{11} = u_{12} = u_{22} = 0$ a pro mezní míry substituce platí :

v oblasti X^H : $m_{12} = \frac{u_1}{u_2} = +\infty$, zatímco v oblasti X^D : $m_{12} = \frac{u_1}{u_2} = 0$.

Abychom odvodili u této funkce poptávkové funkce po komoditách, musíme - při neexistenci parciálních derivací na „hřebeni“ zvolit poněkud modifikovaný postup : Je zřejmé, že při jakýchkoliv kladných cenách p_1, p_2 a příjmu M vzájemně propojených rovnosti $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ bude maxima užítka dosaženo na „hřebeni“. Bod maxima tedy získáme jako průsečík úsečky $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ a polopřímky $\beta_1x_1 = \beta_2x_2$ procházející počátkem souřadnic. Řešením pro x_1, x_2 dostaneme poptávkové funkce ve tvaru :

$$(4.18) \quad x_1 = \frac{\beta_2 M}{p_1 \beta_2 + p_2 \beta_1} \quad x_2 = \frac{\beta_1 M}{p_1 \beta_2 + p_2 \beta_1}$$

Odtud je vidět, že poptávka po každé komoditě je přímo úměrná příjmu M a nepřímo úměrná ceně vlastní (ale stejně tak i cizí) komodity. Povšimněme si přitom, že z tohoto hlediska jsou komodity x_1, x_2 v typicky komplementárním vztahu.

Uveďme dále, že Leontiefova užítková funkce je (pro libovolné konečné n) lineárně homogenní, neboť pro ni platí:

$$(4.19) \quad u(\lambda x) = \text{Min}[\beta_1 \lambda x_1 + \beta_2 \lambda x_2 + \dots + \beta_n \lambda x_n] = \lambda \cdot \text{Min}[\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n] = \lambda \cdot u(x)$$

pro libovolné kladné λ .

Leontiefova užítková funkce je pro určitý typ vzájemného vztahu komodit (jsou-li tyto vzájemně komplementární) výstižným analytickým nástrojem. Naopak, pro situace charakterizované vzájemnou substitučností komodit není adekvátně použitelná.

Rovněž u Leontiefovy užítkové funkce lze snadno odvodit nepřímou užítkovou funkci : Stačí dosadit nalezené poptávkové funkce (2.4.18) do přímé užítkové funkce. Dostaneme

$$(4.20) \quad \Psi(p_1, p_2, M) = \text{Min} \left[\frac{\beta_1 \beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}; \frac{\beta_2 \beta_1 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \right] = \frac{\beta_1 \beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}$$

a vidíme, že oba výrazy v závorce jsou shodné – minima se tedy nabývá v obou bodech současně. V souladu s očekáváním roste nepřímá užítková funkce přímo úměrně s příjmem a nepřímo úměrně

s cenou vlastní i nevlastní komodity (opět zaznamenáváme komplementaritu ve vztahu mezi oběma).

Nyní můžeme odvodit poptávkové funkce také alternativně odvodit pomocí Royovy identity. Protože

$$\frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial M} = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \quad \frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial p_i} = - \frac{\beta_1 \beta_2 M}{(\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)^2} \cdot \beta_i$$

vede výraz $-\frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial p_i} / \frac{\partial \Psi(p, M)}{\partial M}$ přesně ke tvaru poptávkové funkce v Marshallově tvaru, jak jsme ho odvodili vztahem (4.18) .

Dále přistoupíme k určení výdajové funkce. Stačí k tomu nahradit levou stranu v (2.4.20) pevnou hodnotou užítku 0u a M nahradit zápisem výdajové funkce $E({}^0u, p)$. Odtud již snadno máme

$$(4.21) \quad E({}^0u, p) = \frac{{}^0u (\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1)}{\beta_1 \beta_2}$$

Výdaj spojený s nákupem statků je přímo úměrný úrovni užítku a též přímo úměrný cenám komodit.

