MASARYKOVA UNIVERZITA • EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA

PMAEMM

(Aplikace ekonomicko-matematických modelů)

kostra přednášek + příklady na procvičení

HANA FITZOVÁ

BRNO 2005

Obsah

1. Tempa růstu

1.1 Úročení

$P \ldots$ investovaná částka; $R \ldots$ roční úroková míra

• Jednoduché úročení

$$V_s(n) = P + P \cdot R \cdot n \tag{1.1}$$

Vložíte-li si na dva roky na účet úročený jednoduchým způsobem úročení, s roční úrokovou mírou 4.5% pět tisíc korun, kolik dostanete za dva roky? [5450 Kč]

• Složené úročení na konci roku

$$V_a(n) = P \cdot (1 + R)^n \tag{1.2}$$

Vložíte-li si na dva roky na účet úročený složeným způsobem úročení na konci roku, s roční úrokovou mírou 4.5% pět tisíc korun, kolik dostanete za dva roky? [5460.13 Kč]

• Složené úročení t-krát ročně

$$V_t(n) = P \cdot \left(1 + \frac{R}{t}\right)^{t \cdot n} \tag{1.3}$$

Vložíte-li si na dva roky na účet úročený složeným způsobem úročení každý den (tj. 365 krát za rok), s roční úrokovou mírou 4.5% pět tisíc korun, kolik dostanete za dva roky? [5470.84 Kč]

• Spojité úročení

$$V_c(n) = \lim_{t\to\infty} P \cdot \left(1 + \frac{R}{t}\right)^{t\cdot n} = P \cdot e^{R\cdot n} \tag{1.4}$$

Vložíte-li si na dva roky na účet úročený spojitým způsobem úročení, s roční úrokovou mírou 4.5% pět tisíc korun, kolik dostanete za dva roky? $[5470.87$ Kč$]$

1.2 Tempa růstu

Úroková míra = míra růstu hodnoty aktiva. Výše uvedené vztahy tedy platí i pro ostatní ekonomické veličiny, např. HDP, cenovou hladinu apod.

V dané zemi byl HDP v roce 2001 100 mil. USD, v roce 2002 130 mil. USD a v roce 2003 135 mil. USD. Jakým tempem (jednoduché úročení) rostl HDP z roku 2002 na rok 2003? Jakým tempem rostl HDP z roku 2001 na rok 2003 (složené roční i spojité úročení)? $[3.85\%;\ 16.19\%,\ 15\%]$

Ekonomové často používají spojité míry růstu, protože je to výpočetně jednoduché – stačí jen odečíst logaritmy hodnot.

1.3 Cvičení

Příklad 1.1. Jaká je denní úroková míra, je-li roční 16.8%?

$[0.046\%]$

Příklad 1.2. Váš kamarád je vám ochoten půjčit 1000 USD na týden, když mu pak vrátíte o 25 USD více. O jakou anualizovanou úrokovou míru si vlastně říká? (Rok má 52 týdnů).

$[130\%]$

Příklad 1.3. V jednotlivých čtvrtletích let 2003 a 2004 nabýval index CPI v jisté zemi postupně následujících hodnot: 155.7, 156.7,157.8,158.6, 160.0, 160.3, 161.2, 161.3. Jaké je tempo růstu CPI mezi 2. čtvrtletím (Q2) roku 2003 a 3. čtvrtletím (Q3) roku 2003? (Užijte spojitého úročení, svoji odpověď anualizujte).

[2.798%]

Příklad 1.4. Na základě dat z předchozího příkladu spočtěte míru růstu CPI v prvních čtyřech uvedených čtvrtletích. (Použijte spojité míry růstu, odpověď neanualizujte). Ukažte, že suma těchto čtyřech měr je stejná jako míra růstu (při spojitém úročení) z Q1 2003 na Q1 2004.

[0.64%, 0.7%, 0.51%, 0.88%; 2.72%]

Příklad 1.5. Předpokládejme, že v prvních padesáti letech tohoto tisíciletí poroste reálný výstup USA dvouprocentním tempem. Jak dlouho by při tomto tempu (při složeném ročním a při spojitém úročení) trvalo, než by se reálný výstup zdvojnásobil?

[34.66let; 35 let]

Příklad 1.6. Jednoho dne investujete 10000 USD s úrokem 6.5% skládaným ročně. Kdy nejdříve bude mít investice hodnotu 15000 USD? Odpověď vyjádřete jako počet let a dní. (Úrok přibývá každý den, ale úročení je roční). ⇒DÚ do 29. 9. 2005

Příklad 1.7. Předpokládejme, že ročně zmizí ze země 4.6% pralesů. Za jak dlouho jich bude jenom polovina? (Použijte roční úročení a výsledek zaokrouhlete).

[15 let]

Příklad 1.8. Světová populace čítala v roce 1700 zhruba 679 milionů lidí, v roce 1800 už 954 milionů lidí. Jakým ročním tempem rostla populace mezi léty 1700 až 1800? (Použijte spojité úročení). Předpokládejme, že lidstvo začalo Adamem a Evou, a že tempo růstu populace z let 1700 až 1800 bylo stejné i předtím. Ve kterém roce museli být Adam s Evou vyhnáni z ráje? (Jaká v té době byla populace?)

[$3.4 \cdot 10^{-3}$%; 4077 B. C.]

Příklad 1.9. Reálný důchod na hlavu v USA v roce 1984 byl 15400 USD, v Japonsku 10600 USD. Mezi lety 1965 až 1984 rostl reálný důchod na hlavu v USA ročním tempem 1.7% (roční úročení), v Japonsku tempem 4.7%. Pokud tato tempa růstu zůstanou konstantní, ve kterém roce budou reálné důchody na hlavu v obou zemích stejné? (Použijte roční složené úročení). Jaká bude v tomto roce výše důchodu na hlavu?

$[1997;\ 19124]$

2. Ekonomika Robinsona Crusoe

2.1 Výrobní možnosti

- Crusoe je sám na ostrově
- zajímá ho spotřeba a volný čas
- vyrábí spotřební statky (např. kokosy) y pomocí práce l (část dne, kterou pracuje), kapitálu k a technologie A
- $y = A \cdot f(k, l)$ tj. $\uparrow A \Rightarrow \uparrow y$
- f je rostoucí funkcí k a l, tj. $MPK = \frac{\partial f}{\partial k} > 0$, $MPL = \frac{\partial f}{\partial l} > 0$
- $f(0, l) = f(k, 0) = 0 \quad \forall k,\ \forall l$
- např. Cobb-Douglasova produkční funkce $y = A \cdot k^{1-\alpha} \cdot l^{\alpha},\ \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ (konstantní výnosy z rozsahu)
- pro zatím se nebudeme zabývat kapitálem, tj. řekněme, že je konstantní, např. $k = 1$

2.2 Preference

Robinson spotřebovává statky c, pracuje zlomek dne l a zbývá mu tedy zlomek $1-l$ dne volného času. Jeho preference zachycuje užitková funkce $u(c, l)$. S růstem dobrého statku roste i užitek. Např. $u(c, l) = \ln(c) + \ln(1 - l)$.

2.3 Hledání optima

$$\max_{c,l} u(c,l) \quad c \leq y,\ y = f(l) \text{ tj.}$$
$$\max_{c,l} u(c,l) \quad c = f(l)$$

2.3.1 Řešení dosazením omezení do cíle

$$\max_{l} u[f(l), l] \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\{u[f(l^*), l^*]\} = 0 \tag{2.2}$$

Položíme první derivaci podle práce rovnu nule a dostaneme optimální množství práce l^*, volna $= 1 - l^*$ a spotřeby $c^* = f(l^*)$.

Příklad 2.1. Je dána užitková funkce $u(c,l) = \ln(c) + \ln(1-l)$ a produkční funkce tvaru $y = f(l) = A \cdot l^{\alpha}$. Naleznĕte optimální hodnoty l^* a c^*.

$\left[l^* = \frac{\alpha}{1+\alpha};\ c^* = A \cdot (\frac{\alpha}{1+\alpha})^{\alpha}\right]$

2.3.2 Řešení s využitím Lagrangeových multiplikátorů

$$\max_{c,l} u(c,l) \quad f(l) - c = 0$$

$$\mathcal{L}(c,l,\lambda) = u(c,l) + \lambda[f(l) - c] \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = u_1(c^*, l^*) - \lambda^* = 0 \tag{2.4a}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = u_2(c^*, l^*) + \lambda^* \cdot f'(l^*) = 0 \tag{2.4b}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f(l^*) - c^* = 0 \tag{2.4c}$$

Z rovnic (2.4a) a (2.4b) vyjádříme λ a získáme vztah mezi l^* a c^*, s využitím rovnice (2.4c) pak dopočteme optimální množství práce a spotřebu.

Příklad 2.2. Řešte výše uvedený příklad s využitím Lagrangeovy funkce.

$$\left[l^* = \frac{\alpha}{1+\alpha};\ c^* = A \cdot (\frac{\alpha}{1+\alpha})^\alpha\right]$$

2.4 Důchodový a substituční efekt

Jak se mění optimální spotřeba, když se mění technologie? Jak se mění optimální množství práce, když se mění technologie? (Komparativní statika)

2.5 Cvičení

Příklad 2.3. Osamoceného agenta zajímá jen spotřeba (c) a volný čas (g) v hodinách. Jeho preference popisuje užitková funkce $u = ln(c) + ln(g)$. Pokud se agent zrovna neválí, tak pracuje pro sebe nebo pro souseda. Pracuje-li pro sebe n_s hodin, vyprodukuje $y = 4 \cdot \sqrt{n_s}$ spotřebních jednotek. Pracuje-li pro souseda, dostane hodinovou mzdu w ve spotřebních statcích. Formulujte optimalizační problém.

Příklad 2.4. Předpokádejme, že preference Robinsona jsou popsány užitkovou funkcí tvaru $u(c, l) = c^\gamma \cdot (1 - l)^{1-\gamma}$ a produkční funkce je tvaru $y = Al^\alpha$. Najděte optimální množství práce a spotřeby.

3. Domácnosti s trhem zboží a obligací

- spousta stejných domácností, vezmeme 1 reprezentativní
- užitková funkce je v jednotlivých časech separabilní (β je diskontní faktor), tj. $U(c_1, c_2, \ldots) = u(c_1) + \beta u(c_2) + \beta^2 u(c_3) + \ldots$
- y_t je exogenní důchod (spadne z nebe) v čase t (ve spotřebním zboží)
- c_t je spotřeba v čase t
- P je cena za 1 jednotku spotřeby
- b_t jsou obligace v čase t, ($b_0 = 0$), $b_t > 0 \ \rightarrow$ věřitel, $b_t < 0 \ \rightarrow$ dlužník
- R je úroková míra
- v čase t má domácnost k dispozici $Py_t + b_{t-1}(1 + R)$
- a utratí $Pc_t + b_t$, tedy rozpočtové omezení pro čas t je tvaru
- $Py_t + b_{t-1}(1 + R) = Pc_t + b_t$

3.1 Model 2 období

Nejprve se zaměříme na chování reprezentativní domácnosti, posléze na tržní rovnováhu. V této části budeme uvažovat model dvou období, tj. $t = 1, 2$. Preference domácností lze tedy zapsat jako

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2) \tag{3.1}$$

Ve druhém období nebude domácnost kupovat obligace, protože by jí to nic nepřineslo. Proto $b_2 = 0$ a v modelu zůstane pouze b_1.

Rozpočtové omezení domácnosti v čase $t = 1$ tedy bude tvaru

$$Py_1 = Pc_1 + b_1 \tag{3.2}$$

a v čase $t = 2$

$$Py_2 + b_1(1 + R) = Pc_2 \tag{3.3}$$

Domácnost volí takovou spotřebu c_1, c_2 a držbu obligací b_1, aby maximalizovala svůj užitek (3.1) při rozpočtových omezeních (3.2) a (3.3).

Tento problém vyřešíme s využitím Lagrangianu.

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda_1(Py_1 - Pc_1 - b_1) + \lambda_2[Py_2 + b_1(1 + R) - Pc_2] \tag{3.4}$$

kde $\lambda_1,\ \lambda_2$ jsou 2 Lagrengeovy multiplikátory. Položíme první derivace $\mathcal{L}$ rovny nule a získáme podmínky prvního řádu pro extrém.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u'(c_1^*) + \lambda_1^*(-P) = 0 \tag{3.5a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta u'(c_2^*) + \lambda_2^*(-P) = 0 \tag{3.5b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_1} = \lambda_1^*(-1) + \lambda_2^*(1 + R) = 0 \tag{3.5c}$$

Ze vztahů (3.5a) a (3.5b) plyne

$$\lambda_1^* = \frac{u'(c_1^*)}{P} \quad \lambda_2^* = \beta \frac{u'(c_2^*)}{P}$$

a po dosazení do (3.5c) dostaneme

$$-\frac{u'(c_1^*)}{P} + \beta \frac{u'(c_2^*)}{P}(1 + R) = 0$$

neboli

$$\frac{u'(c_1^*)}{u'(c_2^*)} = \beta(1 + R) \tag{3.6}$$

Rovnici (3.6) říkáme Eulerova rovnice. Popisuje vztah mezi mezními užitky ze spotřeby v obou obdobích. Pro danou funkci u pak nalezeneme optimální spotřebu a optimální množství obligací.

Příklad 3.1. Pro preference tvaru $u(c_t) = ln(c_t)$ nalezněte Eulerovu rovnici a optimum domácnosti.

Eulerova rovnice je tvaru $\frac{c_2^*}{c_1^*} = \beta(1+R)$. Spolu s oběma rozpočtovými omezeními máme 3 rovnice o 3 neznámých, jejichž řešením je:

$$c_1^* = \frac{y_2 + y_1(1+R)}{(1+\beta)(1+R)}$$

$$c_2^* = [y_2 + y_1(1+R)]\left[\frac{\beta}{1+\beta}\right]$$

$$b_1^* = Py_1 - \frac{P[y_2 + y_1(1+R)]}{(1+\beta)(1+R)}$$

Nyní prozkoumáme, kdy nastává rovnováha trhu. Ekonomika se skládá ze spousty (N) identických domácností. Domácnost je buďto věřitelem ($b_1 > 0$) nebo dlužníkem ($b_1 < 0$). Protože ale předpokládáme, že všechny domácnosti jsou stejné, tak si buď všichni půjčují nebo všichni prostředky poskytují. Aby na trhu úvěru nastala rovnováha, musí tedy v rovnováze platit, že celková poptávka po úvěrech je nulová, tj. nikdo nepůjčuje a nikdo si ani nechce půjčit:

$$Nb_1^* = 0 \tag{3.7}$$

Co vlastně rozumíme rovnováhou? Rozumíme tím řešení, při kterém

- všichni účastníci ekonomiky jsou cenovými příjemci
- chovají se racionálně
- a všechny trhy jsou vyčištěny

V námi uvažovaném typu ekonomiky vystupuje jednak cena za spotřebu P a jednak cena za půjčku R. Účastníky ekonomiky je N domácností. Jednak musí být v rovnováze trh zboží

$$Ny_t = Nc_t^* \quad t = 1,2 \tag{3.8}$$

a také trh obligací, což je dáno rovnicí (3.7).

Za rovnováhu tedy považujeme nastavení takových hodnot P^*, R^*, c_1^*, c_2^* a b_1^*, že platí:

- při daných cenách P^* a R^* volí všechny domácnosti takové c_1^*, c_2^* a b_1^*, aby maximalizovaly (3.1) vzhledem k omezením (3.2) a (3.3)
- trh zboží je vyčištěn v každém čase – viz (3.8)
- a trh obligací je též vyčištěn – viz (3.7)

Nejprve se podíváme na trh úvěru. Množství nakupovaných obligací závisí na úrokové míře. Hledáme takovou úrokovou míru R^*, při které se vyčistí trh obligací, tj. takovou, že $b_1^*(R^*) = 0$. Jelikož pro náš konkrétní příklad platí, že

$$0 = b_1^*(R) = Py_1 - \frac{P[y_2 + y_1(1+R)]}{(1+\beta)(1+R)}$$

po drobných úpravách dostaneme pro náš případ následující vztah pro rovnovážnou úrokovou míru:

$$R^* = \frac{y_2}{\beta y_1} - 1 \tag{3.9}$$

Rovnovážná úroková míra závisí na důchodech domácností a na jejich netrpělivosti (β). Provedeme-li komparativní statiku při změně důchodu y_2, dostaneme

$$\frac{\partial R^*}{\partial y_2} = \frac{1}{\beta y_1} > 0$$

tedy při zvýšení důchodu v druhém období se zvyšuje i rovnovážná úroková míra (snaha o vyhlazování spotřeby – v prvním období investují méně, úroková míra tedy roste).

