OBECNÁ **METODA INSTRUMENTÁLNÍCH PROMĚNNÝCH**
(G)IV (General **Instrumental Variables method)**

v soustavě simultánních regresních rovnic

Metoda instrumentálních proměnných **je jistým zobecněním dvoustupňové metody nejmenších čtverců 2SLS. Poskytuje, stejně jako 2SLS, vždy** (přinejmenším) **konzistentní odhady strukturních parametrů regresních rovnic v interdependentních ekonometrických modelech.**

Základní motivací metody je nalézt určité pomocné proměnné - tzv. ***instrumentální proměnné*** **- které sehrají stejnou úlohu , jako má transformace $R^{-1}X'$ při odvození odhadové funkce 2SLS** (viz druhý postup odvození 2SLS)

Hledají se tedy takové proměnné - jejich matici ve vztahu k i-té rovnici označme jako P_i - které budou vyhovovat vztahu

$$P_i' y_i = P_i' W_i . \delta_{.i} + P_i' \varepsilon_i \quad , \text{ kde } \quad W_i = (Y_i, X_i) \ ; \quad \delta_{.i} = (\beta_{.i}', \gamma_{.i}')'$$

a přitom takové, že

a) **budou nekorelované s náhodnými složkami i-té strukturní rovnice**
b) **budou co nejvíce korelované s vysvětlujícími proměnnými i-té rovnice**

Podmínka a) je nutná k tomu, aby byl odhad takto pořízený konzistentní.
Podmínka b) je potřebná k tomu, aby proměnné-instrumenty zastupující vysvětlující veličiny v rovnici je nahrazovaly co nejvýstižněji

Z podmínek je zřejmé, že instrumentální proměnné lze vybírat (pouze) **z predeterminovaných proměnných modelu** (běžné endogenní jsou korelované s náhodnými složkami). Problém nespočívá v tom, čím nahradit v i-té rovnici přítomné predeterminované proměnné, ale čím nahradit přítomné běžné endogenní veličiny).

Zbývá tedy provést co nejvhodnější výběr z predeterminovaných proměnných modelu. Je tedy zřejmé, že instrumentální proměnné budou definované pomocí maticového vztahu

$$P_i = X.A_i \quad , \text{ kde}$$

A_i je určující matice definující instrumentální proměnné (matice tzv.instrumentů)
P_i je matice instrumentálních proměnných pro i-tou rovnici
(**X** je matice všech predeterminovaných proměnných modelu) .

Volba instrumentálních proměnných (matice P_i) je tedy rovnocenná určení matice instrumentů A_i. Index příslušnosti k rovnici lze vynechat, pokud pro odhad každé rovnice modelu použijeme tutéž skupinu instrumentálních proměnných (je to obvyklé, nikoliv nutností). V tomto případě bychom psali

$$P = X.A \quad , \text{ kde}$$

A je matice instrumentů definujících instrumentální proměnné pro odhad parametrů všech rovnic.

Z požadavků, které byly na instrumenty položeny, plyne, že IV-odhadová funkce strukturních parametrů modelu **má tvar**

$$_{IV}\hat{\delta}_{.i} = (P_i' W_i)^{-1} . P_i' y_{.i} = (P_i' W_i)^{-1} . P_i' (W_i . \delta_{.i} + \varepsilon_i) = \delta_{.i} + (P_i' W_i)^{-1} . P_i' \varepsilon_{.i}$$

Poznámka: **podmínkou existence IV-estimátoru je, aby byly existovala inverzní matice k matici $P_i'_{[q,T]}.W_{i[T;m_i+q_i]}$ K tomu je opět přinejmenším nutné , aby byla splněna podmínka $m_i + q_i = q$: jinak by matice $P_i'_{[q,T]}.W_{i[T;m_i+q_i]}$ nemohla být ani čtvercová (tím méně ne regulární).**[1] (obvykle předpokládáme $q \le T$)

Vlastnosti IV-odhadové funkce:

Lze ukázat, že **IV-estimátor strukturních parametrů modelu má tyto vlastnosti** :

1) Odhady parametrů $\delta_{.i}$ (tj. $\beta_{.i}, \gamma_{.i}$) jsou konzistentní, neboť platí

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}\,\hat{\delta}_{.i} - \delta_{.i} = \underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}\,(P_i'W_i/T)^{-1}.\underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}(P_i'\varepsilon_{.i}/T) = 0$$

v důsledku (asymptotické) nekorelovanosti proměnných ***P***P_i a náhodných složek ε_i