Konečně rovněž snadno ověříme shodu poptávkových funkcí pro oba tvary (Marshallův i Hicksův): Nejprve odvodíme pomoc Shephardova lemmatu Hicksův tvar poptávkových funkcí. Zřejmě

$$(4.22) \quad {}^H x_i^* = \frac{\partial E({}^0u, p)}{\partial p_i} = \frac{{}^0u}{\beta_1 \beta_2} \cdot \beta_j = \frac{{}^0u}{\beta_i} \quad \text{pro } i, j = 1, 2; i \neq j$$

Tento velmi jednoduchý výraz vyjadřuje lineární závislost poptávky na hodnotě užítku. Za povšimnutí stojí, že poptávková funkce není závislá na ceně žádné z komodit.

Jde o tvar korespondující s Marshallovým vyjádřením poptávek, neboť po dosazení

$$(4.23) \quad {}^M x_1 = \frac{\beta_2 M}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1} \cdot \frac{\beta_1 p_2 + \beta_2 p_1}{\beta_1 \beta_2} \cdot {}^0u = \frac{{}^0u}{\beta_1} = {}^H x_1^*$$

4.4 Odmocninná užítková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být vhodně uplatněn jako užítková funkce, je funkce tvaru

$$(4.24) \quad u(\mathbf{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} + \dots + \beta_n \sqrt{x_n} \quad \beta_i > 0,$$

resp. ve zjednodušeném zápisu pro dvě komodity

$$(4.25) \quad u(\mathbf{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$$

Opět lze snadno ukázat, že odmocninná funkce je reálná konečná spojitá rostoucí a splňující $u(\mathbf{0}) = 0$. Je také kvazikonkávní (a lineárně homogenní stupně 1/2).

Mezní užítky jsou rovny $u_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} > 0$, resp. $u_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} > 0$, mezní míra substituce je

$m_{12} = \frac{\beta_1 \sqrt{x_2}}{\beta_2 \sqrt{x_1}}$ a mění se tedy s polohou bodu v komoditním prostoru.

Poptávkové funkce odvodíme obvyklým způsobem, řešením následujících tří rovnic pro x_1, x_2, λ :

$$u_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1 \quad u_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2 \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

Některou z metod řešení soustavy lineárních rovnic (např. komparační s porovnáním a eliminací λ) získáme řešení pro x_1, x_2 a λ :

$$(4.26) \quad x_1 = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 \cdot (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)} \quad x_2 = \frac{\beta_2^2 p_1 M}{p_2 \cdot (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}$$

Z uvedených výrazů je patrné, že každá z obou poptávkových funkcí je lineární funkcí příjmu M a že poptávka je nepřímo závislá na její příslušné ceně. Z uvedených hledisek tedy lze odmocninnou funkci přijmout jako vhodnou pro popis (přinejmenším určité části) standardních užitkových situací.

Znázornění situace na obrázku [2D] představuje trojici indifferenčních křivek u^1, u^2, u^3 , které mají tu vlastnost, že jsou kvazikonkávni a přiléhají v konečných hodnotách k souřadnicovým osám. Každá z komodit je tedy plně substituovatelná konečným množstvím druhé komodity (stejně by tomu bylo i v n -rozměrném případě). Rovnovážný bod Q se nachází v místě dotyku výdajového omezení s indifferenční křivkou u^2 . Vychýlení z něho v kterémkoliv směru úsečky výdajového omezení vede vždy k nižší hladině užitku než u^2 .