Je důležité, že v našem modelu hraje roli pouze relativní změna důchodů. Pokud se oba důchody zdvojnásobí, s rovnovážnou úrokovou mírou se nic nestane. Pokud ekonomiku postihne dočasný šok takový, že y_1 klesne o 10% a y_2 se nezmění, pak dle komparativní statiky musí úroková míra vzrůst. Dočasný negativní důchodový šok tedy zvyšuje úrokovou míru. Jedná-li se o permanentní šok, tj. y_1 i y_2 klesnou např. o 10%, pak se úroková míra nemění.

Druhou důležitou rovnovážnou cenou je cena spotřeby P^*. Tato proměnná nevystupuje ve vztazích pro c_1^* a c_2^*. Ve vztahu pro obligace sice vystupuje, ale po vložení rovnovážné podmínky $b_1^* = 0$ také mizí. Je to proto, že s růstem cen má domácnost vyšší důchod, ale platí také více za spotřebu, takže žádná reálná změna nenastává. Existuje tedy nekonečně mnoho rovnovážných situací, protože rovnovážná cena P^* může být jakákoli.

3.2 "Nekonečný" model

Výše uvedený model dvou období rozšíříme na model nekonečně mnoha období. Užitková funkce domácnosti je nyní tvaru

$$U(c_1, c_2, \ldots) = u(c_1) + \beta u(c_2) + \beta^2 u(c_3) + \ldots$$

V každém čase je rozpočtové omezení domácnosti tvaru:

$$Py_t + b_{t-1}(1+R) = Pc_t + b_t \quad \forall t = 1, 2, \ldots$$

V každém čase se domácnost rozhoduje, kolik spotřebuje a kolik pořídí obligací, jejím cílem je tedy:

$$\max_{\{c_t, b_t\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t)$$

za podmínek

$$Py_t + b_{t-1}(1+R) = Pc_t + b_t \quad \forall t = 1, 2, \ldots$$

Lagrangeova funkce je tedy tvaru

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t) + \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t [Py_t + b_{t-1}(1+R) - Pc_t - b_t]$$

Podmínky optimality pro čas t jsou tedy tvaru:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^{t-1} u'(c_t^*) + \lambda_t^*(-P) = 0 \tag{3.10a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_t} = \lambda_t^*(-1) + \lambda_{t+1}^*(1+R) = 0 \tag{3.10b}$$

Z rovnice (3.10b) plyne, že

$$\frac{\lambda_t^*}{\lambda_{t+1}^*} = 1 + R \tag{3.11}$$

Přepíšeme-li podmínku optimality pro spotřebu dostaneme

$$\beta^{t-1} u'(c_t^*) = \lambda_t^* P$$

Tuto rovnici posuneme o krok dopředu, tj. $t \rightsquigarrow t+1$

$$\beta^t u'(c_{t+1}^*) = \lambda_{t+1}^* P$$

Podělíme-li poslední dvě uvedené rovnice, dostaneme

$$\frac{u'(c_t^*)}{\beta u'(c_{t+1}^*)} = \frac{\lambda_t^*}{\lambda_{t+1}^*}$$

a po dosazení vztahu (3.11) máme

$$\frac{u'(c_t^*)}{u'(c_{t+1})^*} = \beta(1+R)$$

Tato Eulerova rovnice je stejná jako ta odvozená u modelu dvou období. Je to proto, že domácnoct čelí stejnému mezičasovému rozhodování.

3.3 Cvičení

Příklad 3.2. Uvažujme model dvou období uvedený v části 3.1. Předpokládejme užitek ve tvaru $u(c_t) = \sqrt{c_t}$. Určte Eulerovu rovnici. Nalezněte optimální spotřebu a optimální množství obligací. Stanovte rovnovážnou úrokovou míru. Vyšetřete dopad trvalého negativního důchodového šoku (v obou obdobích o stejnou částku) reprezentativní domácnosti na vývoj rovnovážné úrokové míry. Jaký je rozdíl oproti řešení výše řešeného příkladu s preferencemi tvaru $u(c_t) = \ln(c_t)$?

Příklad 3.3. Vyjděte ze vztahu pro rovnovážnou úrokovou míru v modelu dvou období (3.9). Jak se změní úroková míra, pokud se domácnost stane více netrpělivou? (Proveďte komparativní statiku). Dále určete, jak se změní rovnovážná úroková míra, pokud domácnost postihne dočasný negativní důchodový šok v prvním období. (Proveďte komparativní statiku).

Příklad 3.4. Mařenka žije dvě období. V každé periodě odněkud dostane spotřební statky: e_1 v první periodě, e_2 ve druhé. Nemusí tedy pracovat. Její preference jsou tvaru $u(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \beta \ln(c_2)$. V prvním období je schopna uspořit s statků. Protože úspory špatně skladuje, napadnou jí je krysy a v dalším období jí z nich zůstane pouze $(1 - \delta)s$.

Zapište Mařenčin optimalizační problém. Vyřešte Mařenčin optimalizační problém (tj. nalezněte optimální volbu při daném e_1, e_2, β a δ). Jak se změní Mařenčino rozhodnutí, pokud se jí podaří snížit škody napáchané krysami? (Proveďte komparativní statiku). ⇒DÚ do 13. 10. 2005

Příklad 3.5. Jeníček žije 5 období a vlastní jedlý strom. Přišel na svět v čase $t = 0$, kdy měl strom velikost x_0. Nechť C_t je jeho spotřeba v čase t. Pokud sní v čase t celý strom, pak $c_t = x_t$ a nezbyde mu nic na dny budoucí.

Pokud ho nesní celý, pak zbytek roste tempem α mezi jednotlivými obdobími. Zlomek stromu, který Jeníček uspoří v čase t je s_t. Ušetří-li v čase t $(100 \cdot s_t)$ procent svého stromu, v dalším období bude mít k dispozici o $(\alpha \cdot 100)$ procent stromu více.

Jeníčka zajímá pouze spotřeba, jeho preference jsou tvaru $U = \sum_{t=0}^{4} \beta^t \ln(c_t)$. Jeho strom je jeho jediným zdrojem. Zapište Jeníčkův optimalizační problém.

4. Trh práce

Nejprve se budeme zabývat modelem jednoho období, potom dále rozvineme model dvou období z předchozí kapitoly.

4.1 Rovnováha trhu práce

Ekonomiku tvoří spousta identických domácností. Každá domácnost vlastní farmu, na níž zaměstnává pracovníky produkující spotřební statky. Každá domácnost také nabízí vlastní práci ostatním farmářům, za což dostává mzdu w ve spotřebních statcích. Tuto mzdu bere jako danou. Domácnost nepracuje na své vlastní farmě (což nemá žádné zásadní dopady).

Prvním cílem domácnosti je maximalizovat zisk farmy. Výstup farmy je dán produkční funkcí $f(l_d)$, kde l_d je množství zaměstnané práce. Jediným výdajem jsou mzdové náklady. Tedy zisk farmy je $\pi = f(l_d) - wl_d$. Podmínka optimality prvního řádu je tvaru:

$$\frac{\partial \pi}{\partial l_d} = f'(l_d^*) - w = 0 \qquad \Rightarrow w = f'(l_d^*)$$

Domácnost tedy najímá práci, dokud se mezní produkt práce nesrovná s tržní mzdou.

Dále se domácnost rozhoduje, jak moc bude pracovat na ostatních farmách a kolik bude spotřebovávat. Její preference popisuje $u(c, l_s)$, kde c je spotřeba a l_s je množství nabízené práce. Rozpočtové omezení je tvaru $\pi^* + wl_s = c$. Tedy Lagrangean a podmínky optimality jsou následující:

$$\mathcal{L} = u(c, l_s) + \lambda(\pi^* + wl_s - c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = u_1(c^*, l_s^*) - \lambda = 0 \tag{4.1a}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_s} = u_2(c^*, l_s^*) + \lambda w = 0 \tag{4.1b}$$

odkud dostáváme

$$-\frac{u_2(c^*, l_s^*)}{u_1(c^*, l_s^*)} = w \tag{4.2}$$

Domácnost tedy nabízí práci, dokud se mezní míra substituce práce a spotřeby nesrovná se mzdou. Pro dané funkce u a f vyřešíme optimální volbu l_d^*, l_s^* a w^*.

Příklad 4.1. Nalezněte optimum domácnosti s preferencemi tvaru $u(c, l) = \ln(c) + \ln(1 - l)$ a s produkční funkcí tvaru $f(l) = Al^\alpha$.

a) $l_d^* =?$

b) $\pi^* =?$

c) $l_s^* =?$

d) $w^* =?$

e) $l_s^* = l_d^* =?$

f) komparativní statika, např. $\frac{\partial w^*}{\partial A}$, $\frac{\partial l_s^*}{\partial w^*}$, $\frac{\partial l_d^*}{\partial w^*}$

4.2 Mezičasová volba práce

Dále rozvineme model dvou období z předchozí kapitoly. Jediným rozdílem bude to, že důchod domácnosti už nebude exogenní veličinou, ale domácnost jej bude produkovat: $y_t = f(l_t)$. Optimalizační problém domácnosti je tedy tvaru:

$$\max_{c_1, c_2, l_1, l_2, b_1} \{u(c_1, l_1) + \beta u(c_2, l_2)\}$$
$$Pf(l_1) = Pc_1 + b_1$$
$$Pf(l_2) + b_1(1 + R) = Pc_2$$

Příslušný Lagrangean a podmínky optimality jsou tedy náseldující:

$$\mathcal{L} = u(c_1, l_1) + \beta u(c_2, l_2) + \lambda_1[Pf(l_1) - Pc_1 - b_1] + \lambda_2[Pf(l_2) + b_1(1+R) - Pc_2]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u_1(c_1^*, l_1^*) - \lambda_1^* P = 0 \tag{4.3a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta u_1(c_2^*, l_2^*) - \lambda_2^* P = 0 \tag{4.3b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_1} = u_2(c_1^*, l_1^*) + \lambda_1^* P f'(l_1^*) = 0 \tag{4.3c}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_2} = \beta u_2(c_2^*, l_2^*) + \lambda_2^* P f'(l_2^*) = 0 \tag{4.3d}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_1} = -\lambda_1^* + \lambda_2^*(1+R) = 0 \tag{4.3e}$$

Z prvních dvou rovnic, a posléze z posledních dvou rovnic, vyjádříme λ_1^* a λ_2^* a dosadíme do poslední rovnice. Výsledkem jsou následující dvě Eulerovy rovnice:

$$\frac{u_1(c_1^*, l_1^*)}{u_1(c_2^*, l_2^*)} = \beta(1+R)$$

$$\frac{u_2(c_1^*, l_1^*)}{u_2(c_2^*, l_2^*)} = \beta(1+R)\frac{f'(l_1^*)}{f'(l_2^*)}$$

Příklad 4.2. Nalezněte optimum domácnosti s preferencemi tvaru $u(c, l) = \ln(c) + \ln(1-l)$ a s produkční funkcí tvaru $f(l) = Al^\alpha$.

4.3 Cvičení

Příklad 4.3. V ekonomice je 1100 domácností. 400 z nich je typu a, 700 je typu b. Domácnosti poptávají l_d^a resp. l_d^b jednotek práce v hodinách, nabízejí l_s^a resp. l_s^b jednotek práce. Domácnosti najímají zaměstnance na vlastní farmu, samy pracují na ostatních farmách. V ekonomice je mzda w. Preference domácností jsou tvaru: $u(c, l) = \ln(c) + \ln(24 - l)$. Produkční funkce u typu a je: $y_a = \sqrt{l_d^a}$, u typu b: $y_b = 2\sqrt{l_d^b}$.

a) Nalezněte optimální množství poptávané práce l_d^{a*} a l_d^{b*} jako funkce mzdy w.

b) Vypočtěte zisk farmáře typu a i b jakožto funkci mzdy w, označte jej π^{*a} resp. π^{*b}.

c) Užijte rozpočtového omezení farmářů typu a i b a určete optimální množství nabízené práce l_s^{a*} a l_s^{b*} jako funkce mzdy w.

d) Určete agregátní nabídku práce a agregátní poptávku po práci (jsou součtem jednotlivých nabídek, resp. poptávek všech domácností) jako funkce dané mzdy w. Nazvěte je L_s^* resp. L_d^*.

e) Na základě agregátní nabídky práce a agregátní poptávky po práci určete rovnovážnou mzdu w^*.

Příklad 4.4. V ekonomice je spousta stejných domácností. Každá domácnost má firmu, která využívá kapitál k a práci l_d, aby vyprodukovala výstup y. Produkční funkce je tvaru: $y = Ak^{3/10}(l_d)^{7/10}$. Zásoba kapitálu je fixní. Domácnost najímá práci l_d, domácnost může také pracovat l_s hodin, v ekonomice je mzda w. Preference domácnosti jsou tvaru $u(c, l_s) = \sqrt{c}\sqrt{1 - l_s}$

a) Určete optimální množství poptávané práce l_d^* jako funkci kapitálu k a mzdy w.

b) Vypočtěte zisk domácnosti π^*.

c) Formulujte optimalizační problém domácnosti při daných preferencích.

d) Odvoďte optimální nabídku práce l_s^*.

e) Určete rovnovážnou mzdu w^*.

f) Jak se mění rovnovážná mzda, když se mění dostupné množství kapitálu?

5. Inflace

Ve většině zemí má všeobecná cenová hladina tendenci k růstu. Tento jev označujeme inflace. V této kapitole budeme zkoumat inflaci ve vztahu k množství peněz v ekonomice. Množství peněz je určenou nabídkou peněz a poptávkou po penězích. Co jsou to ale peníze? Je to všeobecně uznávaný prostředek směny v ekonomice ($\Rightarrow$ peněžní agregáty). Většinou budeme za peníze považovat agregát $M1$. Budeme předpokládat, že oběživo a vklady na požádání jsou pod přímou kontrolou centrální banky.

M_t bude celkové množství peněz v čase t, Y_t celkové nákupy ve spotřebních statcích, P_t cenová hladina a V_t rychlost peněz. Celkové nákupy stojí P_tY_t korun, ale každá koruna se otočí vícekrát. Je tedy poptáváno pouze $M_t^D = \frac{P_tY_t}{V_t}$ korun. V rovnováze je nabídka peněz rovna poptávce po penězích, tedy dostáváme vztah $M_tV_t = P_tY_t$, což je kvantitativní rovnice směny. Ta dává do vztahu množství peněz a cenovou hladinu, ale nevysvětluje inflaci.

5.1 Kvantitativní teorie

Nyní výše uvedené účetní identitě přidáme teoretické pozadí.

- Budeme předpokládat, že V_t a Y_t jsou dány, jsou konstantní, určené nezávisle na M_t a na P_t
- Dále budeme předpokládat, že $V_t = V$
- CB řídí M_t, takže se pohybuje pouze P_t
- CB má tedy kontrolu nad cenovou hladinou, která se mění úměrně změnám v nabídce peněz: $P_t = \frac{M_tV}{Y_t}$

Víme, že

$$1 + \pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Podělíme-li kvantitativní rovnice pro dva následné časy dostaneme

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{M_t V Y_{t-1}}{M_{t-1} V Y_t}$$

Odtud tedy

$$1 + \pi_t = \frac{M_t}{M_{t-1}} \frac{Y_{t-1}}{Y_t}$$

Po zlogaritmování a užití aproximace $\ln(1+x) \approx x$ pro malá x, dostáváme

$$\pi_t \approx (\ln M_t - \ln M_{t-1}) - (\ln Y_t - \ln Y_{t-1})$$

Tedy míra inflace je zhruba rovna rozdílu mezi tempem růstu peněžní nabídky a tempem růstu výstupu. Roste-li výstup a nabídka peněz se nemění, ceny musí klesat.

Na datech zemí je v čase patrná větší variabilita růstu peněžní nabídky než produkce. Z toho lze usoudit, že změny inflace se dají přisoudit změnám v růstu peněžní nabídky.