2) Odhady parametrů $\delta_{.i}$ i (neboli $\beta_{.i}, \gamma_{.i}$) nejsou nestranné, protože

$$E\hat{\delta}_{.i} = E[\delta_{.i} + (P_i'W_i)^{-1}P_i'\varepsilon_{.i}] = \delta_{.i} + E(P_i'W_i)^{-1}P'\varepsilon_{.i}$$

ale výraz E($P_i'W_i$) $^{-1}$ **$P_i'\varepsilon_{.i}$ $\neq$ E(P_i' W_i)** $^{-1}$ **E (P_i' $\varepsilon_{.i}$)** vzhledem k možné závislosti běžných endogenních proměnných přítomných ve **W_i** a náhodných složek ε_i **.**

3) Odhady parametrů $\delta_{.i}$ (tj. $\beta_{.i}, \gamma_{.i}$) nejsou, *až na výjimku, kdy metoda I V přechází v 2SLS,* obecně **vydatné** (ani v rámci metod s omezenou informací).

4) Odhady parametrů $\delta_{.i}$ (tj. $\beta_{.i}, \gamma_{.i}$ i) jsou (za stejných předpokladů (e), (f), (g), (h) jako u 2SLS) vždy **asymptoticky normální ,** tedy platí

$$\sqrt{T}.(\hat{\delta}_{.i} - \delta_{.i}) \approx N(0, \sigma_{ii}.\underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}\left[\left(\frac{P_i'W_i}{T}\right)^{-1}\left(\frac{P_i'P_i}{T}\right)\left(\frac{W_i'P_i}{T}\right)^{-1}\right]$$

Konzistentní odhad prvků ${}_{IV}\sigma_{ii}$ pro jednotlivé rovnice získáme obvyklým způsobem:

$${}_{IV}\hat{\sigma}_{ij} = \frac{{}_{IV}e_{.i}'\,{}_{IV}e_{.j}}{T}$$

, kde za rezidua $e_{.i}$, $e_{.j}$ vezmeme odhady náhodných složek $\varepsilon_{.i}, \varepsilon_{.j}$ získané metodou IV.

Je tedy zřejmé, že otázka nejlepšího výběru (poskytujícího nejvydatnější IV-odhad) mezi různými IV-estimátory spočívá v optimální definici matice A. Jinými slovy, vyšetřujeme, **pro jakou volbu matice A nastává maximální možná korelace mezi instrumenty v A** (resp. mezi instrumentálními proměnnými v P) **a vysvětlujícími proměnnými i-té rovnice W_i ?**

[1] Počet instrumentů potřebných k odhadu i-té rovnice musí být tedy roven počtu vysvětlujících proměnných této rovnice. Podrobněji v části pojednávající o identifikačním problému.

Pro měření korelace mezi dvěma skupinami náhodných veličin (majících stejný počet pozorování) se užívá ***vektorový korelační koeficient*** definovaný jako*:*

$$r_C(W_i;P_i) = (-1)^{m_i+q_i}.\frac{\begin{vmatrix} 0 & W_i'P_i \\ P_i'W_i & P_i'P_i \end{vmatrix}}{|W_i'W_i|.|P_i'P_i|} = \frac{|(W_i'P_i)(P_i'P_i)^{-1}(P_i'W_i)|}{|W_i\ W_i|}$$

Hodnota tohoto koeficientu se pohybuje mezi 0 (nezávislost) a 1 (přesná závislost) .

Výraz, který v kovarianční maticí IV-estimátoru $(P_i{}'W_i\ /T)^{-1})\ (P_i{}'P_i/T)\ (\ W_i{}'P_i\ \ /T)^{-1}$ v sobě obsahuje fragment výrazu pro tzv. *zobecněný rozptyl*. Ten je definován jako

$$\left|\mathrm{GVar}\,\hat{\delta}_{.i}\right| = \sigma_{ii}^{m_i+q_i}.\left|(P_i'W_i)^{-1}.(P_i'P_i).(W_i'P_i)^{-1}\right|$$

Mezi vektorovým korelačním koeficientem a zobecněným rozptylem platí tedy vztah

$$\left|\mathrm{GVar}\,\hat{\delta}_{.i}\right| = \frac{\sigma_{ii}^{m_i+q_i}}{|W_i'W_i|}.(r_c(W_i;P_i))^{-1}$$, z čehož je patrné, že

pro taková P_i, pro která je minimalizována hodnota $\left|\mathrm{GVar}\hat{\delta}_{.i}\right|$ je právě maximalizována korelace mezi W_i a P_i.

Vyšetříme, kdy taková korelace nabude maximální možné hodnoty; v tomto případě poskytne IV-odhadová funkce $\delta_{.i}$ nejvydatnější odhad. Lze přitom ukázat, že platí :

$$r_c(W_i,P) = r_c(W_i,X).$$

Znamená to tedy, že nemůže být překročena horní hranice daná (vektorovou) korelací mezi množinou instrumentálních proměnných a množinou všech predeterminovaných proměnných.

