Příklady z popisné statistiky

Příklad 1.:
a) V následující tabulce jsou uvedeny počty správně vyřešených příkladů u přijímací zkoušky z matematiky a jejich absolutní četnosti.

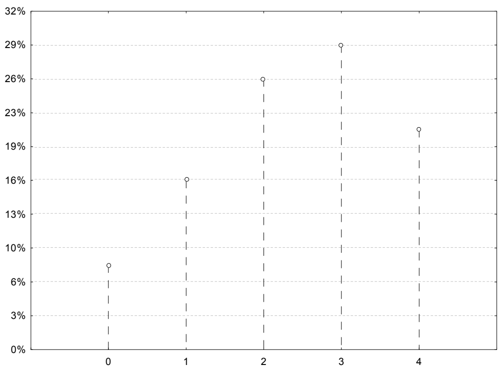
x_j	0	1	2	3	4
n_j	5	10	16	18	13

Sestavte variační řadu a nakreslete graf četnostní funkce a empirické distribuční funkce. (Návod: definice 2.4., příklad 2.5.)
b) Z datového souboru 1,4 9,9 0,2 9,9 9,6 4,1 2,3 0,9 4,8 7,6 1,9 1,0 3,1 8,1 4,5 3,9 0,3 2,8 0,5 3,6 vypočtěte medián a kvartilovou odchylku. (Návod: definice 3.4., příklad 3.5.)
c) Hodnoty znaku X mají aritmetický průměr -1 a rozptyl 0,5. Najděte aritmetický průměr a rozptyl hodnot znaku Y = -2 + 5X. (Návod: věta 3.18. (a), příklad 3.19.)

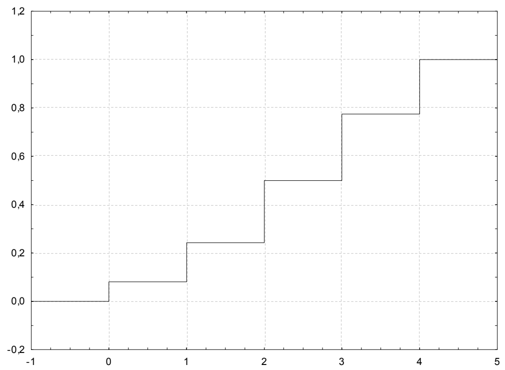
Řešení:
ad a) Variační řada

$x_{[j]}$	n_j	p_j	N_j	F_j
0	5	5/62	5	5/62
1	10	10/62	15	15/62
2	16	16/62	31	31/62
3	18	18/62	49	49/62
4	13	13/62	62	1

Graf četnostní funkce



Graf empirické distribuční funkce



ad b) Soubor uspořádáme podle velikosti:
0,2 0,3 0,5 0,9 1,0 1,4 1,9 2,3 2,8 3,1 3,6 3,9 4,1 4,5 4,8 7,6 8,1 9,6 9,9 9,9
Rozsah souboru n = 20.

Výpočet mediánu: nα = 20.0,5 = 10, $x_{0,50} = \dfrac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \dfrac{3{,}1 + 3{,}6}{2} = 3{,}35$.

Výpočet dolního kvartilu: nα = 20.0,25 = 5, $x_{0,50} = \dfrac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \dfrac{1{,}0 + 1{,}4}{2} = 1{,}2$.

Výpočet horního kvartilu: nα = 20.0,75 = 15, $x_{0,50} = \dfrac{x_{(15)} + x_{1(6)}}{2} = \dfrac{4{,}8 + 7{,}6}{2} = 6{,}2$.

Výpočet kvartilové odchylky: $q = x_{0,75} - x_{0,25} = 12{,}4 - 1{,}2 = 11{,}2$.

ad c) $m_1 = -1$, $s_1^2 = 0{,}5$, $m_2 = -2 + 5m_1 = -2 - 5 = -7$, $s_2^2 = 5^2\, s_1^2 = 25.0{,}5 = 12{,}5$.

Příklad 2.: Znak X udává délku praxe (v letech) a znak Y výšku prémií (v Kč) zaměstnanců jisté firmy. Dvourozměrné rozložení četností je dáno kontingenční tabulkou:

x	y						
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250
12,5	5	3	0	0	0	0	0
17,5	2	4	4	0	0	0	0
22,5	0	1	6	7	4	0	0
27,5	0	0	1	3	7	1	0
32,5	0	0	0	1	10	5	1

a) Sestavte kontingenční tabulky sloupcově a řádkově podmíněných relativních četností. (definice 2.7., příklad 2.9.)
b) Kolik procent pracovníků s délkou praxe 22,5 roku má prémie nanejvýš 2250 Kč? (příklad 2.9.)
c) Jaká je průměrná výše prémií?(definice 3.20.)
d) Stanovte modus a medián výše prémií. (definice 3.3, definice 3.4.)

