Příklady z počtu pravděpodobnosti

Příklad 1.: Technická kontrola provádí třídění produkce závodu. Pravděpodobnost vyrobení zmetku je 0,05. Zmetek je kontrolou odhalen s pravděpodobností 0,97, kvalitní výrobek je mylně označen za zmetek s pravděpodobností 0,02. Výrobky, které byly kontrolou označeny za zmetky, se vyřazují. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, který

a) byl vyřazen, je zmetek
b) nebyl vyřazen, je zmetek
c) byl vyřazen, je kvalitní
d) nebyl vyřazen, je kvalitní?

Návod: Příklad 5 z POTu, příklad 6.8., příklady 10 a 11 z Kontrolních otázek a úkolů v 6. kapitole

Řešení:

H_1 … výrobek je zmetek, $P(H_1) = 0{,}05$
H_2 … výrobek je kvalitní, $P(H_2) = 0{,}95$
A … kontrola označí výrobek za zmetek, $P(A/H_1) = 0{,}97$, $P(A/H_2) = 0{,}02$
$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) = 0{,}05.0{,}97 + 0{,}95.0{,}02 = 0{,}0675$

ad a) $P(H_1/A) = \dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}05\cdot 0{,}97}{0{,}0675} = 0{,}7185$

ad b) $P(H_1/\overline{A}) = \dfrac{P(H_1)P(\overline{A}/H_1)}{1-P(A)} = \dfrac{0{,}05\cdot(1-0{,}97)}{1-0{,}0675} = 0{,}0016$

ad c) $P(H_2/A) = \dfrac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \dfrac{0{,}95\cdot 0{,}02}{0{,}0675} = 0{,}2815$

ad d) $P(H_2/\overline{A}) = \dfrac{P(H_2)P(\overline{A}/H_2)}{1-P(A)} = \dfrac{0{,}95\cdot(1-0{,}02)}{1-0{,}0675} = 0{,}9984$

Příklad 2.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém pokusu s pravděpodobností 0,2 a ve třetím pokusu s pravděpodobností 0,1.

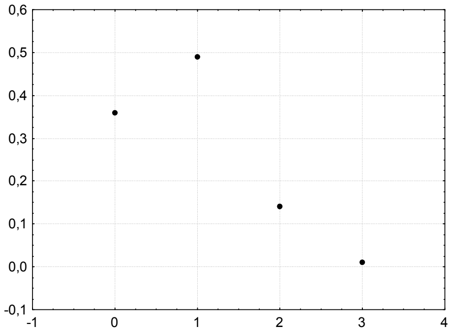
a) Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X, která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech a nakreslete její graf.
b) Vypočtěte střední hodnotu náhodné veličiny X.
c) Vypočtěte rozptyl náhodné veličiny X.
d) Jaká je pravděpodobnost, že nastane aspoň jeden úspěch?

Řešení:

ad a) Označme X_i počet úspěchů v i-tém pokusu, i = 1, 2, 3. X_i nabývá hodnot 0,1.
X nabývá hodnot 0, 1, 2, 3.

$$\pi(0) = P(X=0) = P((X_1=0 \wedge X_2=0 \wedge X_3=0)) = P(X_1=0)\cdot P(X_2=0)\cdot P(X_3=0) =$$
$$= 0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}36$$
$$\pi(1) = P(X=1) =$$
$$= P((X_1=1 \wedge X_2=0 \wedge X_3=0) \vee (X_1=0 \wedge X_2=1 \wedge X_3=0) \vee (X_1=0 \wedge X_2=0 \wedge X_3=1)) =$$
$$= P(X_1=1)\cdot P(X_2=0)\cdot P(X_3=0) + P(X_1=0)\cdot P(X_2=1)\cdot P(X_3=0) +$$
$$+ P(X_1=0)\cdot P(X_2=0)\cdot P(X_3=1) =$$
$$= 0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 + 0{,}5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9 + 0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1 = 0{,}36 + 0{,}09 + 0{,}04 = 0{,}49$$

$\pi(2) = P(X = 2) =$
$= P((X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 0) \vee (X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge X_3 = 1) \vee (X_1 = 0 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1)) =$
$= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 0) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) +$
$+ P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) =$
$= 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}14$
$\pi(3) = P(X = 3) =$
$= P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 1 \wedge X_3 = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 1) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$
Graf pravděpodobnostní funkce



ad b) $E(X) = 0.0{,}36 + 1.0{,}49 + 2.0{,}14 + 3.0{,}01 = 0{,}8$
$D(X) = 0^2.0{,}36 + 1^2.0{,}49 + 2^2.0{,}14 + 3^2.0{,}01 - 0{,}8^2 = 1{,}14 - 0{,}64 = 0{,}5$

ad c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \pi(0) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

Příklad 3.: Firma investovala do tří nezávislých projektů. Pravděpodobnost zisku z těchto projektů je 0,4, 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že firma bude mít zisk

a) právě jedenkrát (jev A)
b) alespoň jedenkrát (jev B)
c) právě dvakrát (jev C)
d) aspoň dvakrát (jev D)
e) ze všech tří projektů (jev E)
f) ze žádného projektu? (jev F)