Kvantitativní teorie sice vysvětluje příčiny inflace, ale neurčuje její dopady. Předpokládali jsme, že M_t a P_t jsou nezávislé na ostatních proměnných v ekonomice. Inflace je všeobecně považována za nežádoucí jev. Abychom viděli proč, musíme určit dopady inflace na reálné proměnné (důchod, spotřeba), což nelze v rámci kvantitativní rovnice, protože ta žádné reálné dopady nepředpokládá. Nyní tedy některé zjednodušující předpoklady opustíme.

5.2 Cash-in-advance model

Bude se jednat o rovnovážný model s optimalizujícími spotřebiteli a s monetárním sektorem.

- mnoho identických spotřebitelů žijících nekonečně dlouho
- reprezentativní spotřebitel volí spotřebu c_t, nabídku práce l_t, úspory s_{t+1} a držbu peněz m_{t+1}

- užitková funkce je tvaru $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t[\ln(c_t) + \ln(1 - l_t)]$
- existuje pouze 1 spotřební statek, spotřebitel vyrábí výstup technologií $y_t = l_t$
- neexistuje bankovní sektor, centrální banka dává peníze přímo spotřebitelům jako transfer $\tau_t > 0$ nebo jim je sebere formou zdanění $\tau_t < 0$
- R_t je nominální úroková míra, P_t cenová hladina

Rozpočtové omezení spotřebitele je tedy tvaru

$$m_{t+1} + s_{t+1} = m_t + (1 + R)s_t + P_t l_t + \tau_t - P c_t$$

Tedy všchno, co domácnost nesní, buďto investuje s_{t+1} nebo si nechá jako hotovost na příští období m_{t+1}. Spotřebitel drží hotovost nenesoucí úrok proto, aby mohl nakupovat spotřební statky, protože vlastní produkci nespotřebovává a musí nakupovat na trhu.

Tedy nemůže na trhu utratit více, než drží v hotovosti: $P_t c_t \leq m_t$ a v optimu to utratí všechno, protože jinak by přicházel o úrok. Tomuto omezení se říká ”cash-in-advance”, protože hotovost na nákup bylo třeba odložit již v předchozím období. V této ekonomice se spotřeba rovná produkci, tedy po agregaci dostáváme kvantitativní rovnici s rychlostí 1.

Náš model si můžeme představit následovně. Domácnost tvoří muž a žena. Každé ráno jde muž do práce a prodává svoji produkci spotřebitelům. Domů se vrací pozdě v noci, takže ten den vydělané peníze už neutratí. Žena odchází brzy ráno nakupovat a utrácí peníze, které muž donesl předchozí den. Přes den se navzájem nepotkávají.

Optimalizační problém reprezentativního agenta je následující:

$$\max_{\{c_t, l_t, s_{t+1}, m_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t[\ln(c_t) + \ln(1 - l_t)] :$$

$$P_t c_t = m_t$$

$$m_{t+1} + s_{t+1} = m_t + (1 + R)s_t + P_t l_t + \tau_t - P c_t$$

Nyní specifikujeme monetární politiku centrální banky. m_t bude pro jednoduchost množství peněz na spotřebitele, centrální banka zvyšuje peněžní zásobu konstantním tempem g. Tedy

$$m_{t+1} = m_t + \tau_t = m_t(1+g)$$

Ještě přidáme 3 podmínky vyčištění trhů. Spotřeba se musí rovnat produkci, tj. $c_t = l_t$. Celkové půjčky se rovnají celkovým úsporám, ale všichni agenti jsou stejní, tedy musí platit, že $s_t = 0$. Zdá se, že úspory bychom mohli z modelu vypustit, ale poslouží nám k určení rovnovážné úrokové míry. Dále se nabídka peněz musí rovnat poptávce po penězích.

To, že lidé žijí nekonečně dlouho, je vlastně zjednodušením, které nám umožní model vyřešit. Svět je stejný v každé periodě – spotřebiteli vždy zbývá nekonečně mnoho období, volí pouze množství poněz do dalšího období (úspory jsou v rovnováze rovny nule). Cenová hladina je proporcionální peněžní zásobě, tedy spotřebitel vždy kupuje stejné množství spotřebních statků. V rovnováze je c_t, l_t i R_t konstantní.

Omezení "cash-in-advance" pro konstantní spotřebu c^* je tvaru $Pc^* = m_t$ a pro $1+\pi = P_{t+1}/P_t$ dostáváme

$$1+\pi = \frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{M_{t+1}}{M_t} = \frac{(1+g)m_t}{m_t} = 1+g$$

Tedy inflace je rovna tempu růstu peněžní nabídky, protože stejně jako v kvantitativní rovnici předpokládáme konstantní rychlost peněz. Protože "cash in advance" model je vlastně kvantitativní rovnicí, museli jsme dojít ke stejnému výsledku.

Jak ale optimální spotřeba závisí na inflaci a monetární politice? Použijeme opět Lagrangeanu:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{[\ln(c_t) + \ln(1-l_t)] + \mu_t(m_t - P_t c_t)$$
$$+\lambda_t[m_t + (1+R)s_t + P_t l_t + \tau_t - Pc_t - m_{t+1} - s_{t+1}]\ \}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} &= \frac{\beta^t}{c_t^*} - \beta^t(\mu_t + \lambda_t)P_t = 0 && \text{(5.1a)}\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_t} &= -\frac{\beta^t}{1 - l_t^*} + \beta^t \lambda_t P_t = 0 && \text{(5.1b)}\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_{t+1}} &= -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1}\lambda_{t+1}(1 + R_{t+1}) = 0 && \text{(5.1c)}\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{t+1}} &= -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1}(\mu_{t+1} + \lambda_{t+1}) = 0 && \text{(5.1d)}
\end{aligned}$$

Nyní budeme předpokládat, že v rovnováze je spotřeba, práce i úroková míra konstantní (c^*, l^*, R^*). Pokud by tomu tak nebylo, došli bychom časem ke sporu. Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^*} &= (\mu_t + \lambda_t)P_t && \text{(5.2a)}\\
\frac{1}{1 - l^*} &= \lambda_t P_t && \text{(5.2b)}\\
\lambda_t &= \beta\lambda_{t+1}(1 + R) && \text{(5.2c)}\\
\lambda_t &= \beta(\mu_{t+1} + \lambda_{t+1}) && \text{(5.2d)}
\end{aligned}$$

Z druhé rovnice dosadíme za λ do třetí rovnice a dostaneme:

$$\frac{1}{P_t(1 - l^*)} = \frac{1}{P_{t+1}(1 - l^*)}\beta(1 + R) \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \pi_t = \beta(1 + R)$$

Již víme, že $\pi = g$, tedy

$$1 + R = \frac{1 + \pi}{\beta} = \frac{1 + g}{\beta} \tag{5.3}$$

Nominální úroková míra se tedy pohybuje proporcionálně tempu růstu peněžní nabídky g.

Pro reálnou úrokovou míru r dostáváme

$$1 + r = \frac{1 + R}{1 + \pi} = \frac{1}{\beta} \tag{5.4}$$

Rovnice (5.4) je verzí Eulerovy rovnice odvozené dříve v ”nekonečném” modelu. Spotřeba je konstantní, tedy mezní užitky z ní zmizely.

Nyní vyšetříme dopady inflace na spotřebu. S pomocí rovnic (5.2a) a (5.2b) vyeliminujeme multiplikátory z rovnice (5.2d) a získáme:

$$\frac{1}{(1-l^*)P_t} = \beta \frac{1}{c^* P_{t+1}}$$

a po dosazení podmínky $c^* = l^*$ dostáváme

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + \pi_t = \beta \frac{1-c^*}{c^*}$$

a po dosazení $\pi = g$ dostáváme c^*:

$$c^* = \frac{\beta}{1+g+\beta} \tag{5.5}$$

Rovnice (5.5) říká, že spotřeba závisí inverzně na tempu růstu peněží nabídky, tudíž spotřeba a inflace se pohybují opačným směrem. Je to proto, že inflace ničí podněty k práci, poněvadž důchod vydělaný dnes, lze utratit až zítra a peníze přes noc ztrácí hodnotu. Protože v rovnováze je spotřeba rovna práci, je tedy nižší i spotřeba.

Nyní odvodíme, jaké tempo g zvolí centrální banka. V rovnováze je $c = l$, což dosadíme do užitkové funkce, sestavíme podmínku pro optimum a zpětně pak dopočteme g. Celkový užitek je tvaru:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln(c) + \ln(1-c)] = \frac{1}{1-\beta}[\ln(c) + \ln(1-c)]$$

První derivace podle spotřeby je:

$$\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{c^*} - \frac{1}{1-c^*}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c^* = \frac{1}{2}$$

což nyní dosadíme do rovnice (5.5) a dostaneme, čemu je rovno g^*:

$$g^* = \beta - 1$$

Protože diskontní faktor β je mezi nulou a jedničkou, znamená to, že optimální monetární politika má zmenšovat peněžní nabídku. Pokud dále použijeme rovnici (5.3), dostaneme

$$1 + R = \frac{1+g^*}{\beta} = \frac{1+(\beta-1)}{\beta} = 1$$

To znamená, že nominální úroková míra je nulová. Tato skutečnost je dána omezením ”cash-in-advance”. Spotřebitelé jsou nuceni držet aktivum hotovost, aby mohli nakupovat. Kdyby peníze nebyly na koupi spotřebních statků potřeba a úroková míra by byla kladná, pak by všichni chtěli spořit a ne držet hotovost. Ale pokud je nominální úroková míra nulová, hotovost i úspory dávají stejný nomiální ”výnos”. Protože v rovnováze ceny klesnou, tak si držitelé peněz mohou zítra koupit více zboží než dnes. Tedy reálná úroková míra peněz je kladná. Doporoučení nulové nominální úrokové míry se označuje jako Friedmanovo pravidlo.

Na závěr tedy ještě shrneme výsledky modelu:

- tempo růstu peněžní nabídky se rovná míře inflace
- nominální úroková míra se mění proporcionálně s inflací
- mezi výstupem a inflací je inverzní vztah

5.3 Cvičení

Příklad 5.1. Uvažujme takovou ekonomiku, že $V = 5$, výstup roste tempem 3% za rok a peněžní nabídka roste tempem 5% za rok. Jaká je roční míra inflace?

[2%]

6. Hospodářský cyklus

6.1 Šoky a šířící mechanismus

Hospodářský cyklus – opakující se fluktuace reálného HDP v čase.

Šoky

- Technologický šok
- Počasí a přírodní katastrofy
- Monetární šok
- Politický šok
- Změna vkusu

Jsou dostatečné pro vysvětlení hospodářského cyklu? (Např. v USA spadl reálný HDP o 2.8% mezi říjnem 1981 a 1982).

Šířící mechanismy

- Mezičasová substituce
- Nepružné ceny (sticky prices)
- Frikce ve finančním sektoru

Dvě skupiny modelů

- hospodářský cyklus = selhání ekonomického systému, příčiny: finanční krize, strnulé ceny, technologické šoky, monetární šoky
- hospodářský cyklus = optimální reakce ekonomiky na šoky, hlavní příčina fluktuací technologické šoky (real business cycle models)

”velké” krize $\times$ ”normální” cykly ???

6.2 Model reálného hospodářského cyklu

- model se spotřebiteli žijícími pouze dvě období (postačí pro objasnění základních myšlenek teorie cyklu)
- řada překrývajících se generací
- pracují v prvním období, kdy jsou mladí
- ve druhém období jsou staří a žijí z úspor
- horní index označuje rok narození spotřebitele, dolní index současný rok
- užitková funkce
$$u(c_t^t, c_{t+1}^t) = \ln(c_t^t) + \ln(c_{t+1}^t)$$
- mladý člověk nabízí jednu jednotku práce a dostává mzdu w_t
- rozpočtové omezení mladého pracovníka
$$c_t^t + k_t = w_t$$
- důchodce půjčuje úspory k_t firmám, firma je použije jako kapitál a vyplácí rentu r_{t+1}, δ procent kapitálu se opotřebuje
- rozpočtové omezení důchdce
$$c_{t+1}^t = (1 - \delta + r_{t+1})k_t$$

Optimalizační problém domácnosti:

$$\max_{c_t^t, c_{t+1}^t, k_t} \{\ln(c_t^t) + \ln(c_{t+1}^t)\} :$$

$$c_t^t + k_t = w_t$$

$$c_{t+1}^t = (1 - \delta + r_{t+1})k_t$$

Po dosazení omezení do užitkové funkce

$$\max_{k_t}\{\ln(w_t - k_t) + \ln((1 - \delta + r_{t+1})k_t)\}$$

Podmínka optimality

$$\frac{\partial}{\partial k_t} = -\frac{1}{w_t - k_t} + \frac{1 - \delta + r_{t+1}}{(1 - \delta + r_{t+1})k_t} = 0$$

odkud

$$k_t = \frac{w_t}{2} \tag{6.1}$$

Bez ohledu na budoucí výnos kapitálu bude mladý spotřebitel spořit polovinu mzdy.

- konkurenční firma vyrábí výstup s kapitálem k_{t-1} a prací l_t
- práce je nabízena mladým spotřebitelem, kapitál starým
- produkční funkce s konstantními výnosy z rozsahu (Cobb-Douglas):

$$f(l_t, k_{t-1}) = A_t l_t^\alpha k_{t-1}^{1-\alpha}$$

Maximalizační problém firmy v čase t:

$$\max_{l_t, k_{t-1}} \left\{A_t l_t^\alpha k_{t-1}^{1-\alpha} - w_t l_t - r_t k_{t-1}\right\}$$

Podmínky prvního řádu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l_t} &= A_t \alpha l_t^{\alpha-1} k_{t-1}^{1-\alpha} - w_t = 0 \\ \frac{\partial}{\partial k_{t-1}} &= A_t(1-\alpha) l_t^\alpha k_{t-1}^{-\alpha} - r_t = 0 \end{aligned}$$

Po dosazení $l_t = 1$

$$\begin{aligned} w_t &= A_t \alpha k_{t-1}^{1-\alpha} && (6.3a) \\ r_t &= A_t (1-\alpha) k_{t-1}^{-\alpha} && (6.3b) \end{aligned}$$

Mzda je úměrná parametru produktivity $A_t \Rightarrow$ mzdy jsou procyklické.

Podmínky vyčištění trhů zboží, práce a kapitálu.

- Trh práce: $l_t = 1$
- Trh kapitálu: implicitně zahrnuto
- Trh zboží:

$$c_t^t + c_t^{t-1} + k_t = A_t l_t^\alpha k_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta) k_{t-1}$$

Po dosazení optimální volby úspor (6.1) do vztahu (6.3a)

$$k_t = \frac{1}{2} A_t \alpha k_{t-1}^{1-\alpha} \tag{6.4}$$

Šoky do A_t mají přímý vliv na k_t, což je kapitál pro výrobu v příštím období $\Rightarrow$ příští produkce bude nižší.