Upozornění: Výsledky udávejte na tři desetinná místa.

Řešení:

Nejprve doplníme tabulku o marginální četnosti.

x	y							$n_{j.}$
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250	
12,5	5	3	0	0	0	0	0	8
17,5	2	4	4	0	0	0	0	10
22,5	0	1	6	7	4	0	0	18
27,5	0	0	1	3	7	1	0	12
32,5	0	0	0	1	10	5	1	17
$n_{.k}$	7	8	11	11	21	6	1	65

ad a)

Kontingenční tabulka sloupcově podmíněných relativních četností: $p_{j(k)} = \frac{n_{jk}}{n_{.k}}$

x	y						
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250
12,5	0,714	0,375	0	0	0	0	0
17,5	0,286	0,500	0,364	0	0	0	0
22,5	0	0,125	0,545	0,636	0,190	0	0
27,5	0	0	0,091	0,273	0,333	0,167	0
32,5	0	0	0	0,091	0,477	0,833	1,000

Kontingenční tabulka řádkově podmíněných relativních četností: $p_{(j)k} = \frac{n_{jk}}{n_{j.}}$

x	y						
	1250	1750	2250	2750	3250	3750	4250
12,5	0,625	0,375	0	0	0	0	0
17,5	0,200	0,400	0,400	0	0	0	0
22,5	0	0,056	0,333	0,389	0,222	0	0
27,5	0	0	0,083	0,250	0,584	0,083	0
32,5	0	0	0	0,059	0,588	0,294	0,059

ad b) Ve 3. řádku kontingenční tabulky řádkově podmíněných relativních četností sečteme čísla v 1., 2. a 3. sloupci: 0 + 0,056 + 0,333 = 0,389. Hledaný údaj je tedy 38,9%.

ad c) m = (7.1250 + 8.1750 + 11.2250 + 11.2750 + 21.3250 + 6.3750 + 4250)/65 = 172750/65 = 2657,70 Kč

ad d) Medián $y_{0,50} = y_{(33)}$ = 2750 Kč, modus = 3250 Kč

Příklad 3.: Je dán datový soubor 12 1,1 6,3 3,9 11 5,8 2,5 8 4,1 2 9,5 6,6 1,7 3,4 4,9 3 10,3 2,2 5,4 15,5. Stanovíme třídicí intervaly $\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 7,11\rangle, \langle 11,16\rangle$.

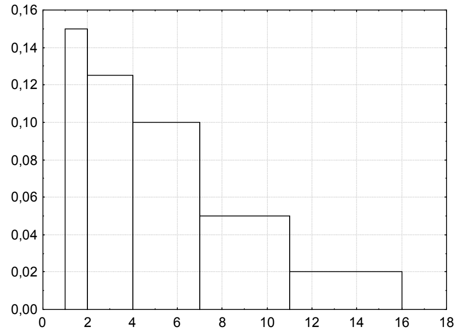
a) Sestavte tabulku rozložení četností.
b) Nakreslete histogram a graf intervalové empirické distribuční funkce.
c) Stanovte medián datového souboru.
d) Vypočtěte průměr datového souboru.

Řešení:
ad a)

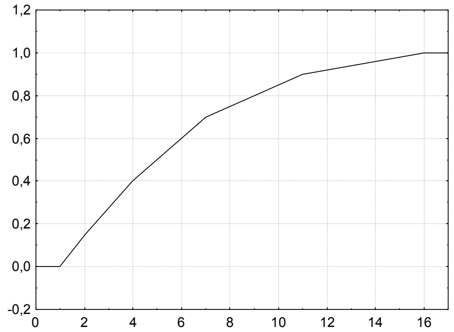
$\langle u_j, u_{j+1}\rangle$	$x_{[j]}$	d_j	n_j	p_j	N_j	F_j	f_j
$\langle 1,2\rangle$	1,5	1	3	3/20=0,15	3	3/20=0,15	3/20=0,15
$\langle 2,4\rangle$	3	2	5	5/20=0,25	8	8/20=0,4	5/40=0,125
$\langle 4,7\rangle$	5,5	3	6	6/20=0,3	14	14/20=0,7	6/60=0,1
$\langle 7,11\rangle$	9	4	4	4/20=0,2	18	18/20=0,9	4/80=0,05
$\langle 11,16\rangle$	13,5	5	2	2/20=0,1	20	20/20=1	2/100=0,02

ad b)

Histogram



Graf intervalové EDF



ad c) Medián je průměr 10. a 11. uspořádané hodnoty, tedy $x_{0,50} = (4,9 + 5,4)/2 = 5,15$

$$m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} n_j x_{[j]} = \frac{1}{20}(3\cdot 1,5 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5,5 + 4\cdot 9 + 2\cdot 13,5) = \frac{1}{20}1155 = 5,775$$

nebo $m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 5,96$

Příklad 4.: V akciové společnosti je průměrná mzda 18 900 Kč. Přitom 30% pracovníků s nejnižší mzdou má průměrně 14 000 Kč. Na začátku roku dostal každý z těchto pracovníků přidáno 1 500 Kč.

a) Jaká je průměrná mzda ostatních 70% pracovníků?
b) Jaká je nyní průměrná mzda v celé akciové společnosti?
c) O kolik procent vzrostla průměrná mzda v celé akciové společnosti?

