

## 5.4 Nákladová minimalizace

Uvažujme minimalizační problém, v němž jsou nezáporné jednotkové ceny výrobních faktorů  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  určeny exogenně jako vektor  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , tedy

$$(5.18) \quad \min_{x_i} \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad \text{za}$$

podmínky, že dosahovaná úroveň produkce je rovna (alespoň)  $y^0$ , tj.  $F(x) \geq y^0$ . K tomu připojíme obvyklé podmínky nezápornosti množství výrobních faktorů  $x_i \geq 0$ .

Pohledme na tuto optimalizační úlohu jako na problém nalézt vázaný extrém funkce a proměnných  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  (při pevných cenách/parametrech). Optimálního stavu (stavu rovnováhy) lze dosáhnout ve dvou krocích. Nejprve předpokládejme, že je dán objem produkce  $y^0$  a ceny výrobních faktorů  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Spotřeba faktorů  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  je taková, že výrobní náklady  $px$  jsou minimální za podmínky, že  $F(x) = y^0$ .

Tuto minimalizační úlohu lze řešit, jak známo, např. pomocí *metody Lagrangeových multiplikátorů*. S ohledem na jedinou omezující podmínku zde postačí jeden multiplikátor. Označíme ho  $\lambda$ . Znamená to minimalizovat výraz tvaru

$$(5.19) \quad H(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i x_i - \lambda \cdot (F(\mathbf{x}) - y^0) \quad \text{při daných } y^0, p_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Derivacemi podle jednotlivých  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  a jejich anulováním obdržíme postupně soustavu podmínek nutných pro rovnováhu :

$$(5.20) \quad \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial x_i} = p_i - \lambda \cdot F_i(x) = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(5.20A) \quad \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial \lambda} = F(x) - y^0 = 0$$

Z (5.20a) dostaneme poptávkové funkce  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  jako funkce parametrů  $y^0, p_1, p_2, \dots, p_n$ . Tyto funkce musí splňovat podmínky nutné pro rovnovážný stav :

$$(5.21) \quad \frac{p_i}{F_i(x^*)} = \lambda. \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(5.21A) \quad \text{tj. } \frac{p_1}{F_1(x^*)} = \frac{p_2}{F_2(x^*)} = \dots = \frac{p_n}{F_n(x^*)} = \lambda$$

za vedlejší podmínky  $F(x) = y^0$ . Výrobní náklady  $\sum p_i x_i$  jsou tedy rovněž funkcí parametrů  $y^0$  a  $p$ . Tyto podmínky vyjadřují požadavek, aby podíl mezní produktivity každého výrobního faktoru a jeho jednotkové ceny byl konstantní pro všechny faktory. Převrácené hodnoty těchto (stejných) podílů jsou rovny multiplikátoru  $\lambda$ .

**Poznámka 1** Podmínky (5.21) můžeme interpretovat prostřednictvím pojmu **parciální mezní náklady**. Jde o podíl změny  $p_i dx_i$  na celkových nákladech a příslušné změny  $F_i dx_i$  v objemu produkce (znamená to malou změnu  $x_i$ , přičemž ostatní  $x_j, j \neq i$  zůstávají beze změny. Platí totiž

$$\frac{\frac{\partial \sum p_i x_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}} = \frac{p_i}{F_i(x)}$$

**Poznámka 2** Všimněme si dále, že platí  $\partial C / \partial y = \lambda$ .

*ověření:* Poptávkové funkce (vyjádřené pro rovnovážný bod) jsou zřejmě funkcí cenového vektoru  $p$  a stanovené úrovně produkce  $y$ . Můžeme tedy psát  $x_1 = x_1(y, p), x_2 = x_2(y, p)$ . Ze zápisu produkční funkce máme

$$F(x_1(y, p), x_2(y, p)) = y$$

Provedeme-li ne obou stranách parciální derivace podle  $y$ , dostaneme

$$F_1 \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + F_2 \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 1$$

Z nutných podmínek pro rovnovážný bod pak vyplývá

$$\frac{p_1}{\lambda} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{p_2}{\lambda} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 1$$