Agregátní spotřeba a investice v reakci na šok – podmínka vyčištění trhu:

$$c_t^t + c_t^{t-1} + k_t - (1-\delta) k_{t-1} = A_t l_t^\alpha k_{t-1}^{1-\alpha}$$

Vpravo je produkce $Y_t = A_t l_t^\alpha k_{t-1}^{1-\alpha}$, vlevo agregátní spotřeba $C_t = c_t^t + c_t^{t-1}$ a celkové investice $I_t = k_t - (1-\delta) k_{t-1}$. Pro $l_t = 1$:

$$\begin{aligned} C_t &= Y_t - I_t = A_t l_t^\alpha k_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} - k_t = \\ &= A_t l_t^\alpha k_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} - \frac{1}{2} A_t \alpha k_{t-1}^{1-\alpha} = \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) A_t k_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} && (6.5) \\ I_t &= Y_t - C_t = A_t l_t^\alpha k_{t-1}^{1-\alpha} - (1 - \frac{\alpha}{2}) A_t k_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} = \\ &= \frac{1}{2} A_t \alpha k_{t-1}^{1-\alpha} - (1-\delta) k_{t-1} && (6.6) \end{aligned}$$

Jak se mění spotřeba a investice v reakci na změnu technologie? Elasticita x v reakci na y se definuje jako $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{y}{x}$.
Elasticita spotřeby vzhledem k produktivitě:

$$\frac{\partial C_t}{\partial A_t}\frac{A_t}{C_t} = \frac{(1-\alpha/2)A_t k_{t-1}^{1-\alpha}}{(1-\alpha/2)A_t k_{t-1}^{1-\alpha} + (1-\delta)k_{t-1}} < 1$$

Elasticita investic:

$$\frac{\partial I_t}{\partial A_t}\frac{A_t}{I_t} = \frac{1/2 A_t \alpha k_{t-1}^{1-\alpha}}{1/2 A_t \alpha k_{t-1}^{1-\alpha} - (1-\delta)k_{t-1}} > 1$$

$\Rightarrow$ relativní změna investic je větší než relativní změna spotřeby

6.3 Simulace

Pro lepší představu si náš model nasimulujeme. Specifikujeme hodnoty parametrů: $\alpha = 0.7$, $\delta = 0.05$. Parametr α představuje podíl mezd na celkové produkci. Tyto hodnoty zhruba odpovídají reálným údajům. Dále určíme počáteční zásobu kapitálu $k_0 = 0.22$ a parametr produktivity se bude vyvíjet jako

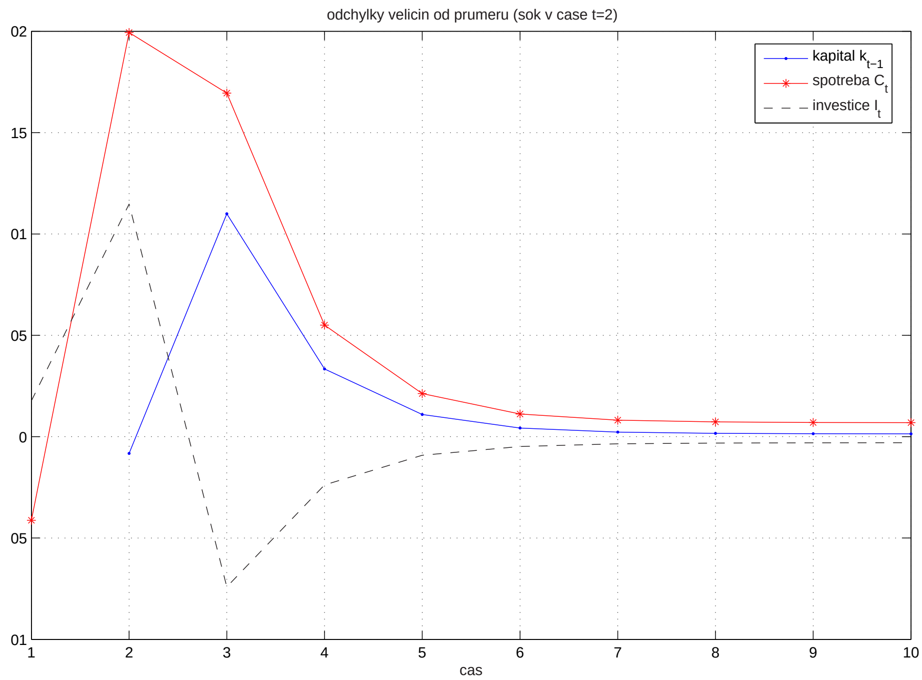
$$A_t = \overline{A} + \varepsilon_t$$

kde $\overline{A}$ je prmůměrná úroveň produktivity, ε_t je náhodný šok. Položíme $\overline{A} = 1$. Šok ε_t bude nasimulován, jeho složky budou nezávislé, rovnoměrně rozložené na intervalu $\langle -0.1; 0.1\rangle$, tedy bude ovlivňovat produktivitu v mezích $\pm 10\%$.

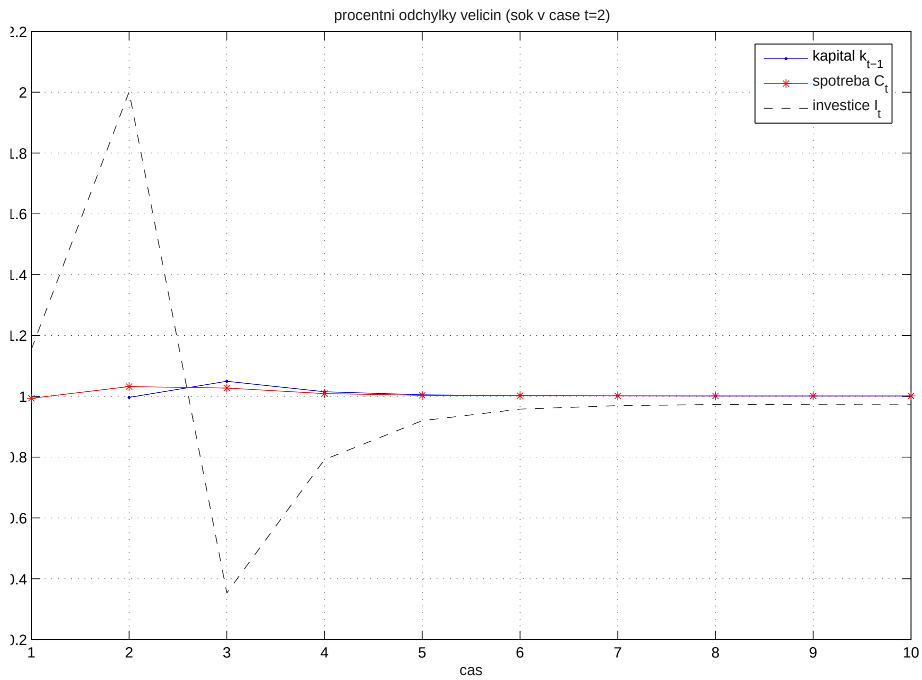
Nejprve prozkoumáme vliv izolovaného šoku – konkrétně pětiprocentní pozitivní technologický šok v čase $t = 2$ (viz obrázky 6.1 a 6.2). Potom nasimulujeme celou řadu technologických šoků v rozmezí $\pm 10\%$ (viz obrázky 6.3 a 6.4).

6.4 Hodrick-Prescottův filtr

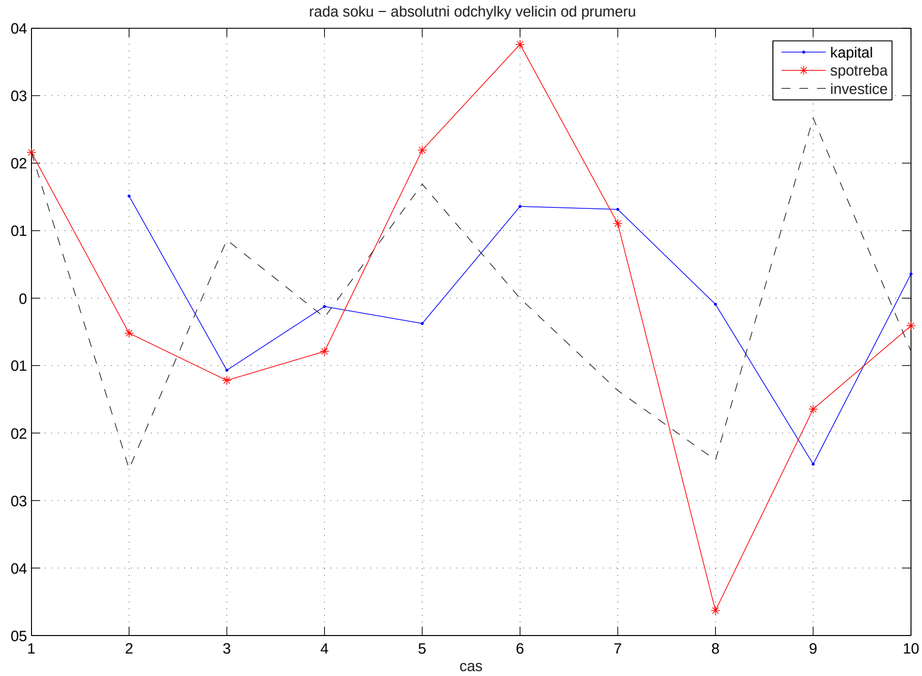
Filtrace = rozklad časové řady na trendovou a cyklickou složku. Hodrick-Prescottův filtr je makroekonomy často používaná vyhlazovací metoda, která dává odhad dlouhodobé trendové složky časové řady.



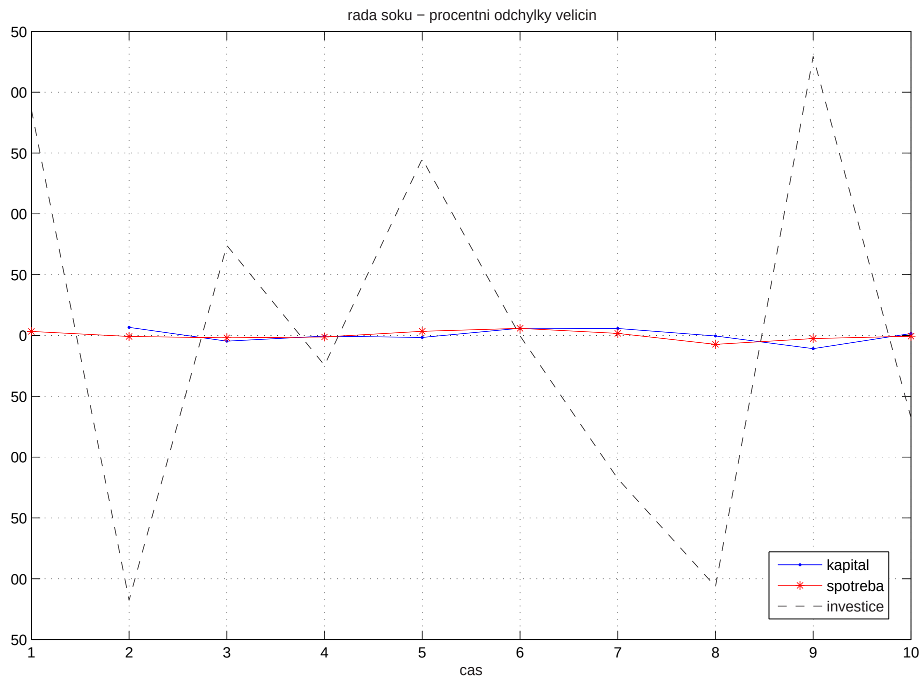
Obrázek 6.1: Šok v čase $t = 2$ – absolutní odchylky veličin od průměru



Obrázek 6.2: Šok v čase $t = 2$ – relativní odchylky veličin od průměru



Obrázek 6.3: Řada šoků – absolutní odchylky veličin od průměru



Obrázek 6.4: Řada šoků – relativní odchylky veličin od průměru

Používáme jej na logaritmované řady (např. HDP), abychom dostali cyklickou složku řady jako procentní odchylku od trendu (veličinu v procentním vyjádření již nelogaritmujeme).

Máme-li řadu Y_t, pak ji lze zapsat jako

$$Y_t = \overline{Y}_t(1 + \hat{y}_t)$$

kde $\overline{Y}_t$ je trendová složka a $\hat{y}_t$ je složka cyklická (procentní odchylka). Po zlogaritmování, po užití aproximace, že $\ln(1+x) \approx x$ pro malá x, a po následném přeznačení ($y_t = \ln Y_t$, $\overline{y}_t = \ln \overline{Y}_t$) dostaneme:

$$\ln Y_t = \ln \overline{Y}_t + \ln(1 + \hat{y}_t)$$

$$y_t = \overline{y}_t + \hat{y}_t$$

kde se předpokládá

$$\Delta\overline{y}_t = \Delta\overline{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\hat{y}_t = \omega_t$$

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),\ \omega_t \sim WN(0, \sigma_\omega^2)$$

Jediný parametr, který je třeba nastavit, je poměr λ rozptylu cyklické a trendové složky:

$$\lambda = \frac{\sigma_\omega^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$

Čím větší je λ, tím více je trend vyhlazen. Je-li λ blízko nekonečnu, trend je lineární. Je-li naopak blízko nule, trend sleduje původní data. Podle autorů filtru je vhodné volit λ následovně: pro roční data 100, pro čtvrtletní data 1600 a pro měsíční data 14400.

Praktické použití HP-filtru v Matlabu (funkce hp.m):

```
[trend,cykl]=hp(data,λ)
```

6.5 Cvičení

Příklad 6.1. Jak slovo cyklus naznačuje, hospodářský cyklus je považován za pravidelný opakující se jev. Předpokládalo se, že délka a průběh cyklu jsou zhruba konstantní. Např. že délka typického cyklu (od boomu přes recesi zpět na vrchol) je mezi pěti až sedmi lety. V této části ověříte, zdali se hospodářský cyklus vámi zvolené země chová podle uvedené představy. Prvním úkolem tedy bude stáhnout si někde časovou řadu reálného HDP. Např. na

http://195.145.59.167/ISAPI/LogIn.dll/login?lg=e
http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt61_form.php

Dále je třeba spočítat trendovou složku časové řady. Použijeme např. Hodrick-Prescotův filtr, nebo můžeme např. použít exponenciální vyrovnání.

Příklad 6.2. Nyní prozkoumáme cyklickou složku HDP, což je rozdíl mezi HDP a trendem. Protože nás zajímají relativní změny, budeme se tedy zajímat o změny logaritmů. Vypočtěte tedy cyklickou složku HDP (v procentním vyjádření) jako $\ln(\mathrm{HDP}) - \ln(\mathrm{Trend})$ a vykreslete ji do obrázku.

Příklad 6.3. Řekněme, že vrcholem rozumíme období, kdy je cyklická složka vyšší než v předchozích dvou obdobích, a cyklem budeme rozumět čas mezi dvěma vrcholy. Kolik cyklů řada obsahuje? Jaká je průměrná délka cyklu? Jak dlouho trvá nejkratší a nejdelší cyklus? Vypadají cykly podobně, pokud se týče amplitudy, trvání, tvaru?

Příklad 6.4. DÚ Stáhněte si někde údaje o HDP vybrané země a analyzujte hospodářský cyklus této země. Využijte postupu prováděném v předchozích třech příkladech. Postup práce a dosažené výsledky patřičně okomentujte, uveďte do souvislosti s významnými hospodářskými událostmi daného období a dokumentujte pomocí obrázků z Matlabu. Nezapomeňte si práci podepsat, uvést svoje UČO, dále uvést název práce, PŘESNÝ ZDROJ a popis dat, závěr práce. Spolu s prací odevzdáte také zdrojový soubor s daty a m-file s analýzou cyklu. Předpokládaný rozsah práce 2-3 strany. Termín odevzdání 10.11.2005.

Příklad 6.5. V tomto modelu budeme mít agenty žijící pouze jedno období. V každém čase se narodí jeden agent, v dalším období přežívá jeho potomek. Agenta zajímá spotřeba c_t a budoucí kapitál k_{t+1}, který zanechá potomkovi. Užitková funkce je tvaru

$$\ln(c_t) + A\ln(k_{t+1})$$

kde $A > 0$ je parametr. Agent používá kapitál po rodiči na spotřebu a investice, přičemž má takto omezené zdroje:

$$c_t + i_t = \sqrt{Bk_t} + \varepsilon_t$$

kde $B > 0$ je parametr, ε_t je náhodný šok do produkční funkce. Agent zná šok v čase narození, je to tedy pro něj konstanta. Vývoj množství kapitálu je dán takto:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

kde $\delta \in (0,1)$ je míra depreciace.

Vypočtěte optimální spotřebu a investice jako funkce k_t a ε_t.

Příklad 6.6. Nyní budeme chtít porovnat chování modelu s reálným světem. Proto musíme nastavit parametry modelu. Parametr B jen mění měřítko, nastavíme ho tedy např. na 0.1. Dále zvolíme míru depreciace $\delta = 0.05$. Parametr A určuje relativní poměr c_t a k_t v rovnováze, tedy nastavíme např. $A = 4$. S použitím těchto hodnot prozkoumejte a porovnejte reakce c_t a i_t na změny ε_t.

Příklad 6.7. Nyní v naší modelové ekonomice nasimulujeme hospodářský cyklus. Je třeba určit počáteční stav kapitálu, zvolíme např. $k_1 = 3.7$. Nagenerujte 50 náhodných rovnoměrně rozložených čísel na intervalu $(0,1)$ s využitím matlabovské funkce `rand`. Použijte vztahů pro c_t, i_t a k_{t+1} a nasimulujte chování ekonomiky. Do jednoho obrázku vykreslete vývoj spotřeby a investic a srovnejte vývoj a volatilitu těchto řad. Vykreslete HDP jako součet spotřeby a investic, srovnejte hospodářské cykly s těmi z reálných údajů.