Nyní vyšetříme kvazikonkávnost odmocninné užitkové funkce. K tomu stačí vypočítat determinant tvaru

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} \\ \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}} & -\frac{\beta_1}{4x_1^{3/2}} & 0 \\ \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}} & 0 & -\frac{\beta_2}{4x_2^{3/2}} \end{vmatrix}, \text{ protože}$$

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{2\sqrt{x_1}}; \quad u_2(x) = \frac{\beta_2}{2\sqrt{x_2}}; \quad u_{11}(x) = -\frac{1}{4}\beta_1 x_1^{-3/2}; \quad u_{22}(x) = -\frac{1}{4}\beta_2 x_2^{-3/2}; \quad u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Hodnota determinantu tedy je (pouze 2 ze 6 členů Sarusova rozvoje jsou nenulové)

$$-\frac{\beta_1^2}{4x_1} \cdot \left(-\frac{\beta_2}{4x_2^{3/2}}\right) - \frac{\beta_2^2}{4x_2} \cdot \left(-\frac{\beta_1}{4x_1^{3/2}}\right) = \frac{\beta_1 \beta_2}{16x_1 x_2} \cdot \left[\frac{\beta_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{\beta_2}{\sqrt{x_1}}\right] > 0 \text{ pro libovolná kladná } \beta_1, \beta_2.$$

Odmocninná užitková funkce je tedy kvazikonkávni.

Nepřímou užitkovou funkci $\Phi(p_1, p_2, M)$ získáme prostým dosazením nalezených poptávkových funkcí (v Marshallově tvaru) do užitkové funkce. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\Phi(p_1, p_2, M) &= \beta_1 \sqrt{\frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} + \beta_2 \sqrt{\frac{\beta_2 p_1 M}{p_2 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} \\
&= \beta_1^2 \sqrt{\frac{p_2 M}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} + \beta_2^2 \sqrt{\frac{p_1 M}{p_2 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}} \\
&= \sqrt{\frac{M}{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} \cdot \left[\beta_1^2 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \beta_2^2 \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \right]
\end{aligned}$$

nebo po vynásobení čitatele i jmenovatele výrazu v závorce $\sqrt{p_1 p_2}$ dále

$$(4.27) \quad \sqrt{\frac{M}{p_1 p_2}} \cdot \frac{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} = \sqrt{\frac{M}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}$$

Nyní odvodíme tvar výdajové funkce příslušné odmocninné uživatelské funkce. Vyjdeme z již vyvozené nepřímé uživatelské funkce, kde za obecný výraz $\Phi(p_1, p_2, M)$ dosadíme konkrétní hodnotu užítka 0u a obdobně (nyní hledaný tvar výdajové funkce $E(p_1, p_2, {}^0u)$) substituujeme z M. Postupně získáme

$$\begin{aligned}
{}^0u &= \sqrt{\frac{E(p_1, p_2, {}^0u)}{p_1 p_2}} \cdot \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}, \text{ z čehož snadno určíme} \\
(4.28) \quad E(p_1, p_2, {}^0u) &= \frac{{}^0u^2 \cdot p_1 p_2}{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}.
\end{aligned}$$

Jak patrně, tato výdajová funkce je nezáporná (pro libovolné hodnoty parametrů β_1, β_2), nulová pouze při ${}^0u = 0$ a rostoucí (s druhou mocninou) 0u .

Nyní přistoupíme k ilustraci odvození poptávkových funkcí zprostředkovaně, z nepřímé uživatelské, resp. výdajové funkce. Z nepřímé uživatelské funkce spočteme poptávkové funkce pomocí Royovy identity.

Výpočtem derivací dostaneme

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1} = \frac{\sqrt{M}}{2 p_1 p_2} \cdot \frac{(\beta_2^2 \sqrt{p_1 p_2} - (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1) \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}})}{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}} = \frac{-\beta_1^2 p_2^{1/2} \sqrt{M}}{2 \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1} p_1^{3/2}} \text{ a podobně,}$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M} = \frac{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}}{2 \sqrt{M} \sqrt{p_1 p_2}}, \text{ a tedy dosazením do Royovy identity}$$

$$x_1^{*M} = - \frac{\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1}}{\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M}} = - \frac{\frac{-\beta_1^2 p_2^{1/2} \sqrt{M}}{2 \sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1} p_1^{3/2}}}{\frac{\sqrt{\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1}}{2 \sqrt{M} \sqrt{p_1 p_2}}} = \frac{\beta_1^2 M p_2}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}, \text{ což zřejmě odpovídá}$$

prvému z výrazů uvedených v (4.26). Výraz pro x_2^{*M} bychom odvodili obdobně; obdrželi bychom druhý výraz v (4.26). Jak patrně, Marshallovská poptávková funkce je přímo úměrná příjmu spotřebitele M a současně je klesající se čtvercem ceny p_1 příslušné komodity.

Alternativně můžeme však získat také poptávkové funkce v Hicksově pojetí. K tomu uplatníme Shephardovo lemma. Dle něho

$$x_1^{*H} = \frac{\partial E({}^0u, \mathbf{p})}{\partial p_1} = \frac{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1) {}^0u^2 p_2 - {}^0u^2 p_1 p_2 \beta_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} \quad \text{a po úpravě}$$

$$(4.29) \quad x_1^{*H} = \frac{\beta_1^2 {}^0u^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2}.$$

Hicksovská poptávková funkce je tedy rostoucí se čtvercem hladiny užítku 0u a klesající s růstem ceny p_1 .

Abychom mohli porovnat oba tvary poptávkových funkcí (Hicksův a Marshallův), stačí např. dosadit do výrazu pro x_1^{*M} za $M = E({}^0u, p_1, p_2)$: Dostaneme

$$x_1^{*M} = \frac{\beta_1^2 p_2 {}^0u^2 p_1 p_2}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} = \frac{\beta_1^2 {}^0u^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} = x_1^{*H} \quad \bar{1}.$$

Obdobně bychom mohli postupovat i obráceně. Za 0u dosadíme výraz pro nepřímou užítkovou funkci $\Psi(p_1, p_2, M)$:

$$(4.30) \quad x_1^{*H} = \frac{\beta_1^2 p_2^2}{(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{M(\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)}}{\sqrt{p_1 p_2}} \right)^2 = \frac{\beta_1^2 p_2 M}{p_1 (\beta_1^2 p_2 + \beta_2^2 p_1)} = x_1^{*M}$$

4.5 Logaritmičká užítková funkce

Dalším funkčním tvarem, který může být vhodně uplatněn jako užítková funkce je logaritmičká funkce

$$(4.31) \quad u(x_1, x_2) = \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2,$$

u níž předpokládáme – za účelem obou kladných mezních užítků splnění podmínky $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Funkční tvar opět neobsahuje aditivní konstantu, abychom dosáhli požadavku $u(0,0) = 0$. Mezní užítky, které použijeme k výpočtu poptávkových funkcí jsou zřejmě

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1}; \quad u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2};$$

takže souřadnice rovnovážného bodu dostaneme řešením tří jednoduchých rovnic pro x_1, x_2, λ :

$$u_1 = \frac{\beta_1}{x_1} = \lambda p_1 \quad u_2 = \frac{\beta_2}{x_2} = \lambda p_2 \quad \text{a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

Jednoduchými úpravami $p_1 x_1 = \beta_1 / \lambda$, resp. $p_2 x_2 = \beta_2 / \lambda$ a dosazením do rozpočtového omezení dostaneme $\beta_1 + \beta_2 = \lambda M$ neboli $\beta_1 / M + \beta_2 / M = \lambda$ a odtud již snadno poptávky po obou komoditách jako

$$(4.32) \quad x_1^{*M} = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2)p_1}, \quad x_2^{*M} = \frac{\beta_2 M}{(\beta_1 + \beta_2)p_2},$$

Ověření, zda je (dvoufaktorová) logaritmická užitková funkce kvazikonkávní, je velmi snadné. Hicksovy podmínky stability zde mají tvar

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta_1}{x_1} & \frac{\beta_2}{x_2} \\ \frac{\beta_1}{x_1} & -\frac{\beta_1}{x_1^2} & 0 \\ \frac{\beta_2}{x_2} & 0 & -\frac{\beta_2}{x_2^2} \end{vmatrix} > 0, \text{ protože}$$

$$u_1(x) = \frac{\beta_1}{x_1}; \quad u_2(x) = \frac{\beta_2}{x_2}; \quad u_{11}(x) = -\frac{\beta_1}{x_1^2}; \quad u_{22}(x) = -\frac{\beta_2}{x_2^2}; \quad u_{12}(x) = u_{21}(x) = 0.$$

Výpočet determinantu vede k hodnotě

$$|D| = -\left(\frac{\beta_1}{x_1}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_2}{x_2^2}\right) - \left(\frac{\beta_2}{x_2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta_1}{x_1^2}\right) = \frac{\beta_1 \beta_2}{x_1 x_2} \cdot \left[\frac{\beta_1}{x_2} + \frac{\beta_2}{x_1}\right], \text{ která je evidentně (při}$$

přijatých předpokladech $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$) pro kladné objemy komodit x_1, x_2 kladná.

Dále odvodíme tvar nepřímé užitkové funkce. Použijeme k tomu prostě dosazení poptávkových funkcí v Marshallově tvaru do přímé užitkové funkce $u(x^*)$. Tedy

$$(4.33) \quad \Phi(p_1, p_2, M) = \beta_1 \log \frac{\beta_1 M}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \log \frac{\beta_2 M}{p_2(\beta_1 + \beta_2)},$$

kterýžto výraz lze vyjádřit v několika dalších ekvivalentních tvarech, např.

$$\Phi(p_1, p_2, M) = \beta_1 + \log \beta_1 + \beta_2 \log \beta_2 - (\beta_1 + \beta_2) \log(\beta_1 + \beta_2) + \beta_1 \log \frac{M}{p_1} + \beta_2 \log \frac{M}{p_2}, \text{ neboli}$$

$$(4.34) \quad \Phi(p_1, p_2, M) = C + \beta_1 \log \frac{M}{p_1} + \beta_2 \log \frac{M}{p_2}, \text{ kde}$$

konstanta C závisí jen na parametrech (přímé) užitkové funkce.

Všimněme si, že nepřímá užitková funkce je (nehledě na aditivní konstantu C) rovněž logaritmická (v argumentech $\frac{M}{p_1}$ a $\frac{M}{p_2}$). Je dle očekávání rostoucí při rostoucím příjmu M a naopak klesající v obou

cenách p_1, p_2 .

Její derivace použijeme níže při výpočtech poptávek pomocí *Royovy identity*:

Derivace nepřímé užitkové funkce podle ceny p_1 má tvar

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1} = \beta_1 \frac{p_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 M} \cdot \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2)(-p_1^2)} = -\frac{\beta_1}{p_1}; \quad \text{stejně tak} \quad \frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_2} = -\frac{\beta_2}{p_2},$$

Derivace podle příjmu M obdržíme jako

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M} = \beta_1 \frac{p_1(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 M} \cdot \frac{\beta_1}{p_1(\beta_1 + \beta_2)} + \beta_2 \frac{p_2(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2 M} \cdot \frac{\beta_2}{p_2(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{M}.$$

Odtud je mj. patrné, že derivace podle cen jsou obě záporné, zatímco derivace dle příjmu M nabývá kladné hodnoty. Můžeme spočítat ještě druhé derivace

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1^2} = \frac{\beta_1}{p_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M^2} = -\frac{(\beta_1 + \beta_2)}{M^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_2^2} = \frac{\beta_2}{p_2^2},$$

z nichž je vidět, že druhé derivace podle cen jsou kladné, zatímco druhá partiální derivace dle příjmu je záporná.

Získané hodnoty 1. partiálních derivací můžeme použít k výpočtu *Marshallovských poptávek* pomocí *Royovy identity*. Máme

$$(4.35) \quad X_1^{*M} = \frac{-\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial p_1}}{\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, M)}{\partial M}} = -\frac{-\frac{\beta_1}{p_1}}{\frac{\beta_1 + \beta_2}{M}} = \frac{\beta_1 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_1}, \quad \text{ve shodě s prvním z výrazů v}$$

(4.36).