Návod: příklad 5 z Kontrolních otázek a úkolů ve 3. kapitole

Řešení:

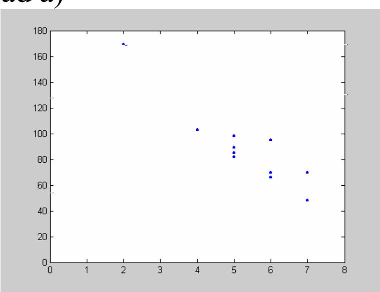
ad a) Označme m_2 průměrnou mzdu ostatních 70% pracovníků. Musí platit:
$0,3 \,.\, 14\,000 + 0,7 \,.\, m_2 = 18\,900$. Odtud $m_2 = 21\,000$ Kč.
ad b) Průměrná mzda v celé akciové společnosti je nyní
$0,3 \,.\, 15\,500 + 0,7 \,.\, 21\,000 = 19\,350$ Kč
ad c) $\frac{19350}{189} = 102,38$, tedy průměrná mzda v celé akciové společnosti vzrostla o 2,38%.

Příklad 5.: U 11 náhodně vybraných aut jisté značky bylo zjišťováno jejich stáří (znak X – v letech) a cena (znak Y – v tisících Kč). Výsledky: (5, 85), (4, 103), (6, 70), (5, 82), (5, 89), (5, 98), (6, 66), (6, 95), (2, 169), (7, 70), (7, 48). Pro úsporu času máte uvedeny číselné charakteristiky (zaokrouhlené na dvě desetinná místa): $m_1 = 5,28$, $m_2 = 88,63$, $s_1^2 = 2,02$, $s_2^2 = 970,85$, $s_{12} = -40,89$.

a) Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram a s jeho pomocí posuďte, zda závislost Y na X lze uspokojivě popsat regresní přímkou. Návod: viz př. 2.3.(e), př. 4.4.(b)
b) Vypočtěte koeficient korelace a interpretujte ho. Návod: viz poznámka 3.17.
c) Najděte rovnici regresní přímky znaku Y na znak X. (Návod: viz věta 4.3.
d) Jaký je regresní odhad ceny auta, které je staré 3 roky? Návod: viz př. 4.4.(d)

Řešení:

ad a)



ad b) $r_{12} = -0,92$. Mezi znaky X a Y existuje silná nepřímá lineární závislost. Čím starší auto, tím nižší cena.
ad c) $y = 195,31 – 20,24x$
ad d) $y = 195,31 – 3.20,24 = 134,59$

Příklad 6.: Je dána kontingenční tabulka obsahující hodnoty simultánní četnostní funkce p(x,y) vektorového znaku (X, Y):

x	y		
	0	1	2
0	0,20	0,20	0,00
1	0,05	0,25	0,03
2	0,05	0,01	0,05
3	0,05	0,01	0,10

a) Doplňte tabulku o marginální četnostní funkce $p_1(x)$, $p_2(y)$.
b) Vypočtěte průměry znaků X, Y.
c) Vypočtěte rozptyly znaků X, Y.
d) Vypočtěte a interpretujte koeficient korelace znaků X, Y.

Řešení:
ad a)

x	y			$p_1(x)$
	0	1	2	
0	0,20	0,20	0,00	0,40
1	0,05	0,25	0,03	0,33
2	0,05	0,01	0,05	0,11
3	0,05	0,01	0,10	0,16
$p_2(y)$	0,35	0,47	0,18	1

ad b)
$m_1 = 1.0{,}33 + 2.0{,}11 + 3.0{,}16 = 1{,}03$, $m_2 = 1.0{,}47 + 2.0{,}18 = 0{,}83$,
ad c)
$s_1^2 = 1^2.0{,}33 + 2^2.0{,}11 + 3^2.0{,}16 - 1{,}03^2 = 1{,}1491$,
$s_2^2 = 1^2.0{,}47 + 2^2.0{,}10 - 0{,}83^2 = 0{,}5011$,
ad d)
$s_{12} = 1.1.0{,}25 + 1.2.0{,}03 + 2.1.0{,}01 + 2.2.0{,}05 + 3.1.0{,}01 + 3.2.0{,}1 - 1{,}03.0{,}83 = 0{,}3051$,

$$r_{12} = \frac{0{,}3051}{\sqrt{1{,}1491}\sqrt{0{,}5011}} = 0{,}4021$$

Mezi znaky X a Y existuje slabá přímá lineární závislost.