7. Hospodářský růst

7.1 Fakta

Nicholas Kaldor – ”stylizovaná fakta”.

- produkce na hlavu i kapitál na hlavu v čase rostou obdobným tempem (podíl kapitálové zásoby na produktu se v čase příliš nemění)
- výnos kapitálu je v čase téměř konstantní
- podíl práce i kapitálu na tvorbě důchodu je téměř konstantní

Kaldorova fakta platí i v dlouhém časovém období.

- konvergence HDP na osobu v různých zemích a oblastech v čase
- neexistují žádné pozorované skutečnosti společné industrializovaným i rozvojovým zemím.

7.2 Solowův model

Agregátní produkční funkce

- extensivní tvar: $Y = f(K, L)$
- intenzivní tvar: $y = f(k)$kde $y = Y/L$, $k = K/L$
- konstantní výnosy z rozsahu
- klesající mezní produkt kapitálu

Úspory a kapitálová akumulace

- Odříci si dnes = vyrobit zítra více
- $S = I$
- $S = sY \;\Rightarrow\; I/L = S/L = sY/L = sy = sf(k)$

Depreciace a ustálený stav

- δ je míra depreciace kapitálu
- λ označuje tempo růstu populace, pro zatím je rovna nule
- v ustáleném stavu je $\Delta k = 0$, tj. kapitálová intenzita ani produkce na hlavu se nemění – viz obr. 7.1

7.2.1 Konstantní populace i technologie

$$\Delta k = \frac{\partial k}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial k}{\partial L}\Delta L = \frac{1}{L}\Delta K - \frac{K}{L^2}\Delta L$$

$$\Delta k = \frac{I - \delta K}{L} - \frac{K}{L}\frac{\Delta L}{L} = \frac{S}{L} - \delta\frac{K}{L} - \lambda\frac{K}{L} = sy - \delta k - \lambda k = 0$$

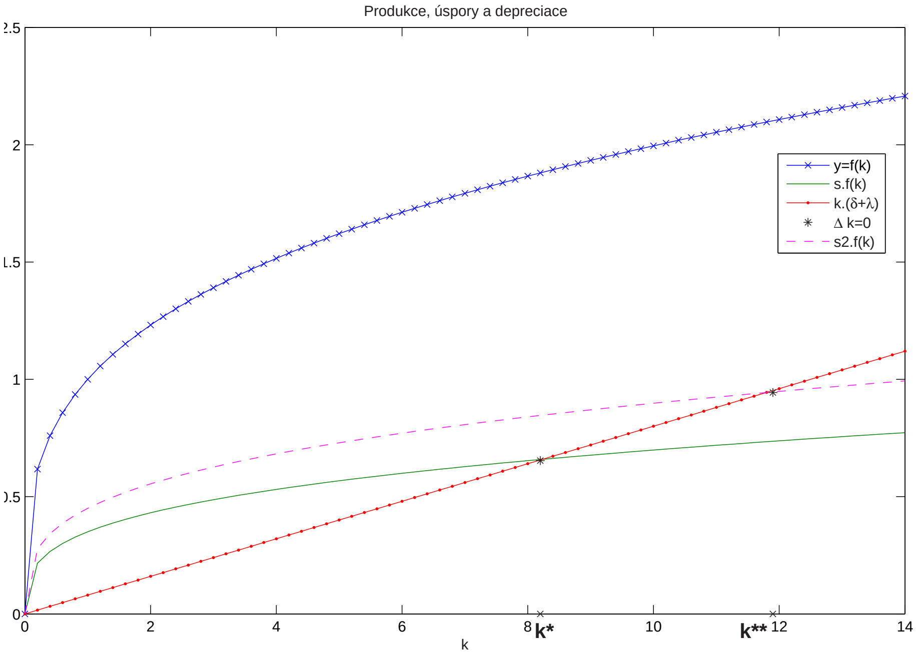
$$sy = k(\delta + \lambda),\ \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{k} = \frac{sy}{\delta}$$

Role úspor

- zvýší-li se míra úspor, roste kapitálová intenzita a produkce na hlavu

Zlaté pravidlo

- cílem není rostoucí produkce na hlavu, ale spotřeba
- maximalizace vzdálenosti mezi produkční funkcí a přímkou depreciace (zbytek jsou investice)
- zderivujeme rozdíl produkční funkce a depreciační přímky, a položíme ji rovnu nule (zatím $\lambda = 0$)
- $\frac{\partial}{\partial k}(f(k) - k(\delta + \lambda)) = f'(k) - (\delta + \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad MPK = \delta + \lambda = \delta$



Obrázek 7.1: Stabilní stav v Solowově modelu

7.2.2 Růst populace (bez technologického pokroku)

- populace roste kladným tempem λ
- v ustáleném stavu je K/L konstantní, tedy i Y/L je konstantní, tedy kapitál i produkce rostou stejným tempem
- $sy = k(\delta + \lambda) \quad \Rightarrow \quad \overline{k} = \frac{sy}{\delta+\lambda}$ (odvození viz výše)
- depreciační přímka se otáčí proti směru hodinových ručiček o úhel λ
- zvýšení tempa růstu populace snižuje kapitálovou intenzitu a produkci na hlavu
- zlaté pravidlo $MPK = \delta + \lambda$

7.2.3 Technologický pokrok

- technologický pokrok rostoucí tempem a
- $A \cdot L$ – efektivní práce

- vyjádření jako výše ale v jednotkách efektivní práce, tj. děleno $A \cdot L$ a ne pouze L

$$\Delta k = \frac{\partial k}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial k}{\partial L}\Delta L + \frac{\partial k}{\partial A}\Delta A = \frac{1}{L}\Delta K - \frac{K}{L^2}\Delta L - \frac{K}{LA^2}\Delta A$$
$$\Delta k = \frac{I - \delta K}{LA} - \frac{K}{LA}\frac{\Delta L}{L} - \frac{K}{LA}\frac{\Delta A}{A}$$
$$\Delta k = \frac{S}{LA} - \delta k - \lambda k - ak = sy - \delta k - \lambda k = 0$$
$$sy = k(\delta + \lambda + a),\ \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{k} = \frac{sy}{\delta + \lambda + a}$$

- v ustáleném stavu jsou $y = Y/(AL)$ a $k = K/(AL)$
- Y/L a K/L rostou tempem a
- Y a K rostou tempem $a + \lambda$
- Zlaté pravidlo $MPK = \delta + \lambda + a$

7.2.4 Růstové účetnictví

- přínosy jednotlivých faktorů
- odečteme-li průměrné tempo růstu práce a kapitálu od růstu produkce, zbyde nám přínos technologického pokroku, tzv. Solowovo reziduum, často třetina až polovina celkového tempa růstu
- jinak přínos technologického pokroku těžko měřit

7.3 Aplikace

- agregátní produkční funkce (konstantní výnosy z rozsahu)

$$Y_t = (A_t L_t)^{\alpha} K_{t-1}^{1-\alpha} \tag{7.1}$$

- domácnosti se rozhodují, kolik budou mít dětí a kolik budou spořit

- firmy zase rozhodují, kolik investují do výzkumu a vývoje, a tím tedy ovlivňují vývoj produktivity
- produktivita exogenně daná
- domácnosti investují fixní část důchodu v každém období

Kapitál se vyvíjí následovně:

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + I_t \tag{7.2}$$

kde I_t jsou investice, δ je míra depreciace a investice jsou fixní částí $0 < s < 1$ důchodu:

$$I_t = sY_t = s(A_tL_t)^\alpha K_{t-1}^{1-\alpha}$$

Předpokládáme, že produktivita a práce rostou konstantním tempem μ, resp. γ:

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= (1+\mu)A_t \\ L_{t+1} &= (1+\gamma)L_t \end{aligned}$$

Budeme uvažovat konkurenční firmu, jejíž optimalizační problém je tvaru:

$$\max_{L_t, K_{t-1}} \left\{ (A_tL_t)^\alpha K_{t-1}^{1-\alpha} - w_tL_t - r_tK_{t-1} \right\}$$

Podmínky prvního řádu vzhledem k práci a kapitálu jsou tvaru:

$$w_t = \alpha A_t^\alpha L_t^{\alpha-1} K_{t-1}^{1-\alpha} \tag{7.3}$$

$$r_t = (1-\alpha)(A_tL_t)^\alpha K_{t-1}^{-\alpha} \tag{7.4}$$

Podíl mezd a úroku na důchodu je konstantní:

$$\frac{w_tL_t}{Y_t} = \frac{\alpha A_t^\alpha L_t^{\alpha-1} K_{t-1}^{1-\alpha} L_t}{(A_tL_t)^\alpha K_{t-1}^{1-\alpha}} = \alpha \tag{7.5}$$

$$\frac{r_tK_{t-1}}{Y_t} = \frac{(1-\alpha)(A_tL_t)^\alpha K_{t-1}^{-\alpha} K_{t-1}}{(A_tL_t)^\alpha K_{t-1}^{1-\alpha}} = 1-\alpha \tag{7.6}$$

Všechny proměnné si vyjádříme v termínech efektivní práce. Označíme $y_t = Y_t/(A_tL_t)$, $k_{t-1} = K_{t-1}/(A_tL_t)$ a $i_t = I_t/(A_tL_t)$. Dosadíme-li $Y_t = y_tA_tL_t$ atd. do produkční funkce, dostaneme

$$y_tA_tL_t = (A_tL_t)^\alpha (k_{t-1}A_tL_t)^{1-\alpha}$$

tj.

$$y_t = k_{t-1}^{1-\alpha} \tag{7.7}$$

Ze vztahu (7.2) dostaneme

$$k_t(1+\mu)A_t(1+\gamma)L_t = (1-\delta)k_{t-1}A_tL_t + i_tA_tL_t$$

tj.

$$k_t(1+\mu)(1+\gamma) = (1-\delta)k_{t-1} + i_t \tag{7.8}$$

Investice jsou určeny vztahem:

$$i_t = sy_t = sk_{t-1}^{1-\alpha} \tag{7.9}$$

Dosadíme-li rovnici (9.24) do rovnice (7.8), dostaneme vztah popisující vývoj kapitálu v čase:

$$k_t = \frac{(1-\delta)k_{t-1} + sk_{t-1}^{1-\alpha}}{(1+\mu)(1+\gamma)} \tag{7.10}$$

Po podělení k_{t-1} dostaneme vztah popisující tempo růstu kapitálu na jednotku efektivní práce:

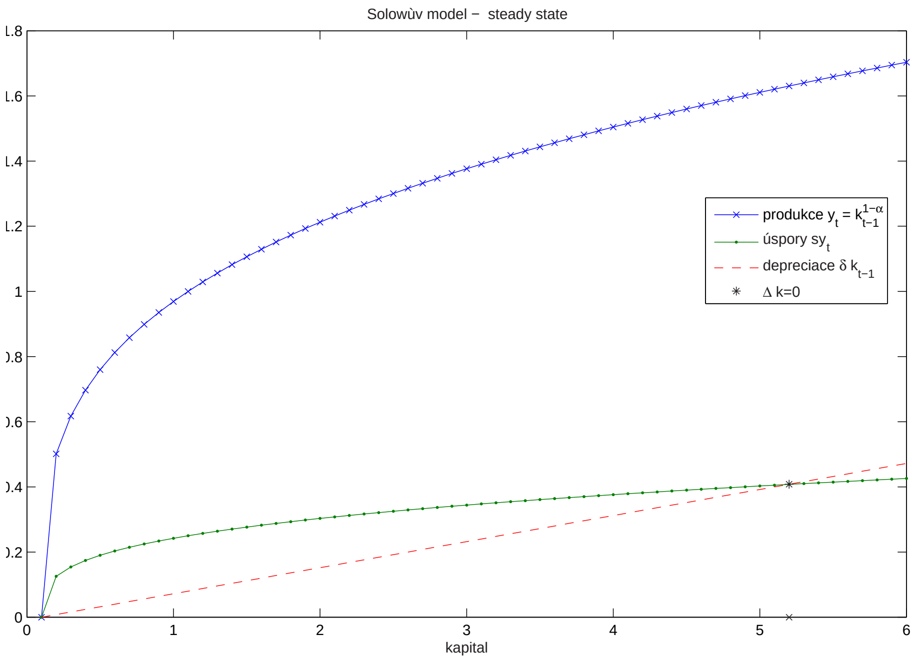
$$\frac{k_t}{k_{t-1}} = \frac{1-\delta+sk_{t-1}^{-\alpha}}{(1+\mu)(1+\gamma)} \tag{7.11}$$

- Míra růstu je inverzně závislá na kapitálové zásobě, protože exponent u k_{t-1} je záporný.
- Pokud má země nízkou úroveň kapitálu na jednotku efektivní práce, její kapitál, a tím i produkt roste rychleji.
- Model vysvětluje konvergenci HDP v zemích v čase.
- Protože tempo růstu klesá s k_{t-1}, existuje určitá úroveň, kdy kapitál na jednotku efektivní práce přestane růst.
- Říkáme, že ekonomika dosáhla ustáleného stavu (steady state). Pokud ekonomika tohoto stavu jednou dosáhne, zůstává v něm navždy.

Pro jednoduchost budeme pro tuto chvíli předpokládat, že práce a produktivita jsou konstantní, tj. že $\mu = \gamma = 0$. Potom se rovnice (7.10) zjednoduší do tvaru:

$$k_t - k_{t-1} = sk_{t-1}^{1-\alpha} - \delta k_{t-1}$$

Změna kapitálu na jednotku efektivní práce je rovna rozdílu mezi investicemi a depreciací.



Obrázek 7.2: Stabilní stav v Solowově modelu

V ustáleném stavu se k nemění, tj. $k_t = k_{t-1}$ a z rovnice (7.10) dostaneme:

$$\overline{k}(1+\mu)(1+\gamma) = (1-\delta)\overline{k} + s\overline{k}^{1-\alpha}$$

odkud

$$\overline{k} = \left(\frac{s}{\delta + \mu + \gamma + \mu\gamma}\right)^{1/\alpha}$$

S využitím tohoto vztahu vypočteme produkci a investice v ustáleném stavu:

$$\overline{y} = \overline{k}^{1-\alpha} = \left(\frac{s}{\delta + \mu + \gamma + \mu\gamma}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

$$\bar{i} = s \left(\frac{s}{\delta + \mu + \gamma + \mu\gamma} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

Tempo růstu kapitálu v ustáleném stavu je:

$$\frac{K_t}{K_{t-1}} = \frac{\bar{k}(1+\mu)A_t(1+\gamma)L_t}{\bar{k}A_tL_t} = (1+\mu)(1+\gamma)$$

- Dlouhodobé tempo růstu ekonomiky nezávisí na míře úspor.
- Při vyšší míře úspor dosáhne ekonomika výše položeného ustáleného stavu, ale dlouhodobé tempo růstu je určeno tempem růstu pracovních sil a produktivity.

Dále ověříme, že výnosy kapitálu jsou konstantní. Ze vztahu (7.4)

$$r_t = (1-\alpha)(A_tL_t)^{\alpha}K_{t-1}^{-\alpha} = (1-\alpha)\left(\frac{K_{t-1}}{A_tL_t}\right)^{-\alpha}$$

V ustáleném stavu je kapitál na jednotku efektivní práce konstantní, tedy platí:

$$\bar{r}_t = (1-\alpha)(\bar{k})^{-\alpha}$$

což je konstanta. Na druhou stranu mzdy jsou rostoucí (tempem technologického pokroku), protože roste produktivita:

$$w_t = \alpha A_t^{\alpha} L_t^{\alpha-1} K_{t-1}^{1-\alpha} = \alpha A_t \left(\frac{K_{t-1}}{A_tL_t}\right)^{1-\alpha} = \alpha A_t(\bar{k})^{1-\alpha}$$

$$\frac{w_{t+1}}{w_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = 1+\mu$$

Podíl kapitálu na důchodu v ustáleném stavu je roven:

$$\frac{K_{t-1}}{Y_t} = \frac{\bar{k}A_tL_t}{\bar{y}A_tL_t} = \frac{\bar{k}}{\bar{y}}$$

což je konstanta, čímž jsme ověřili poslední z empirických faktů z našeho seznamu.

- Solowův model je úspěšný při vysvětlení všech stylizovaných faktů ekonomického růstu v industrializovaných zemích.