Vynásobením obou stran rovnice  $\lambda$  dostáváme

$$p_1 \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = \lambda$$

Protože dále platí

$$C(y, p) = p_1 x_1(y, p) + p_2 x_2(y, p) \quad ,$$

zřejmě máme

$$\frac{\partial C(y, p)}{\partial y} = p_1 \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = \lambda \quad .$$

**Postačující podmínky** (zajišťující minimalizaci výrobních nákladů) mají tvar, *mutatis mutandis*, jako v případě maximalizace užitkové funkce. Rozdíl je dán tím, že zde řešíme úlohu nalezení minima. Aby byla minimalizována hodnota výrobních nákladů, je nutné, aby **druhý diferenciál** níže definované **kvadratické formy**  $d^2 H(x^*, \lambda)$  **vyčíslený v bodě**  $x^*$  **byl záporný** pro všechna  $dx_i$ , ne všechna nulová:

$$(5.22A) \quad d^2 H(x^*, \lambda) = -\lambda \cdot \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n F_{jk}(x^*) dx_j dx_k \right] > 0.$$

a to pro všechna  $dx_j$  propojená vedlejší podmínkou

$$(5.22B) \quad \sum_{i=1}^n F_i(x^*) \cdot dx_j = 0.$$

Tato vedlejší podmínka je odvozena diferencováním ze vztahu  $F(x^*) = y^0$

Podmínka (5.21A) je zřejmě ekvivalentní požadavku, aby platila (při kladném  $\lambda$ , což plyne z (3.20)) nerovnost

$$(5.23A) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n F_{jk}(x^*) dx_j dx_k < 0.$$

pro všechna  $dx_j$  provázaná zmíněnou vedlejší podmínkou.

$$(5.23B) \quad \sum_{i=1}^n F_i(x^*) \cdot dx_j = 0.$$

Převědeme-li – obdobně jako v případě užitkové funkce – výše uvedené podmínky na vlastnost (symetrické) matice  $\Phi$ , vzniklé z matice druhých parciálních derivací produkční funkce  $F(x)$  ovroubením **gradientním vektorem** v prvním řádku a prvním sloupci (a s nulovým levým horním prvkem), lze požadavek na existenci extrému v bodě  $x^*$  vyslovit ekvivalentně jako požadavek na **střídání znamének konečné posloupnosti hlavních minorů matice  $\Phi^1$** , tj.

$$(5.24) \quad (-1)^k \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k1} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1k} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} & \dots & F_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_k & F_{1k} & F_{2k} & \dots & F_{kk} \end{vmatrix} > 0. \quad k = 2, 3, \dots, n$$

Pokud tedy má daná kombinace množství výrobních faktorů  $x^*$  vést k minimalizaci výrobních nákladů, musí s přidáním každého výrobního faktoru (bez ohledu na pořadí jejich výběru) dojít ke změně znaménka takto zvětšeného **hlavního minoru matice  $\Phi$**  (s kladnou hodnotou pro dva výrobní faktory) vyčíslené v této uvažované faktorové kombinaci  $x^*$ . Není-li tomu tak, bod  $x^*$  minimem být nemůže.

Na nákladovou minimalizaci navazuje jako druhý krok maximalizace zisku. Tu provedeme tak, že při dané jednotkové ceně výrobku  $q$  stanovíme rozsah výroby tak, aby byl maximalizováno rozpětí mezi tržbami a náklady. Zisk je tímto je vyjádřen jako

$$(5.25) \quad q \cdot y^0 - C(y^0, p) \quad ,$$

tj. rozdíl mezi objemem tržeb a výrobními náklady. K tomu ovšem stačí položit (kladný) multiplikátor  $\lambda$  hodnotě  $q$  (jednotkové ceně výrobku). Tím je řečeno, že v rovnovážné situaci jednak platí (nutné) podmínky  $p_i / F_i(x^*) = q$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n$  jednak (jako postačující) též **Hicksovy podmínky stability** (5.22), resp. (5.23).