Této **maximální korelovanosti je dosaženo pro volbu** $A = (X'X)^{-1}X'W_I$

Při této volbě matice A dostaneme :

$P = X.A = X(X'X)^{-1}X'W_i = [X(X'X)^{-1}X'Y_i;X(X'X)^{-1}X'X_i] = [X\hat{\Pi}_i;X_i]$ **Pak je IV-odhadová funkce rovna**

$${}_{IV}\hat{\delta}_{.i} = (P'W_i)^{-1}P'y_{.i} =$$

$$\begin{pmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i \\ X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \\ X_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \end{pmatrix} = {}_{2SLS}\hat{\delta}_{.i}$$

Znamená to tedy, že :

1) 2SLS-odhadová funkce je speciálním případem IV-odhadové funkce při volbě matice instrumentů jako $A = (X'X)^{-1}X'W_{.i}$

2) 2SLS-odhadová funkce poskytuje ve srovnání s jakoukoliv jinou volbou matice A nejvydatnější odhad. tj. ve smyslu asymptotické vydatnosti je 2SLS-odhadová funkce dominantní vůči všem ostatním IV-estimátorům.

Skutečnost, že aplikací techniky IV nelze překonat metodu 2SLS může být jistým zklamáním. V nelineárních modelech tomu tak není, zde můžeme za instrumenty vzít též nelineární kombinace z predeterminovaných proměnných. Ani *NL2S* estimátor (nelineární dvoustupňová metoda nejmenších čtverců) není zde definován jednoznačně : existují např. *BNL2S* (best) a *MNLS* (minimal) estimátor .

Počet instrumentálních proměnných *n* musí být v rozmezí mezi $m_i + q_i$ a q, tedy

$$m_i + q_i \le n \le q$$

a) Pokud uplatníme *instrumentální proměnné v maximálním možném počtu q* tj. jako všechny predeterminované proměnné, pak
- **využijeme maximum informace obsažené v modelových proměnných, což povede k vydatnému odhadu** , ale
- **budeme pracovat s obsažnějšími maticemi a případně nižší spolehlivostí výsledku**

Pokud uplatníme *instrumentální proměnné v minimálním přípustném počtu* $m_i + q_i$

tj. jako výběr $m_i + q_i$ predeterminovaných proměnných, pak
- **nevyužijeme všechnu potřebnou informaci obsaženou v modelových proměnných, což bude mít za následek méně kvalitní (byť konzistentní) odhadu , ale**
- **výpočet bude úspornější a počet stupňů volnosti modelu vyšší.**

Kompromisem může být vzetí instrumentálních proměnných v podobě lineární kombinace sestávající z prvních $m_i + q_i$ hlavních komponent momentové matice X'X.

<u>Při řešení konkrétních úloh se uplatňují tyto přístupy k volbě instrumentálních proměnných (*definujících matici A*):</u>

a) **prostý výběr počtu $m_i + q_i$ z celkem q predeterminovaných proměnných . Matice instrumentů bude zde mít tvar $A[q, m_i + g_i]$, přičemž v této obdélníkové matici budou jedničkové prvky pouze v hlavní "pseudodiagonále" $a_{ii}, i = 1,2,...,m_i + q_i$.**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0. & ..... & 0 \end{pmatrix}$$

U predeterminovaných proměnných, které jsou vzaty jako instrumentální, je v příslušném *sloupci* A_1 jednička – vynechávaným odpovídají nulové sloupce.

b) **$m_i + q_i$–členná lineární kombinace složená z predeterminovaných proměnných**
V tomto případě má příslušná matice tvar

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1,m_i+q_i} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2,m_i+q_i} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .... & a_{3,m_i+q_i} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3}. & ..... & a_{q,m_i+q_i} \end{pmatrix}$$

Koeficienty lineární kombinace jsou obsaženy ve *sloupcích* této matice.

c) prvních m_i+q_i hlavních komponent sestrojených z matice predeterminovaných proměnných

$$A_3 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \ldots & m_{1,m_i+q_i} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \ldots & m_{2,m_i+q_i} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \ldots. & m_{3,m_i+q_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{q1} & m_{q2} & m_{q3}. & \ldots.. & m_{q,m_i+q_i} \end{pmatrix}$$

Koeficienty této lineární kombinace (opět obsažené ve *sloupcích* matice A_3) představují prvky vlastních vektorů příslušných momentové matici $X'X$. Z celkem q hlavních komponent se omezujeme na „největších“ $m_i + q_i$ z nich.