- Klíčovým prvkem modelu je neoklasická produkční funkce s konstantními výnosy z rozsahu.
- Protože mezní produkt kapitálu klesá, ekonomiky rostou rychleji při nižší kapitálové zásobě.
- V ustáleném stavu roste produkt na hlavu a kapitál na hlavu stejným tempem.
- Model také vysvětluje, proč se různé míry úspor nepromítají do dlouhodobých rozdílů v tempu růstu.
- Míra úspor ovlivňuje pouze ustálený stav, nikoli tempo růstu.

7.4 Růstové účetnictví

Prozkoumáme příspěvek jednotlivých složek k hospodářskému růstu. Uvažme neoklasickou produkční funkci tvaru:

$$Y_t = (A_t L_t)^\alpha K_{t-1}^{1-\alpha}$$

Nechť Y je HDP, L pracovníci, K agregátní kapitálová zásoba a A je měřítkem produktivity. Data pro všechny veličiny kromě A_t můžeme získat, příspěvek A_t dopočteme následně jakožto zbytek růstu (Solowovo reziduum).

$$A_t = \frac{Y_t^{1/\alpha}}{L_t K_{t-1}^{(1-\alpha)/\alpha}}$$

Kdybychom znali α, můžeme A_t dopočítat přesně. Víme ale, že α představuje podíl mezd na produkci, takže můžeme použít tento odhad. Po zlogaritmování:

$$\ln Y_t = \alpha \ln A_t + \alpha \ln L_t + (1-\alpha) \ln K_{t-1}$$

Zajímá nás růst mezi časem t a $t+k$:

$$\ln Y_{t+k} - \ln Y_t =$$

$$= \alpha(\ln A_{t+k} - \ln A_t) + \alpha(\ln L_{t+k} - \ln L_t) + (1-\alpha)(\ln K_{t+k-1} - \ln K_{t-1})$$

Tedy tempo růstu produkce je α krát součet růstu produktivity a práce, a dále $1-\alpha$ krát růst kapitálu. Můžeme tedy spočíst relativní příspěvky jednotlivých složek.

Část růstu, kterou lze přisoudit práci:

$$\frac{\alpha(\ln L_{t+k} - \ln L_t)}{\ln Y_{t+k} - \ln Y_t}$$

Část růstu, kterou lze přisoudit kapitálu:

$$\frac{(1-\alpha)(\ln K_{t+k-1} - \ln K_{t-1})}{\ln Y_{t+k} - \ln Y_t}$$

Část růstu, kterou lze přisoudit technologii:

$$\frac{\alpha(\ln A_{t+k} - \ln A_t)}{\ln Y_{t+k} - \ln Y_t}$$

7.5 Porodnost a lidský kapitál

- Ekonomický růst a industrializace zemí jsou spojeny s klesající mírou porodnosti. Porozumění těmto změnám by mohlo pomoci při hledání příčin růstu některých zemí, zatímco jiné země zůstávají chudé.
- Malthus – porodnost je dána nabídkou potravin (situace před průmyslovou revolucí).

Malthus tedy považoval děti za ”normální statek”. Pokud důchod rostl, rodiče si pořizovali děti. Uvažme užitkovou funkci ze ”spotřeby” dětí c_t při počtu n_t dětí tvaru:

$$u(c_t, n_t) = \ln(c_t) + \ln(n_t)$$

Předpokládáme, že spotřebitel nabízí 1 jednotku práce za reálnou mzdu w_t a že náklady na vychování dítěte jsou p. Tedy rozpočtové omezení je tvaru:

$$c_t + pn_t = w_t$$

Tedy optimalizační problém je tvaru:

$$\max_{n_t}\{\ln(w_t - pn_t) + \ln(n_t)\}$$

Podmínka optimality:

$$-\frac{p}{w_t - pn_t} + \frac{1}{n_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_t = \frac{w_t}{2p} \tag{7.12}$$

Tedy čím vyšší mzda, tím více dětí.

Pokud by lidé žili jedno období, počet dětí určuje růst populace L_t:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = n_t$$

Malthus předpokládal, že nabídka potravin nemůže růst úměrně růstu populace. V současném pojetí to znamená klesající mezní produkt práce. Předpokládejme produkční funkci tvaru:

$$Y_t = A_t L_t^{\alpha}$$

Mzda je rovna meznímu produktu práce:

$$w_t = \alpha A_t L_t^{\alpha - 1} \tag{7.13}$$

Dosadíme-li rovnici (7.13) do (7.12), odvodíme vývoj populace:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = \frac{\alpha A_t L_t^{\alpha-1}}{2p}$$

neboli

$$L_{t+1} = \frac{\alpha A_t L_t^{\alpha}}{2p} \tag{7.14}$$

Tempo růstu populace se snižuje s růstem populace. V nějakém bodě přestane populace růst a dosáhne ustáleného stavu $\overline{L}$:

$$\overline{L} = \frac{\alpha A_t \overline{L}^{\alpha}}{2p} \quad \Rightarrow \quad \overline{L} = \left(\frac{\alpha A_t}{2p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

V ustáleném stavu je $L_{t+1}/L_t = n_t = 1$, tedy mzda bude:

$$1 = \frac{\overline{w}}{2p} \quad \Rightarrow \quad \overline{w} = 2p$$

Tedy mzda v ustáleném stavu nezávisí na produktivitě A_t.

- V Evropě se v devatenáctém století muselo něco stát, protože lidé začali mít méně dětí a tedy důchod na hlavu začal růst.
- Zaměříme se na časové náklady na vychování dětí a na roli kvality a kvantity.
- Lidský kapitál je klíčovým prvkem následujícího modelu.
- Dosud jsme považovali práci za homogenní.
- Lidský kapitál tvoří dvě části. Jednak jsou to vrozené schopnosti bez ohledu na vzdělání H_0. Dále lidé mohou získat dodatečný kapitál H_t vzděláním od rodičů. Tedy celkem mají $H_0 + H_t$.

Předpokládejme tedy, že se rodiče starají o kvantitu i kvalitu dětí, tj. jejich preference jsou tvaru:

$$u(c_t, n_t, H_{t+1}) = \ln(c_t) + \ln(n_t(H_0 + H_{t+1}))$$

Rodiče investují čas, aby dítě vychovali – je třeba zlomek h času na vychování, případně ještě e_t na vzdělání. Zbytek dne $1 - hn_t - e_t$ můžou pracovat. w_t je mzda za jednotku lidského kapitálu. Tedy rozpočtové omezení je tvaru:

$$c_t = w_t(H_0 + H_t)(1 - hn_t - e_t) \tag{7.15}$$

Předpokládáme, že lidský kapitál dětí H_{t+1} závisí na lidském kapitálu rodičů H_t a na čase e_t, který rodiče stráví s dětmi (γ je kladný parametr) – čím chytřejší a starostlivější rodiče, tím líp jsou na tom jejich děti.

$$H_{t+1} = \gamma e_t H_t \tag{7.16}$$

Nyní určíme, jak je v našem modelu porodnost závislá na lidském kapitálu. Dosadíme-li omezení (7.15) a (7.16) do užitkové funkce, dostaneme:

$$\max_{n_t, e_t} \{\ln(w_t(H_0 + H_t)(1 - hn_t - e_t)) + \ln(n_t(H_0 + \gamma e_t H_t))\}$$

Podmínky prvního řádu:

$$\frac{\partial u}{\partial n_t} = -\frac{h}{1 - hn_t - e_t} + \frac{1}{n_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_t = 1 - 2hn_t \tag{7.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial e_t} = -\frac{1}{1 - hn_t - e_t} + \frac{\gamma H_t}{H_0 + \gamma e_t H_t} = 0 \tag{7.18}$$

Dosadíme-li z první podmínky do druhé za e_t:

$$\begin{aligned}
\gamma H_t(1 - hn_t - (1 - 2hn_t)) &= H_0 + (1 - 2hn_t)\gamma H_t \\
\gamma H_t hn_t &= H_0 + \gamma H_t - 2\gamma H_t hn_t \\
n_t &= \frac{1}{3h}\left(\frac{H_0}{\gamma H_t} + 1\right) \qquad (7.19)
\end{aligned}$$

- Klíčovým prvkem porodnosti je lidský kapitál H_t.
- Je-li velmi nízký, je hodně dětí.
- Je-li naopak velmi vysoký, porodnost klesá, až počet dětí dosáhne ustáleného stavu $\overline{n} = 1/(3h)$.
- Je tomu tak ze dvou důvodů. Pokud lidský kapitál roste, roste i hodnota času a trávit čas s dětmi je nákladnější. Dále lidé s vyšším lidským kapitálem jsou lepší v učení svých dětí, takže se spíše soustředí na jejich kvalitu než kvantitu.
- Model tedy vysvětluje, proč je porodnost v industrializovaných zemích mnohem nižší než v rozvojových zemích.
- Dále také vysvětluje diferenciaci porodnosti jednotlivých skupin v zemi – lidé s nižším vzděláním si volného času cení málo, takže čas strávený s dětmi pro ně není tak drahý.
- Model však nevysvětluje, jak se dostat z jednoho stavu do druhého.

7.6 Cvičení

Příklad 7.1. Předpokládejme agregátní produkční funkci $Y = 3L^{0.7}K^{0.3}$ a $L = 150$. Pracovní síla i produktivita jsou konstantní, depreciace je 10% a 20% výstupu je každý rok uspořeno a investováno. Jaký je ustálený stav výstupu?

Příklad 7.2. Předpokládejme, že Solowův model popisuje situaci v Kuwaitu. Po válce v zálivu byla většina kapitálu (na těžbu ropy, vozidla, infrastruktura) zničena. Odpovězte na následující otázky, uveďte stručné zdůvodnění.

- Jaký bude dopad války na důchod na hlavu v následujících pěti letech?
- Jaký bude dlouhodobý dopad války na důchod na hlavu?
- Jaký bude dopad na roční tempo růstu důchodu na hlavu v následujících pěti letech?
- Jaký bude dlouhodobý dopad na roční tempo růstu důchodu na hlavu?
- Bude zotavení v Kuwaitu rychlejší, pokud budou zahraniční investice povoleny nebo pokud budou zakázány?
- A co kuwaitští pracovníci – získali by nebo by na tom byli hůř při prohibici zahraničních investic? A co místní kapitalisté?

Příklad 7.3.

- Ze souboru `USA.txt` načtěte data o vývoji amerického reálného HDP, reálného kapitálu a zaměstnanosti. Tyto veličiny vykreslete do (samostatných) obrázků.
- Dopočtěte příspěvek technologického pokroku za předpokladu, že produkční funkce je tvaru $Y_t = (A_t L_t)^\alpha K_{t-1}^{1-\alpha}$ (uvažujte $\alpha = 0.6$). Tuto veličinu také vykreslete do obrázku.
- Spočtěte tempa růstu všech veličin (Y, L, K, A) a vykreslete jejich průběh do (samostatných) obrázků.
- Spočtěte průměrná tempa růstu všech čtyř veličin a zobrazte je do obrázků s tempy růstu.
- Vypočtěte podíly práce, kapitálu a technologického pokroku na hospodářském růsu (viz část růstové účetnictví).
- Vypočtěte jejich průměrné hodnoty za celé sledované období.

Příklad 7.4. DÚ
Stáhněte si někde údaje o reálném HDP vybrané země (můžete použít data z předchozího úkolu) a analyzujte přínos jednotlivých výrobních faktorů na hospodářském růstu této země. (Využijte postupu, který byl proveden na cvičení pro data USA).

Protože data vývoje kapitálu jsou poměrně obtížně sehnatelná (zkuste najít něco jako "total real capital", rozhodně ne "gross capital formation", což jsou investice), stačí, když najdete údaje o vývoji pracovních sil L např. na dříve zmíněných internetových adresách (hledejte něco jako "total employment") a zjistíte společný přínos kapitálu a technologického pokroku na celkovém hospodářském růstu. Pokud ovšem data kapitálu (ne investice!!!) najdete, budete to mít poněkud jednodušší.

Parametr α zvolte podle odhadu, který naleznete v souboru `alpha.xls`. Podle toho, z jakého období máte data, použijte průměr hodnot z odpovídajících let. Pokud tam vaše země není, ale jedná se o zemi EU nebo OECD, za které je tam průměr, tak použijte tento průměr. Jinak se zkuste podívat někde jinde, nebo použít odhad pro zemi, která je s vaší zemí na obdobné ekonomické úrovni.

Vypočtěte tempo růstu a průměrné tempo růstu HDP a pracovních sil za dané obdbí. Vypočtěte podíl a průměrný podíl práce na hospodářském růstu; dále průměrný podíl "rezidua" na hospodářském růstu jako jedna mínus průměrný podíl práce. Výsledky zobrazte do obrázků.

Nezapomeňte si práci podepsat, uvést svoje UČO, dále uvést název práce, PŘESNÝ ZDROJ a popis dat, závěr práce. Spolu s prací (na papíře) odevzdáte také zdrojový soubor s daty a m-file s analýzou růstu (mailem nebo na disketě).

Termín odevzdání 24.11.2005.

8. Monetární politika – statický model

- *Dynamicky konzistentní* politika – akce plánované v čase t pro čas $t+i$ zůstávají optimálními, když čas $t+i$ nastane.
- *Dynamicky nekonzistentní* politika – v čase $t+i$ nebude optimální reagovat tak, jak bylo původně plánováno v čase t.

8.1 Cílová funkce

Většinou cílová funkce centrální banky zahrnuje výstup (nebo zaměstnanost) a inflaci. Výstup se objevuje ve formě lineární (8.1) nebo kvadratické (8.2).

$$U = \alpha(y - y_n) - \frac{1}{2}\pi^2, \tag{8.1}$$

kde y je skutečný výstup, y_n je přirozená úroveň výstupu ekonomiky a π je míra inflace, α je relativní váha výstupu vzhledem k inflaci.

$$V = \frac{1}{2}\alpha(y - y_n - k)^2 + \frac{1}{2}\pi^2. \tag{8.2}$$

- Centrální banka chce stabilizovat jak výstup (kolem úrovně $y_n + k$), tak inflaci (kolem nuly).
- Nejčastěji se předpoklad $k > 0$ vysvětluje přítomností distorzí na trhu práce, které způsobí, že rovnovážná míra výstupu ekonomiky je neúčinně nízká; dále přítomností daní, monopolů či sektorů s monopolistickou konkurencí
- Stabilizace výstupu kolem $y_n + k$ = druhé nejlepší řešení (tj. suboptimální), (nejlepší = eliminace původních distorzí).

- Další příčinou může být politický tlak na centrální banku.

Uvedené dvě alternativy cílové funkce (8.1) a (8.2) jsou si blízce podobné ($U = \alpha(y - y_n) - \frac{1}{2}\pi^2$), protože (8.2) lze psát jako:

$$V = -\alpha k(y - y_n) + \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\alpha(y - y_n)^2 + \frac{1}{2}k^2\alpha.$$

- První dva členy jsou tytéž jako v lineární užitkové funkci (ale s opačnými znaménky, protože V je ztrátová funkce, kdežto U užitková).
- Předpoklad kladného k je ekvivalentní přítomnosti užitku z expanze výstupu nad y_n (první člen).
- Navíc V zahrnuje ztrátu, která vzniká z odchylek výstupu od y_n (třetí člen).
- Poslední člen obsahující k^2 je prostá konstanta a tedy nemá žádný efekt na rozhodnutí centrální banky.
- Cílem monetární politiky je stabilizace inflace a ne stabilizace cenové úrovně.
- Instrumentem MP bude peněžní zásoba, Δm je míra růstu nominální peněžní nabídky, člen v představuje náhodnou složku, tzv. šok v rychlosti peněz, kde $E(v) = 0$.

$$\pi = \Delta m + v \tag{8.3}$$

8.2 Ekonomika

8.2.1 Agregátní nabídka

$$y = y_n + s(\pi - \pi^e) + e, \tag{8.4}$$

- Lucasův typ agregátní nabídky
- y je výstup, y_n je přirozená úroveň výstupu ekonomiky, π je skutečná míra inflace, π^e je očekávaná míra inflace, s popisuje vlivy peněžních překvapení na produkci, e je nabídkový šok, kde $E(e) = 0$

- Tento tvar agregátní nabídky lze odůvodnit přítomností nominálních mzdových smluv na jedno období, které se nastavují na začátku každé periody na základě očekávání veřejnosti ohledně míry inflace.