<sup>1</sup> Je zřejmé, že pro  $k = 1$  je vztah (5.23) splněn vždy: minor je roven  $-F_1^2$

**Ilustrace** Výše uvedený postup ukážeme nyní na nejjednodušším případě, v němž výrobní technologie operuje tak, že je vyráběn pouze jeden výrobek  $y$ , k jehož zhotovení se používají dva výrobní faktory  $x_1, x_2$ .

Nejprve vyšetříme podobu podmínek nutných pro rovnovážný bod. Postupně odvodíme výrazy pro změnu poptávky po každém výrobním faktoru při změně jedné z cen (arbitrárně zvolme  $p_1$ ). Vyjdeme přitom z podmínek (5.25):

$$(5.26A,B,C) \quad F(x_1(p), x_2(p)) = y^0 \quad F_1(x_1(p), x_1(p)) \cdot \lambda = p_1 \\ F_2(x_2(p), x_2(p)) \cdot \lambda = p_2$$

Derivujme nyní všechny tři vztahy podle  $p_1$  (ceny, která se mění). Dostaneme

$$(5.27A) \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0.$$

$$(5.27B) \quad F_1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \lambda \cdot \left( \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \right) = 1.$$

$$(5.27C) \quad F_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \lambda \cdot \left( \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \right) = 0.$$

Po jednoduché úpravě druhé a třetí rovnice (vydělením každé z nich  $\lambda$ ) dostáváme soustavu tří rovnic pro tři neznámé (dvě poptávkové změny  $\partial x_1 / \partial p_1$  a  $\partial x_2 / \partial p_1$  a pomocnou neznámou  $1 / \lambda \cdot \partial \lambda / \partial p_1$ ). Tuto soustavu je pak možno souhrnně vyjádřit vektorově-maticovým zápisem

$$(5.28) \quad \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\lambda \cdot \partial \lambda / \partial p_1 \\ \partial x_1 / \partial p_1 \\ \partial x_2 / \partial p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Odtud použitím **Cramérova pravidla** již snadno získáme řešení: výraz pro poptávkové změny.

$$(5.29) \quad \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{|\Phi_1|}{|\Phi|}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{|\Phi_2^*|}{|\Phi|},$$

kde

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_2 \\ F_1 & \frac{1}{\lambda} & F_{12} \\ F_2 & 0 & F_{22} \end{pmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & 0 \\ F_1 & F_{11} & \frac{1}{\lambda} \\ F_2 & F_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Přímým výpočtem obou determinantů dostaneme

$$(5.30) \quad |\Phi_1| = \frac{-F_2^2}{\lambda} \quad |\Phi_2| = \frac{F_1 F_2}{\lambda}$$

a tedy následně

$$(5.31) \quad \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{-F_2^2}{\lambda \cdot |\Phi|} \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{F_1 \cdot F_2}{\lambda \cdot |\Phi|}$$

Vzhledem k tomu, že  $\lambda > 0$  a  $|\Phi| > 0$ , dostáváme zřejmě, že  $\partial x_1 / \partial p_1 < 0$ , zatímco  $\partial x_2 / \partial p_1 > 0$ . Znamená to tedy, že růst ceny příslušné výrobnímu faktoru vede k poklesu poptávky po něm, zatímco v případě druhého přítomného faktoru vede růst jeho ceny k růstu poptávky. Oba výrobní faktory jsou tedy v substitučním vztahu.

#### 5.4 Přímá maximalizace zisku pomocí ziskové funkce

Rozšířme úlohu formulovanou v části [ 5.3 ] tak, že *souběžně* s minimalizací nákladové stránky výroby budeme usilovat o dosažení maximálního zisku z hodnoty vyrobené produkce. K tomuto účelu potřebujeme vedle výše výrobních nákladů (připomeňme, že ty jsou dány součinem množství výrobních faktorů a jejich jednotkových cen) stanovit hodnotu, za kterou se bude vytvořená produkce prodávat na trhu. Proto je třeba do úvah zařadit veličinu množství výrobků a k nim příslušných jednotkových cen, tedy (při  $m$  výrobcích) hodnotu skalárního součinu tvaru

$$(5.32) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^m q_j y_j$$

Maximalizaci zisku (při nejmenších možných výrobních nákladech) lze pak zapsat ve tvaru

$$(5.33) \quad \text{Max } \Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{Max} [\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] = \text{Max} \left[ \sum_{j=1}^m q_j y_j - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right]$$

tentokrát však bez přímého uvažování vedlejší podmínky  $F(x) \geq y^0$  představující požadavek, aby produkce dosažitelná pomocí vektoru množství výrobních faktorů  $\mathbf{x}$  měla alespoň velikost  $y^0$ . Zisková funkce  $\Pi(q, p)$  v (5.32) pak udává maximální dosažitelný zisk z produkce realizované při minimálních výrobních nákladech a při tržně stanovených cenách  $p$  a  $q$ .

V dalším výkladu se pro zjednodušení omezíme na situaci, kdy je produkován pouze jediný výrobek,  $m = 1$ , tzn.  $\mathbf{qy} = qy$ . Příslušné úvahy by nicméně zůstaly v platnosti i pro případ sdružené produkce, tj. tehdy, pokud bychom rozšířili pojem produkční funkce na vektorovou situaci. S ohledem na sledovaný cíl (nalézt optimální rozsah výroby, při němž je minimalizován zisk) však bude nyní nutno na argumenty ziskové funkce pohlížet odlišně: Ceny  $p$  a  $q$  budeme považovat za exogenně stanovené „parametry“ úlohy, zatímco optimalizaci budeme provádět vzhledem k (proměnným, hledaným) množství výrobních faktorů. Abychom však nekomplikovali situaci dalším symbolem, přidržíme se původního značení ziskové funkce  $\Pi$ .

Nutné podmínky pro to, aby v konkrétním bodě  $x^*$  byla maximalizována zisková funkce<sup>2</sup>, jsou

$$(5.34) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_n} = 0.$$

vyčíslení parciálních derivací zde vede k soustavě podmínek nutných pro rovnovážný bod<sup>3</sup>:

$$(5.35A) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_1} = q \cdot \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_1} - p_1 = 0.$$

$$(5.35B) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_2} = q \cdot \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_2} - p_2 = 0.$$

$$(5.35C) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_n} = q \cdot \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_n} - p_n = 0.$$

Optimální (rovnovážná) spotřebovávaná množství výrobních faktorů  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  získáme nyní jako funkce cen  $x_i^* = x_i^*(q, p)$  úpravou předchozí soustavy rovnic, v níž píšeme

$$(5.36) \quad F_i(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} : \frac{p_j}{F_j(x^*)} = q$$

$$( \text{tj. } \frac{p_1}{F_1(x^*)} = \frac{p_2}{F_2(x^*)} = \dots = \frac{p_n}{F_n(x^*)} = q )$$

Optimální rozsah výroby je potom dán vztahem  $y = F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , je tedy vyvozen pro danou technologii z optimálních množství výrobních faktorů  $x^*$ . Z dosaženého lze vyvodit :

A) Vztah (5.36) ukazuje, že v rovnovážném stavu  $x^*$  je poměr spotřeby kterýchkoliv dvou faktorů  $r, s$  takový, že mezní míra substituce mezi nimi  $F_r(x^*)/F_s(x^*)$  je rovna poměru cen těchto faktorů  $p_r / p_s$ .

B) Optimální rozsah výroby, tj. množství výrobních faktorů  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  a následně hodnota produkce  $y^* = F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  je pak dána úrovněmi  $p_i = q \cdot F_i(x^*)$  pro všechna  $j = 1, 2, \dots, n$ . Znamená to, že rozsah výroby se zvětšuje

<sup>2</sup> Používáme značení  $\tilde{\Pi}$  oproti  $\Pi$ , protože zisková funkce definovaná v [5.15] je funkcí cen  $q, p$ . Zde, ač pracujeme s formálně shodným výrazem  $qy - px$ , pohlížíme na tento výraz odlišně: při maximalizaci (5.33) pokládáme obojí ceny za pevně dané, maximum zisku se hledá ve vztahu k rovnovážnému bodu, který určují hledaná optimálně užitá množství výrobních faktorů  $x^*$  - produkci pak určíme z produkční funkce  $y^* = F(x^*)$

<sup>3</sup> Zde na rozdíl od situace v části [5.3] však neprovádíme podmíněnou, nýbrž nepodmíněnou maximalizaci, není tedy důvod uplatňovat postup s použitím Lagrangeova multiplikátoru.

potud, pokud hodnota mezní produktivity (při daném pevném  $q$ ) každého faktoru není rovna relativní ceně (vůči  $q$ ) tohoto faktoru. V té chvíli se dosáhne rovnovážného stavu, v němž se výrobní poměry ustálí. V tomto stavu platí  $F_i(x^*) = p_i / q$  pro všechna.  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Poznamenejme ještě, že cílové kritérium, minimalizace zisku zde není přímo spojeno s požadavkem, aby hodnota produkce dosáhla jistou (dostatečnou) úroveň  $y^0$ : Výrobce bude mít zájem zvyšovat produkci do té doby, než se dosáhne, při zpravidla klesajících mezních produktech, podmínek (5.36). Na této úrovni se pak rovnovážná (optimální) výroba ustálí.

**Dodatek** Zkusme nyní vyšetřit, jak se bude chovat změna poptávky po výrobních faktorech při změně produkce  $y$ : k cenám jako argumentům poptávkové funkce tak přibude ještě (proměnlivá) velikost produkce  $y$ :

vyjděme ze vztahů (5.26) resp. (5.26):

$$(5.37A,B,C) \quad F(x_1(y, p), x_2(y, p)) = y$$

$$F_1(x_1(y, p), x_2(y, p)) \cdot \lambda = p_1 \quad F_2(x_1(y, p), x_2(y, p)) \cdot \lambda = p_2$$

Derivujme nyní všechny tři vztahy podle  $y$  (produkce). Dostaneme:

$$(5.38A) \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 1.$$

$$(5.38B) \quad F_1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \cdot \left( \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} \right) = 0.$$

$$(5.38C) \quad F_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \cdot \left( \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} \right) = 0.$$

Po drobné úpravě – vydělení druhé a třetí rovnice multiplifikátorem  $\lambda$  - máme

$$(5.38^*A) \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 1.$$

$$(5.38^*B) \quad F_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 0.$$

$$(5.38^*C) \quad F_2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 0.$$

Tyto tři vztahy přepíšeme do vektorově-maticové podoby

$$(5.39) \quad \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí Cramérova pravidla nyní dostaneme řešení pro hledané dvě neznámé  $\frac{\partial x_1}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial x_2}{\partial y}$ :

$$(5.40)^4 \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & F_2 \\ F_1 & 0 & F_{12} \\ F_2 & 0 & F_{22} \end{vmatrix}}{|\Phi|} = \frac{F_{12} \cdot F_2 - F_1 \cdot F_{22}}{|\Phi|},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_1 & 1 \\ F_1 & F_{11} & 0 \\ F_2 & F_{12} & 0 \end{vmatrix}}{|\Phi|} = \frac{F_1 \cdot F_{12} - F_2 \cdot F_{11}}{|\Phi|}$$

Pokud jde o znaménka obou derivací, lze vyvodit následující:

Determinant ve jmenovateli obou derivací bude kladný právě tehdy, bude-li produkční funkce kvazikonkávní. Při kladnosti mezních produktů  $F_1, F_2$ , zápornosti členů  $F_{11}, F_{22}$  budou mít oba čitatele kladné hodnoty, pokud  $F_{12} > 0$ , což v případě dvou faktorů musí platit vždy.<sup>5</sup> V souladu s realitou tedy při růstu produkce poptávka po obou výrobních faktorech poroste.

<sup>4</sup> Podobně jako v části pojednávající o teorii rovnováhy spotřebitele lze z Hicksových podmínek vyvodit, že  $F_{ii} < 0$ .

<sup>5</sup> Máme-li pouze dva výrobní faktory, musí být tyto, jak bylo dříve ukázáno, v substitučním vztahu,