Řešení:
Označme A_i jev, že firma bude mít zisk z i-tého projektu, i = 1, 2, 3.
ad a)
$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3) =$
$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 10^{-3}(60 + 90 + 210) = 0{,}36$
ad b)
$P(B) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$
ad c)
$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$
$= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 10^{-3}(60 + 140 + 210) = 0{,}41$
ad d)
$P(D) = P(C) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(C) + P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}41 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 =$
$= 0{,}41 + 0{,}14 = 0{,}55$
ad e)

$P(E) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$

ad f)

$P(F) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

Příklad 4.: V jedné dílně pracují nezávisle na sobě tři dělníci. Náhodná veličina X_i udává počet zmetků, které vyrobí i-tý dělník za jednu směnu, i = 1, 2, 3. Dlouhodobým pozorováním byly zjištěny hodnoty pravděpodobnostní funkce $\pi_i(x_i)$, i = 1, 2, 3.

1.dělník		2.dělník		3.dělník	
x_1	$\pi_1(x_1)$	x_2	$\pi_2(x_2)$	x_3	$\pi_3(x_3)$
0	0,01	0	0,09	0	0,00
1	0,52	1	0,63	1	0,41
2	0,36	2	0,28	2	0,52
3	0,11	3	0,00	3	0,07

a) Pomocí střední hodnoty počtu zmetků posuďte, který z dělníků podává nejlepší výkon.
b) Pomocí rozptylu počtu zmetků posuďte, který z dělníků podává nejvyrovnanější výkon.
c) Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu zmetků vyrobených v této dílně za jednu pracovní směnu?

Řešení:

ad a) $E(X_1) = 1{,}57$, $E(X_2) = 1{,}19$, $E(X_3) = 1{,}66$. Znamená to, že nejlepší výkon podává druhý dělník.

ad b) $D(X_1) = 0{,}4851$, $D(X_2) = 0{,}3339$, $D(X_3) = 0{,}3644$. Znamená to, že nejvyrovnanější výkon podává druhý dělník.

ad c) $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 1{,}57 + 1{,}19 + 1{,}66 = 4{,}42$,

$D(X_1 + X_2 + X_3) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = 0{,}4851 + 0{,}3339 + 0{,}3644 = 1{,}1834$

Příklad 5.:

a) Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahů při prvním, druhém a třetím výstřelu jsou 0,7, 0,8 a 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že střelec zasáhne terč aspoň jedenkrát? Návod: Příklad 6 b) z POTu.

b) Nechť náhodná veličina X má rozložení F(5,20). Najděte kvantil $F_{0,025}(2,10)$. Návod: Příklad 9.4. d).

c) Náhodná veličina X se řídí rozložením N(12, 16). Jaká je pravděpodobnost, že tato náhodná veličina se bude realizovat v intervalu $\langle 8,16 \rangle$? Návod: Příklad 8.9., věta 7.5. a), 4. vlastnost.

Řešení:

ad a) Jev A_i znamená zásah terče při i-tém výstřelu, i = 1, 2, 3. Počítáme

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$

ad b) $F_{0,025}(2{,}10) = \dfrac{1}{F_{0,975}(10{,}2)} = \dfrac{1}{39{,}398} = 0{,}02538$

ad c)

$$P(8 < X \le 16) = P\left(\frac{8-12}{\sqrt{16}} < \frac{X-12}{\sqrt{16}} \le \frac{16-12}{\sqrt{16}}\right) = P(-1 < U \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}84134 - 1 = 0{,}68262$$

Příklad 6.: Potřebu smrkových sazenic kryje lesní závod produkcí dvou školek. První školka kryje 75% výsadby, přičemž ze 100 sazenic je 80 první jakosti. Druhá školka kryje výsadbu z 25%, přičemž na 100 sazenic připadá 60 první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že

a) náhodně vybraná sazenice je první jakosti; (věta 6.7. (a), příklad 6.8. (a))
b) náhodně vybraná sazenice první jakosti pochází z produkce první školky; (věta 6.7. (b), příklad 6.8. (b))
c) náhodně vybraná sazenice první jakosti pochází z produkce druhé školky? (věta 6.7. (b), příklad 6.8. (b))

Řešení:

H_1 … sazenice pochází z 1. školky, $P(H_1) = 0,75$

H_2 … sazenice pochází z 2. školky, $P(H_2) = 0,25$

A … sazenice je 1. jakosti, $P(A/H_1) = 0,8$, $P(A/H_2) = 0,6$

ad a) $P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) = 0,75.0,8 + 0,25.0,6 = 0,75$

ad b) $P(H_1 / A) = \dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \dfrac{0,75 \cdot 0,8}{0,75} = 0,8$

ad c) $P(H_2 / A) = \dfrac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,6}{0,75} = 0,2$