- $\pi > \pi^e \;\Rightarrow$ reálné mzdy budou nižší a firmy budou rozšiřovat zaměstnanost, tj. produkt poroste

- $\pi < \pi^e \;\Rightarrow$ reálné mzdy budou převyšovat očekávanou úroveň, zaměstnanost, a tedy i produkt, se sníží

8.2.2 Předpoklady modelu

- očekávání soukromého sektoru jsou určena dříve, než centrální banka zvolí míru růstu nominální peněžní nabídky

- CB může před nastavením instrumentu Δm pozorovat náhodnou složku e (tj. nabídkový šok), ale ne šok v

- náhodné složky e a v jsou nekorelované, tj. $E(ev) = 0$, protože $E(e) = E(v) = 0$.

8.3 Rovnovážná inflace při lineární formulaci

CB maximalizuje očekávanou hodnotu kriterální funkce U. Substituujeme výrazy (8.4) a (8.3) do cílové funkce centrální banky (8.1):

$$U = \alpha[s(\Delta m + v - \pi^e) + e] - \frac{1}{2}(\Delta m + v)^2.$$

Podmínka optimality prvního řádu pro volbu Δm za podmínky e při dané π^e ($E(v) = 0$) je

$$E\left(\frac{\partial U}{\partial \Delta m}\right) = s\alpha - \Delta m = 0$$

neboli

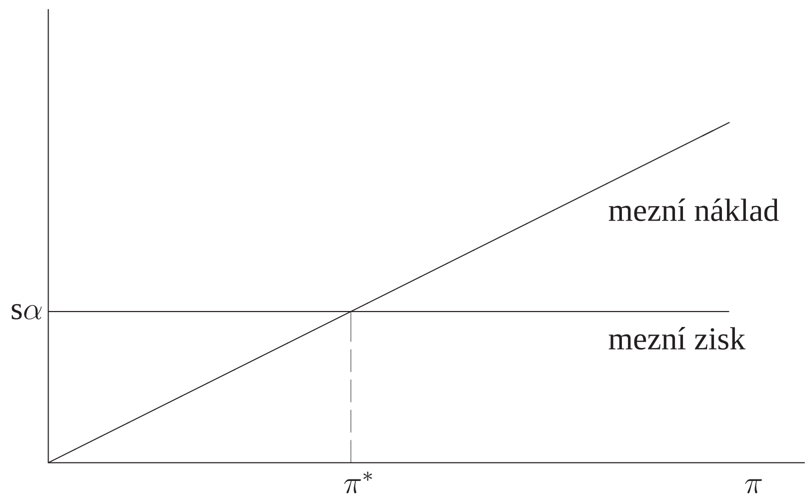
$$\Delta m = s\alpha > 0. \tag{8.5}$$

- $\Delta m = s\alpha \;\Rightarrow\; \max U$

- $\Rightarrow\ \pi_t = s\alpha + v$
- $\pi^e = E[\Delta m] = s\alpha$ (průměrná inflace je plně anticipovaná)
- $y = y_n + sv + e$

8.3.1 Diskrece

- kladná průměrná míra inflace $s\alpha$
- soukromý sektor inflaci zcela anticipuje $\Rightarrow$ žádný efekt na výstup
- velikost inflačních tlaků se zvyšuje s efekty peněžních překvapení na výstup, tj. čím větší s, tím větší je podnět centrální banky dělat inflaci
- po rozpoznání tohoto faktu očekávají soukromí agenti vyšší míru inflace
- inflační tlaky se také zvyšují s relativní váhou výstupu α, malé α = méně podnětů generovat inflaci



Obrázek 8.1: Rovnovážná inflace při diskreci (lineární verze)

- Při nulové míře inflace je mezní zisk z generování malé inflace pozitivní, protože při již nastavených mzdách je efekt přírůstkového zvýšení inflace na výstup roven $s > 0$ (viz rovnice (8.4)).

- Odpovídající hodnota zisku z tohoto zvýšení výstupu je $s\alpha$.
- To je zobrazeno na obrázku 8.1 horizontální čarou ve výši $s\alpha$.
- Mezní náklad inflace je roven π.
- Při nulové míře inflace je tento mezní náklad nulový, takže mezní zisk z inflace převyšuje mezní náklad.
- Mezní náklad však roste (lineárně) s inflací, jak je zachyceno na obrázku.
- Při míře očekávané inflace rovné $s\alpha$ se mezní náklad rovná meznímu zisku.

$$E[U^d] = E\left[\alpha(sv + e) - \frac{1}{2}(s\alpha + v)^2\right] = -\frac{1}{2}(s^2\alpha^2 + \sigma_v^2)$$

- $E[v] = E[e] = E[ev] = 0$, σ_v^2 je rozptyl náhodné složky v.
- Očekávaný užitek se snižuje s rozptylem náhodné složky v, také s vahou přidělenou výstupu vzhledem k inflačním cílům α, protože větší α zvyšuje průměrnou míru inflace (rovnou $s\alpha$).
- Zatímco náhodná složka v je neodstranitelná, ztráta kvůli inflačním tlakům vzniká pouze ze zbytečných pokusů monetární autority o stimulaci výstupu.

8.3.2 Pravidlo

- Monetární autorita je schopná se zavázat k nějakému pevnému závazku, např. k nulovému růstu peněžní zásoby, tj. $\Delta m = 0$.
- $\Rightarrow \pi = v$
- Očekávaný užitek při pravidle je větší než při diskreci.
- Diskrece v tomto případě generuje náklad ve výši $\frac{1}{2}s^2\alpha^2$.

$$E[U^c] = E\left[\alpha(sv + e) - \frac{1}{2}v^2\right] = -\frac{1}{2}\sigma_v^2 > E[U^d].$$

8.4 Rovnovážná inflace při kvadratické formulaci

- ztráta spojená s fluktuacemi výstupu a inflace kolem cílových úrovní
- stejné základní závěry jako u formulace (8.1)
- diskrece vede ke kladným průměrným inflačním tlakům a nižšímu očekávanému užitku
- bude existovat potenciální prostor pro to, aby politika snížila fluktuace výstupu způsobené nabídkovým šokem e
- substituce výrazů (8.4) a (8.3) do kvadratické ztrátové funkce (8.2) dává:

$$V = \frac{1}{2}\alpha[s(\Delta m + v - \pi^e) + e - k]^2 + \frac{1}{2}(\Delta m + v)^2$$

Δm je zvoleno po pozorování šoku e, ale před pozorováním šoku v, pak podmínka optimality

$$E\left(\frac{\partial V}{\partial \Delta m}\right) = s\alpha[s(\Delta m - \pi^e) + e - k] + \Delta m = 0$$

neboli

$$\Delta m = \frac{s^2\alpha\pi^e + s\alpha(k - e)}{1 + s^2\alpha}. \tag{8.6}$$

- ve vztahu (8.6) se objevuje šok agregátní nabídky (e) – vzniká prostor pro stabilizační politiku (substituce určité inflační volatility za sníženou volatilitu výstupu).
- optimální politika závisí na očekáváních soukromého sektoru ohledně inflace

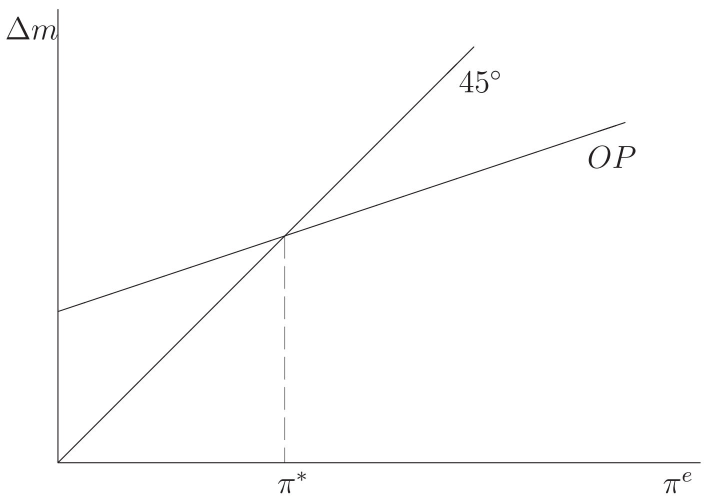
$$\pi^e = E[\Delta m] = \frac{s^2\alpha\pi^e + s\alpha k}{1 + s^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \pi^e = s\alpha k > 0$$

8.4.1 Diskrece

Dosadíme $\pi^e = s\alpha k$ do rovnice (8.6) a s (8.3) dostaneme výraz pro rovnovážnou míru inflace při diskreci π^d:

$$\pi^d = \Delta m + v = s\alpha k - \left(\frac{s\alpha}{1 + s^2\alpha}\right) e + v, \tag{8.7}$$

- Rovnováha v případě, kdy centrální banka jedná diskrečně, znamená kladnou průměrnou míru inflace rovnou $s\alpha k$, protože E[e]=E[v]=0.
- Nedochází k žádnému efektu na výstup (obdobně jako u lineární formulace), protože soukromý sektor tuto míru inflace zcela anticipuje ($\pi^e = s\alpha k$).
- Velikost inflačních tlaků roste s distorzí výstupu (k), s efektem peněžního překvapení na výstup (s) a s vahou, kterou přiděluje centrální banka cíli výstupu (α).



Obrázek 8.2: Rovnovážná inflace při diskreci (kvadratická verze)

- Budeme na chvíli ignorovat náhodné šoky e a v, rovnováha – viz obrázek 8.2.

- Rovnice (8.6) pro optimální volbu instrumentu Δm je zde zobrazena pro $e = 0$ jako přímka OP (pro optimální politiku). Sklon této přímky je $s^2\alpha/(1 + s^2\alpha) < 1$ (tj. méně než $45°$), s průsečíkem $s\alpha k/(1 + s^2\alpha) > 0$ na vertikální ose.

- Růst očekávané míry inflace vyžaduje, aby CB zvýšila aktuální inflaci o stejné množství, aby dosáhla téhož efektu na výstup. Tato akce zvyšuje náklady spojené s inflací, CB považuje za optimální zvýšit inflaci méně oproti růstu očekávané inflace π^e, tj. sklon přímky OP je menší než 1. Kladný průsečík přímky OP s vertikální osou odráží fakt, že pokud $\pi^e = 0$, je optimální politikou centrální banky nastavit pozitivní míru inflace.

- V rovnováze $\pi^e = \pi$, tj. na přímce $45°$.

- Zvýšení k, míry distorze výstupu, posunuje přímku OP nahoru a vede k vyšší rovnovážné míře inflace.

- Růst parametru s, tj. dopadu inflačního překvapení na reálný výstup, má dva efekty. Jednak zvyšuje sklon přímky OP; zvýšení efektu inflačního překvapení na výstup zvyšuje mezní zisk centrální banky z větší inflace.

  Dále také zvýšení dopadu inflačního překvapení na výstup snižuje inflační překvapení potřebné k tomu, aby se výstup posunul k úrovni $y_n + k$, a pokud je α velké, průsečík přímky OP s osou $45°$ může klesnout.

  Čistým efektem ze zvýšení parametru s je zvýšení rovnovážné míry inflace — viz rovnice (8.7), která ukazuje, že rovnovážná míra inflace pokud $e = 0$ je rovna $s\alpha k$, což je výraz rostoucí v s.

- Koeficient u nabídkového šoku e v rovnici (8.7) je záporný. Tedy pozitivní nabídkový šok vede ke snížení růstu peněžní nabídky a inflace, což znamená snížení dopadu šoku e na výstup (koeficient u e v rovnici výstupu (8.4) bude $1/(1 + s^2\alpha)$, což je menší než 1). Čím větší je váha přiřazená cíli výstupu α, tím menší bude dopad šoku e na výstup.

Použije-li se výrazu (8.7), ztrátová funkce centrální banky při diskreci je

$$V^d = \frac{1}{2}\alpha\left[\left(\frac{1}{1+s^2\alpha}\right)e + sv - k\right]^2 + \frac{1}{2}\left[s\alpha k - \left(\frac{s\alpha}{1+s^2\alpha}\right)e + v\right]^2. \quad (8.8)$$

Nepodmíněná střední hodnota této ztráty je rovna

$$\begin{aligned} E(V^d) &= \frac{1}{2}\alpha E\left\{\left(\frac{1}{1+s^2\alpha}\right)^2 e^2 + s^2v^2 + k^2 + \frac{2sev}{1+s^2\alpha} - \frac{2ke}{1+s^2\alpha} - 2skv\right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2}E\left\{s^2\alpha^2k^2 + v^2 + \frac{s^2\alpha^2e^2}{(1+s^2\alpha)^2} + 2s\alpha kv - \frac{2s\alpha ve}{1+s^2\alpha} - \frac{2s^2\alpha^2ke}{1+s^2\alpha}\right\} \\ E(V^d) &= \frac{1}{2}\alpha\left\{\frac{1}{(1+s^2\alpha)^2}\sigma_e^2 + s^2\sigma_v^2 + k^2\right\} + \frac{1}{2}\left\{s^2\alpha^2k^2 + \sigma_v^2 + \frac{s^2\alpha^2}{(1+s^2\alpha)^2}\sigma_e^2\right\} \end{aligned}$$

Tedy celkem:

$$E(V^d) = \frac{1}{2}\alpha(1+s^2\alpha)k^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{1+s^2\alpha}\right)\sigma_e^2 + (1+s^2\alpha)\sigma_v^2\right], \qquad (8.9)$$

kde symbol σ^2 označuje rozptyl.

8.4.2 Pravidlo

- Centrální banka byla schopná zavázat se předem k politickému pravidlu dříve, než se utvoří soukromá očekávání.
- Monetární autorita chce reagovat na nabídkový šok e.
- Politické pravidlo bude tvaru

$$\Delta m^c = b_0 + b_1 e.$$

- $\pi^e = E(\Delta m^c) = b_0$
- Substitucí tohoto výrazu do kvadratické ztrátové funkce se dostane:

$$V^c = \frac{1}{2}\alpha[s(b_1e + v) + e - k]^2 + \frac{1}{2}(b_0 + b_1e + v)^2. \qquad (8.10)$$

- CB se zaváže k určitým hodnotám parametrů b_0 a b_1 před zformováním inflačních očekávání a před realizací šoku e.
- Parametry b_0 a b_1 jsou vybrány tak, aby minimalizovaly očekávanou střední hodnotu ztrátové funkce:

$$E(b_0 + b_1 e) = 0 \;\Leftrightarrow\; b_0 = 0$$

$$E\left(\frac{\partial V^c}{\partial b_1}\right) = E\{\alpha[s(b_1 e + v) + e - k]se + b_1 e^2\} =$$

$$= E\{(\alpha s^2 b_1 e^2 + \alpha s^2 ev + \alpha se^2 - \alpha ske + b_1 e^2\} =$$

$$= E\{e^2[b_1(1 + s^2\alpha) + \alpha s]\} = 0 \;\Leftrightarrow\; b_1 = -\frac{\alpha s}{1 + s^2\alpha}$$

Tedy optimální politika se závazkem:

$$\Delta m^c = 0 + b_1 e = -\frac{s\alpha}{1 + s^2\alpha} e. \tag{8.11}$$

Průměrná inflace při závazku předem bude nulová ($b_0 = 0$), ale reakce na šok na agregátní nabídku je stejná, jako při diskreci (viz výraz (8.7)). Očekávaná střední hodnota ztrátové funkce při závazku je:

$$
\begin{aligned}
E(V^c) &= E\{\underbrace{\frac{1}{2}\alpha[s(b_1e+v)+e-k]^2}_{K}+\underbrace{\frac{1}{2}(b_1e+v)^2}_{L}\} = E(K)+E(L) \\
E(K) &= \frac{1}{2}\alpha E\{(sb_1e+sv+e-k)^2\} = \\
&= \frac{1}{2}\alpha E\{s^2b_1^2e^2+s^2v^2+e^2+k^2+2sb_1e^2\}+ \\
&+ \frac{1}{2}\alpha E\{2s^2b_1ev-2sb_1ek+2sve-2svk-2ek\} = \\
&= \frac{1}{2}\alpha k^2+\frac{1}{2}\alpha s^2\sigma_v^2+\frac{1}{2}\sigma_e^2(\alpha s^2b_1^2+\alpha+2sb_1\alpha) \\
E(L) &= \frac{1}{2}E\{b_1^2e^2+v^2+2b_1ev\} = \frac{1}{2}b_1^2\sigma_e^2+\frac{1}{2}\sigma_v^2 \\
E(V^c) &= \frac{1}{2}\alpha k^2+\frac{1}{2}\sigma_v^2(1+s^2\alpha)+\frac{1}{2}\sigma_e^2[b_1^2(1+s^2\alpha)+\alpha+2sb_1\alpha] = \\
&= \frac{1}{2}\alpha k^2+\frac{1}{2}\sigma_v^2(1+s^2\alpha)+\frac{1}{2}\sigma_e^2\left[\frac{s^2\alpha^2+\alpha+s^2\alpha^2+2s\alpha(-s\alpha)}{(1+s^2\alpha)}\right]
\end{aligned}
$$

Tedy celkem:

$$
E[V^c] = \frac{1}{2}\alpha k^2+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{1+s^2\alpha}\right)\sigma_e^2+(1+s^2\alpha)\sigma_v^2\right], \qquad (8.12)
$$

což je ostře menší, než ztráta při diskreci. Z porovnání výrazů (8.9) a (8.12) je vidět, že náklad diskrece je roven $(s\alpha k)^2/2$, což je prostě ztráta odpovídající nenulové míře inflace.

8.5 Problém nekonzistence

- Inflační tlaky, které vznikají při diskreci, se objevují ze dvou důvodů. Za prvé, centrální banka má podnět dělat inflaci, pokud jsou nastavena očekávání soukromého sektoru. Za druhé, centrální banka není schopna se předem zavázat k nulové průměrné míře inflace právě kvůli problému dynamické nekonzistence. Proto se důležitým prvkem stává kredibilita monetární autority.

- Pokud CB oznámí, že bude nulová míra inflace a veřejnost tomu uvěří, tj. $\pi^e = 0$, potom je optimální politika jiná než ta, která byla oznámena (= dynamická nekonzistence), protože ze vztahu (8.5) je jasné, že optimální politikou pro centrální banku bude zahrnout nastavení $\Delta m > 0$ a průměrná míra inflace bude kladná.

  Oznámení centrální banky se tedy nebude věřit. Centrální banka se nemůže věrohodně zavázat k politice s nulovou inflací, protože při takové politice (tj. pokud $\pi = \pi^e = 0$), je mezní náklad z malého zvýšení inflace roven $\partial \frac{1}{2}\pi^2/\partial\pi = \pi = 0$, zatímco mezní zisk je $s\alpha > 0$ při lineární formulaci cílové funkce, nebo $s\alpha k > 0$ při kvadratické formulaci.

  Protože mezní zisk převyšuje mezní náklad, centrální banka má podnět nedodržet svůj závazek. Společnost je v horší situaci při výsledku u diskreční politiky, protože zažívá kladnou průměrnou míru inflace bez systematického zlepšení výstupu.

- Před analýzou dynamické nekonzistence F. E. Kydlanda a E. C. Prescotta ekonomové debatovali, zda má být monetární politika řízena podle jednoduchého pravidla, jakým je např. Friedmanovo pravidlo k-procentního růstu nominální nabídky peněz, nebo zda by centrální banky měly mít možnost reagovat diskrečně. Je-li optimální sledování jednoduchého pravidla, při diskreci lze vždy vybrat takové pravidlo??? Tedy vypadá to, že při diskreci se „nic nepokazí a něco se může vylepšit”. Ale jak ukazuje výše uvedený Barro-Gordonův model, při diskreci lze skutečně „pokazit”; omezení flexibility monetární politiky může vyústit k lepšímu výsledku.

- Předpokládejme, že je CB přinucena nastavit $\Delta m = 0$. To zabraňuje inflačním tlakům, ale také zamezuje centrální bance zabývat se stabilizační politikou. S kvadratickou ztrátovou funkcí danou formulací (8.2) je potom očekávaná ztráta při tomto politickém pravidle rovna

  $\frac{1}{2}\alpha(\sigma_e^2 + k^2) + \frac{1}{2}(1 + s^2\alpha)\sigma_v^2$.

  Porovnáme tento výraz s výrazem pro nepodmíněnou očekávanou ztrátu při diskreci $E(V^d)$ daným rovnicí (8.9).

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\alpha(1+s^2\alpha)k^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha\sigma_e^2}{(1+s^2\alpha)} + \frac{1}{2}(1+s^2\alpha)\sigma_v^2 &> \frac{1}{2}\alpha(\sigma_e^2+k^2) + \frac{1}{2}(1+s^2\alpha)\sigma_v^2 \\
&\Leftrightarrow \\
s^2\alpha^2k^2 + \alpha k^2 + \sigma_v^2 + s^2\alpha\sigma_v^2 + \frac{\alpha}{1+s^2\alpha}\sigma_e^2 &> \alpha\sigma_e^2 + \alpha k^2 + \sigma_v^2 + s^2\alpha\sigma_v^2 \\
&\Leftrightarrow \\
s^2\alpha^2k^2 + \frac{\alpha}{1+s^2\alpha}\sigma_e^2 &> \alpha\sigma_e^2 \\
&\Leftrightarrow \\
s^2\alpha^2k^2 &> \frac{\sigma_e^2}{1+s^2\alpha}(\alpha + s^2\alpha^2 - \alpha)
\end{aligned}
$$

Z výše uvedeného odvození je patrné, že pravidlo nulového růstu bude preferováno, pokud

$$
\left(\frac{s^2\alpha^2}{1+s^2\alpha}\right)\sigma_e^2 < (s\alpha k)^2. \tag{8.13}
$$

- Levá strana rovnice (8.13) měří zisky z diskreční stabilizační politiky, pravá strana měří náklad inflačních tlaků, které se objevují při diskreci.
- Je-li druhá zmíněná veličina větší, očekávaná ztráta bude nižší, pokud je centrální banka přinucena sledovat pravidlo fixní míry růstu peněžní zásoby.
- Zda vyústí v lepší výsledek politiky sledování jednoduchého pravidla, které omezuje schopnost centrální banky reagovat na nové okolnosti, nebo povolení diskrece, která generuje průměrné inflační tlaky, je otevřená otázka.
- Tento model také pomáhá zvýraznit úlohu kredibility monetární autority tím, že ilustruje, proč se slibům centrální banky o snížení inflace nemusí věřit.

8.6 Pohled teorie her

- Pro jednoduchost uvažme, že CB může zvolit jen dvě možné míry inflace, a že veřejnost jednu z těchto dvou možností očekává. Výsledek, který odvodíme, lze zobecnit na možnost libovolné volby.

- Inflace, a tedy i inflační, očekávání nabývají hodnot z množiny $\{0, \pi_1\}$. Jsou tedy čtyři možné kombinace skutečné a očekávané inflace, které mohou nastat. Užitek z každé situace pro vládu a pro agenty popisuje následující tabulka.

Agenti	CB	
	$\pi = 0$	$\pi = \pi_1$
$\pi^e = 0$	$U^{CB} = 0,\ U^p = 0$	$U^{CB} = 1,\ U^p = -1$
$\pi^e = \pi_1$	$U^{CB} = -1,\ U^p = -1$	$U^{CB} = -0.5,\ U^p = 0$

- Jedná se vlastně o bimaticovou hru.

- V každém kole domácnosti volí řádek a CB sloupec, dosáhnou při tom užitku zapsaného v jejich matici v příslušném řádku a sloupci.

- Nyní nalezneme rovnovážnou situaci naší hry, která je vlastně modelem nekooperativního vedení MP, tj. případ diskrece s pomocí matic P a CB.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad CB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

- Očekává-li domácnost nulovou inflaci (volí 1. řádek), je pro CB nejvýhodnější přivodit inflaci $\pi = \pi_1$ (modře), tj. 2. sloupec.

- Očekává-li domácnost inflaci π_1 (volí 2. řádek), je pro CB nejvýhodnější přivodit inflaci $\pi = \pi_1$ (červeně), tj. 2 sloupec.

- Pokud CB nastaví nulovou inflaci (volí 1. sloupec), je pro agenty nejlepší očekávat nulovou inflaci (fialově) – tj. 1. řádek, ale nejdená se o rovnovážný bod, tj. není to tzv. bod Nashovy rovnováhy, protože pro CB by pak bylo optimální nastavení nenulové inflace.

- Pokud CB nastaví inflaci π_1 (volí 2. sloupec), je pro agenty nejlepší očekávat inflaci π_1 (zeleně), tj. volí 2 řádek. Protože nejlepší reakce CB na tuto situaci je nastavit inflaci na π_1, jedná se o jedinou rovnovážnou situaci, kdy dochází ke zbytečnému vzniku nenulové míry inflace, protože se CB a agenti neumí domluvit. Pokud by se domluvit mohli a hráli by $\pi = \pi^e = 0$, byli by na tom lépe.

9. Monetární politika – dynamický model

9.1 Model ekonomiky

- Model všeobecné dynamické rovnováhy s dočasnými nominálními rigiditami $\Rightarrow$ MP ovlivňuje v krátkém období reálnou ekonomiku.
- Rovnice agregátního chování se odvozují z optimalizace domácností a firem. Nebudeme uvažovat investice a kapitálovou akumulaci, což neovlivňuje žádné kvalitativní závěry.
- Současné chování záleží jak na současné politice, tak na očekávaném budoucím průběhu MP.
- x_t je mezera výstupu, tj rozdíl mezi skutečnou produkcí a její potenciální úrovní[1]. π_t je míra inflace v čase t, i_t je krátkodobá nominální úroková míra, každá z proměnných je obdobně vyjádřena jako odchylka od dlouhodobého trendu. E_t značí očekávání založené na informaci dosažitelné v čase t; g_t je poptávkový šok, v_t šok nabídkový; $\mu, \rho \in (0, 1)$.

Poptávková strana ekonomiky

- Vpředhledící křivka IS (9.1). Lze ji odvodit logaritmickou linearizací spotřební Eulerovy rovnice vycházející z optimálního rozhodnutí domácností o úsporách.

$$x_t = -\varphi(i_t - E_t\pi_{t+1}) + E_t x_{t+1} + g_t \tag{9.1}$$

$$g_t = \mu g_{t-1} + \hat{g}_t \tag{9.2}$$

[1] Potenciální produkcí rozumíme výstup, který by byl dosažen, kdyby mzdy a ceny byly dokonale pružné.

- Inverzní vztah mezery výstupu a reálné úrokové sazby, dále pozitivní vztah mezi současnou a očekávanou produkcí.

- Při vyšších úrokových mírách jsou úvěry dražší, tedy spotřeba i investice klesají a celková realizovaná produkce klesá. Naopak očekávání příznivého budoucího vývoje (tj. růst produkce) vede k současnému růstu produkce.

Iterujeme-li rovnici (9.1) dopředu, pak při označení $m_t = -\varphi(i_t - E_t\pi_{t+1})$ platí:

$$\begin{aligned} x_t &= m_t + E_t x_{t+1} + g_t \\ E_t x_{t+1} &= E_t m_{t+1} + E_t E_{t+1} x_{t+2} + E_t g_{t+1} \\ E_t x_{t+2} &= E_t m_{t+2} + E_t E_{t+2} x_{t+3} + E_t g_{t+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Do výrazu pro x_t nyní dosadíme za výraz pro $E_t x_{t+1}$, do kterého jsme předtím dosadili za výraz pro $E_t x_{t+2}$, atd. Potom:

$$x_t = m_t + g_t + E_t m_{t+1} + E_t g_{t+1} + E_t m_{t+2} + E_t g_{t+2} + \dots$$

Tedy po nekonečné sumaci:

$$x_t = E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} [-\varphi(i_{t+j} - \pi_{t+1+j}) + g_{t+j}] \right\}. \tag{9.3}$$

- Mezera výstupu nezávisí jenom na současné reálné úrokové míře a poptávkovém šoku, ale také na očekávaném budoucím vývoji těchto dvou proměnných.

Nabídková strana ekonomiky

- Vpředhledící Phillipsova křivka (9.4), vztah mezi nominálními a reálnými veličinami. Odvodí se z kolísajícího nastavení cen v duchu G. Calva.[2]

$$\pi_t = \lambda x_t + \beta E_t \pi_{t+1} + v_t \tag{9.4}$$
$$v_t = \rho v_{t-1} + \hat{v}_t, \tag{9.5}$$

[2] Calvo, G.: *Staggered Prices in a Utility Maximizing Framework.* Journal of Monetary Economics 12, 1983.

- Pozitivní vztah mezi současnou inflací a produkcí, a také mezi současnou a očekávanou inflací.

- Výrobci jsou schopni vyrobit více, ale jsou ochotni to dělat pouze za vyšší ceny. Vyšší očekávaná inflace je zakomponována do smluv a zvyšuje současnou míru inflace.

Obdobně jako výše budeme iterovat rovnici (9.4) dopředu:

$$\begin{aligned} \pi_t &= \lambda x_t + \beta E_t \pi_{t+1} + v_t \\ E_t \pi_{t+1} &= E_t \lambda x_{t+1} + E_t \beta E_{t+1} \pi_{t+2} + E_t v_{t+1} \\ E_t \pi_{t+2} &= E_t \lambda x_{t+2} + E_t \beta E_{t+2} \pi_{t+3} + E_t v_{t+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Do výrazu pro π_t nyní dosadíme za výraz pro $E_t \pi_{t+1}$, do kterého jsme obdobně jako výše dosadili za $E_t \pi_{t+2}$, atd. Potom:

$$\pi_t = \lambda x_t + v_t + \beta(E_t \lambda x_{t+1} + E_t v_{t+1}) + \beta^2 (E_t \lambda x_{t+2} + E_t v_{t+2}) + \ldots$$

Tedy po nekonečné sumaci:

$$\pi_t = E_t \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (\lambda x_{t+i} + v_{t+i}) \right\} \tag{9.6}$$

- Inflace závisí zcela na současných a očekávaných budoucích ekonomických podmínkách (žádná setrvačnost či zpožděná závislost v inflaci).

- Proměnná x_{t+i} zachycuje pohyby v mezních nákladech spojené s kolísáním přebytečné poptávky. Šok v_{t+i} zachycuje jiné (např. nákladové) vlivy, které mohou ovlivnit očekávané mezní náklady.

Nástroj a cíl politiky

- Nástrojem MP bude krátkodobá nominální úroková sazba.

- Nominální cenové rigidity $\Rightarrow$ MP ovlivňuje v krátkém období průběh reálných veličin.

- Cílová funkce CB

$$\frac{1}{2}E_t\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i(\alpha x_{t+i}^2+\pi_{t+i}^2)\right\}\rightarrow \min \tag{9.7}$$

  kde parametr α je relativní váha přiřazená odchylkám výstupu.

9.2 Optimální měnová politika bez závazku

- CB volí x_t a π_t, aby maximalizovala cíl (9.7) při dané rovnici inflace (9.4). Pak, podmíněno optimálními hodnotami x_t a π_t, určuje hodnotu úrokové sazby i_t z rovnice (9.1).
- CB bere očekávání soukromého sektoru při řešení optimalizačního problému za daná, protože je nemůže ovlivnit.

Každou periodu tedy CB vybere x_t a π_t, aby minimalizovala

$$\frac{1}{2}(\alpha x_t^2+\pi_t^2)+F_t \tag{9.8}$$

za podmínky

$$\pi_t=\lambda x_t+f_t, \tag{9.9}$$

kde $F_t \equiv \frac{1}{2}E_t\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\beta^i(\alpha x_{t+i}^2+\pi_{t+i}^2)\right\}$, $f_t \equiv \beta E_t\pi_{t+1}+u_t$, přičemž F_t a f_t považuje centrální banka za dané.

Lagrangean:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\alpha x_t^2+\pi_t^2)+F_t+\mu(\pi_t-\lambda x_t-f_t)$$

Podmínky optimality:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{x_t}=\alpha x_t-\lambda\mu=0\Rightarrow\lambda\mu=\alpha x_t;\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\pi_t}=\pi_t+\mu=0\Rightarrow\mu=-\pi_t$$

Celkem podmínka optimality:

$$x_t=-\frac{\lambda}{\alpha}\pi_t \tag{9.10}$$

- CB sleduje politiku „opírání se o vítr”. Kdykoli je inflace nad cílem, omezí CB poptávku zvýšením úrokové sazby a naopak, když je inflace pod cílem. