REKURSÍVNÍ EKONOMETRICKÝ MODEL

jako zvláštní tvar obecné interdependentní soustavy regresních rovnic

Rekursívní model je zvláštní (ne však výjimečná) **forma ekonometrického modelu charakteristická tím, že :**

- tvar matice B vztahů propojujících běžné endogenní proměnné odpovídá situaci, kdy vhodné seřazení modelových rovnic umožní zápis modelu ve tvaru, v němž běžná endogenní proměnná přítomná jako vysvětlující v uvažované rovnici může být vysvětlována pouze v některé z rovnic, které ji předchází

a současně kdy

- v matici Σ se nepřipouští korelace náhodných složek v různých rovnicích modelu *(ani v témže čase)*.

Formálně vyjádřeno, v (ryze) rekursívním modelu platí restrikce :

a) matice B koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným je dolní (resp. horní) **trojúhelníková, tj . platí pro ni $\beta_{jk} = 0$ pro j < k.**

b) matice Σ kovarianční matice náhodných složek soustavy, pro niž platí Cov ($u_{t.}$ u_{s}) = δ_{ts}. Σ je diagonální. Připouští se tedy "*heteroskedasticita*", nikoliv "*korelovanost*" náhodných složek *(v témže čase)* v různých rovnicích .

Obě podmínky a), b) souhrnně **vyjadřuje schéma :**

$$
B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \dots & \beta_{mm} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}
$$

kde β_{jk} je regresní koeficient mezi j-tou a k-tou běžnou endogenní proměnnou (s vhodným normováním b_{jj} = 0 nebo -1 podle zápisu strukturního tvaru) ,

σ_{jj} je rozptyl náhodné složky j-té rovnice. (j, k = 1,2,..., m)

Poznámka 1 Některé z prvků b_{jj} mohou být rovněž nulové (není podmínkou, aby se v j-té rovnici nutně vyskytovaly všechny vysvětlující běžné endogenní proměnné z předchozích rovnic)

Poznámka 2 Obě podmínky a), b) nemají stejnou povahu : podmínka a) je dána specifikací (běžných endogenních) proměnných v modelových rovnicích (a skutečnost, zda je v souladu s realitou, není testovatelná na základě dat statistického vzorku), zatímco podmínka b) může být konfrontací se statistickými daty prověřena vcelku snadno pomocí vhodného odhadu matice Σ (např. na základě *2SLS*-reziduí) .

Vlastnost dolní triangularity matice B, implikující tutéž vlastnost u matice I-B, znamená, že v první rovnici modelu (po seřazení) se kromě vysvětlované běžné endogenní proměnné vyskytují již predeterminované proměnné. Ve druhé (pro $y_{.2}$) rovnici se může na pravé straně jako vysvětlující kromě kterýchkoliv predeterminovaných proměnných vyskytovat již jen běžná endogenní proměnná $y_{.1}$ vysvětlovaná v prvé rovnici, ve třetí rovnici (pro $y_{.3}$) mohou být jako vysvětlující z běžných endogenních zastoupeny jen proměnné $y_{.1}$, $y_{.2}$ atd.

Lze ukázat, že **v (ryze) rekursívním modelu (s vlastnostmi a) , b)) jsou běžné endogenní proměnné vystupující jako vysvětlující v r-té rovnici tzn. $y_{.1}$, $y_{.2}$, ... , $y_{.r-1}$ z předchozích rovnic nekorelované s náhodnou složkou r-té rovnice $\varepsilon_{.r}$. Ze statistického hlediska mají pak tyto proměnné v r-té rovnici povahu v podstatě proměnných predeterminovaných.**

Ne každý ekonometrický model lze přečíslováním rovnic převést na model rekursívního typu, protože v řadě případů v ekonomické realitě se projevující zpětné vazby mezi endogenními proměnnými neumožňují vyjádřit matici B v požadované formě (nemluvě o restrikci z podmínky b) . Častěji se lze setkat s volnějším projevem této vlastnosti, kterou je tzv. *bloková rekursivita*.

BLOKOVĚ REKURSÍVNÍ EKONOMETRICKÝ MODEL

Blokově rekursívní model **je rovněž zvláštní (přitom nijak výjimečná) forma ekonometrického modelu, která je charakteristická tím, že model může být přeskupením rovnic převeden do tvaru, v němž**

- *matice B* vztahů propojujících běžné endogenní proměnné má strukturu, že *všechny rovnice modelu lze (po případném přeskupení) zapsat ve tvaru, v němž žádná běžná vysvětlující běžná endogenní proměnná jednoho bloku není vysvětlována rovnicemi, která jsou obsahem následujícího bloku a*

současně kdy

***- v matici Σ se nepřipouští autokorelace náhodných složek v rovnicích různých bloků* tohoto *modelu*. *(v témže čase)*.**

Formálně vyjádřeno, platí podmínky:

c) <u>matice B</u> koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným je horní resp. dolní **<u>blokově trojúhelníková</u>**

d) <u>matice Σ</u> kovarianční matice náhodných složek soustavy, pro niž platí Cov ($\varepsilon_{t.}$ $\varepsilon_{s.}$) = δ_{ts}. Σ je blokově diagonální, tzn. na její diagonále jsou bloky (obecných symetrických, pozitivně definitních**) matic Σ**

Obě podmínky c), d) vyjadřuje schéma :

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1} & B_{n2} & B_{n3} & \ldots & B_{nn} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{22} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_{33} & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \Sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Každá z *n* čtvercových matic B_{kk} ležících na "diagonále" matice B je regulární matice rozměrů s_k x s_k s příslušně normovanými diagonálními prvky. Na ostatní matice B_{jk} rozměrů s_j x s_k nejsou kladeny žádné podmínky.

Každá z n čtvercových symetrických **matic Σ_{kk} ležících na "diagonále"** (pozitivně definitní, symetrické) **kovarianční matice Σ má rozměry rovněž s_k x s_k , tyto matice** však **nemusí být diagonální . Členění matic B a Σ na bloky si** přirozeně **musí odpovídat.**

Znamená to tedy, že v rámci kteréhokoliv j-tého bloku (j = 1,2,..., n) mohou být vztahy mezi proměnnými modelu "zcela libovolné" (chápáno ve smyslu podmínek "*interdependentního submodelu*") , zatímco vztahy modelových proměnných mezi různými bloky se řídí pravidly *rekursívního* modelu.

V případě *blokové rekursivity* (s vlastnostmi c) , d)) se běžné endogenní proměnné r-tého bloku chovají jako běžné endogenní proměnné r-té rovnice v případě *ryzí rekursivity*. Dá se ukázat, že proměnné $y_{.1}, y_{.2}, \ldots, y_{s_1+\ldots+s_2+\ldots+s_r-1}$ jsou nekorelované s náhodnými složkami *r*-té podsoustavy (bloku) rovnic. To lze interpretovat tak, že v r-té podsoustavě může být na vysvětlující běžné endogenní proměnné obsažené v předchozích *r-1* blocích nahlíženo jako na proměnné ze statistického hlediska víceméně "*predeterminované*".

Dopad ryzí resp. blokové rekursivity na odhadové metody

<u>*A) v případě rekursívního modelu*</u> *:* V rekursívním modelu lze *konzistentní* odhady parametrů pořídit prostou metodou nejmenších čtverců OLS, pokud rovnice odhadujeme v pořadí "s hierarchicky narůstajícím počtem běžných endogenních proměnných", tzn. výpočet zahájíme s rovnicí neobsahující žádnou běžnou endogenní proměnnou jako vysvětlující, poté kvantifikujeme rovnici s jednou vysvětlující běžnou endogenní proměnnou atd.
Přínos odhadových metod *2SLS*, *ILS* a *IV* se neuplatní, metody *3SLS* a *FIML* však poskytnou konzistentní a **asymptoticky vydatnější odhad než *OLS*.**

<u>*B) v případě blokově rekursívního modelu*</u> *:* V modelu tohoto typu *nelze* sice ***prostou metodou nejmenších čtverců OLS získat konzistentní odhady parametrů,*** avšak **v případě nasazení metod vhodných pro odhad simultánních soustav regresních rovnic** (2SLS, IV, 3SLS, LIML apod.) **není třeba <u>*současně*</u> odhadovat parametry všech rovnic, nýbrž s každým blokem lze zacházet jako s "*parciálním*"** menším ***interdependentním* modelem, v rámci něhož lze kvantifikaci kteroukoliv z těchto metod provést samostatně. Může se zde navíc projevit příznivý dopad** této modelové struktury **v tom, že** (zvláště u modelů s několika desítkami rovnic) **lze odhad provést "kvalitněji" *s ohledem na menší pravděpodobnost výskytu multikolinearity, nižší míry autokorelace, uchování podstatně většího počtu stupňů volnosti*** (a tedy spolehlivějších výsledků testovacích postupů) **ve srovnání s kvantifikací celého modelu, která by byla např. pro případ *T < q* klasickými postupy nerealizovatelná.**

Identifikace v rekursívním ekonometrickém modelu :

A) V *obecném interdependentním* modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů ***(uvažujeme situaci, do které nevkládáme restrikce vyplývající z omezení položených na strukturní parametry) :***

počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků (obecné) matice B (*s normovanou diagonálou*) tj. m.(m-1)

počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (obecné) matice C = m.q.

počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek strukturního tvaru = počet prvků (*symetrické, pozitivně definitní*) matice Σ = (m+1)*m/2.

Neomezený strukturní tvar má tedy m . [m.q + (m-1)/2] neznámých parametrů.

B) Naproti tomu redukovaný tvar modelu obsahuje tyto počty parametrů :

počet parametrů redukovaného tvaru = počet prvků (obecné) matice Π tj. m . q

počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní matice Ω = (m+1)*m/2.

Neomezený redukovaný tvar má tedy m.[q + (m+1)/2] neznámých parametrů.

Informace obsažené v parametrech *neomezeného redukovaného tvaru* je tedy méně (o m-1 parametrů) než v parametrech *neomezeného strukturního tvaru* *(u vícerovnicového modelu vždy platí, že m > 1).*

Poznámka : Odtud je mj. vidět, že **omezení vkládaná na parametry strukturního tvaru mohou tuto disproporci snížit, popř. ji úplně odstranit. Tím dosáhneme identifikovanosti modelu nebo (aspoň) identifikovanosti** některé **strukturní rovnice.**

C) V *rekursívním* ekonometrickém modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů :

počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků matice B (s nulovými prvky v horním/dolním trojúhelníku a s normovanou diagonálou) tj. m . (m-1)/2

počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (*obecné*) matice C = m.q.

počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (*symetrické pozitivně definitní*) *diagonální* matice Σ = m.

Dohromady má strukturní tvar rekursívního modelu m.[q+(m+1)/2] neznámých parametrů, tedy přesně tolik, kolik je parametrů redukovaného tvaru.

Počet parametrů redukovaného tvaru (i při respektování restrikcí přenesených z omezení na parametry strukturního tvaru) je nezměněný, tj. je roven počtu m. [q + (m+1)/2]

<u>Poznámka</u> : Počet parametrů (*neomezeného*) redukovaného tvaru je tedy u modelu rekursívního typu roven počtu parametrů (*neomezeného*) strukturního tvaru.

Celkem tedy je předmětem odhadu $m \times (m-1) + m \times q + m = m(m/2 + q + 1/2)$ strukturních parametrů rekursívního modelu. Tento počet je přesně shodný s počtem parametrů redukovaného tvaru modelu. Nejsou-li tedy mezi parametry modelu zavedena další omezení, lze zpětně každý parametr strukturního tvaru určit jednoznačně z (odhadnutých) parametrů redukovaného tvaru.