Analogicky obdržíme $X_2^{*M} = \frac{\beta_2 M}{(\beta_1 + \beta_2) p_2}$, opět ve shodě s druhou poptávkovou funkcí v (4.16).

Nyní můžeme přistoupit k vyvození výdajové funkce $E(p_1, p_2, {}^0u)$: Nejprve přepíšeme nepřímou užitkovou funkci do tvaru

$$(4.37) \quad \Phi(p_1, p_2, M) = C + \log(\beta_1 + \beta_2)M - \log p_1^{\beta_1} - \log p_2^{\beta_2}.$$

Nyní provedeme substituce

$\Phi(p_1, p_2, M) = {}^0u$ (pevná hodnota) a naopak $M = E(p_1, p_2, {}^0u)$ (výdajová funkce s argumenty ceny a hladina užitku) neboli

$${}^0u = C + (\beta_1 + \beta_2) \log E(\mathbf{p}, {}^0u) - \log p_1^{\beta_1} - \log p_2^{\beta_2}, \quad \text{což dává}$$

$$\log E(\mathbf{p}, {}^0u) = \frac{{}^0u - C + \log p_1^{\beta_1} + \log p_2^{\beta_2}}{\beta_1 + \beta_2} \quad \text{a dále po úpravách}$$

$$\log E(\mathbf{p}, {}^0u) = \frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2} + \frac{\log(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}) - \log\left(\frac{\beta_1^{\beta_1} \beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2}}\right)}{\beta_1 + \beta_2}$$

$$\log E(\mathbf{p}, {}^0u) = \frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2} + \frac{\log\left[\left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2} (\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2}\right]}{\beta_1 + \beta_2}$$

a po odlogaritmování obdržíme

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{p}, {}^0u) &= \exp\left\{\frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{\log\left[(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]}{\beta_1 + \beta_2}\right\} \\
(4.38) \quad &= \exp\left\{\frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2}\right\} \cdot \exp\left\{\log\left[(\beta_1 + \beta_2)^{\beta_1 + \beta_2} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]^{\frac{1}{\beta_1 + \beta_2}}\right\} \\
E(\mathbf{p}, {}^0u) &= e^{\frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2}} \cdot (\beta_1 + \beta_2) \cdot \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}}
\end{aligned}$$

Povšimněme si, že výdajová funkce (příslušná logaritmické uživatkové funkci) vykazuje exponenciální růst ve vztahu k užtku 0u a má mocninný tvar vzhledem k cenám p_1, p_2 .

Hicksův tvar poptávkových funkcí získáme prostřednictvím Shephardova lemmatu následovně:

$$\begin{aligned}
(4.39) \quad x_1^{*H} &= \frac{\partial E(p_1, p_2, {}^0u)}{\partial p_1} = e^{\frac{{}^0u}{\beta_1 + \beta_2}} (\beta_1 + \beta_2) \left(\frac{p_2}{\beta_2}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}} \left(\frac{p_1}{\beta_1}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}} \frac{\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2)} \\
&= \frac{E(p_1, p_2, {}^0u)\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2)p_1}
\end{aligned}$$

resp. po dosazení $E(\mathbf{p}, {}^0u) = M$ je $x_1^{*H} = \frac{M\beta_1}{(\beta_1 + \beta_2)p_1} = x_1^{*M}$, což dokumentuje formální shodu s již vyvozenými Marshallovskými poptávkovými funkcemi.

V Hicksově tvaru zaznamenáváme dle očekávání růst poptávky po dané komoditě s růstem hladiny užitku – závislost je exponenciální, intenzita růstu pak nepřímě úměrná součtu parametrů $\beta_1 + \beta_2$.

Tatáž poptávka klesá s růstem ceny p_1 : mocnina u p_1 je (s ohledem na přítomnost této ceny též ve výdajové funkci) rovna $\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} - 1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} < 0$.

Analogicky bychom dostali poptávku po druhém statku jako

$$(4.40) \quad X_2^{*H} = \frac{E(p_1, p_2, {}^0u)\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)p_2}.$$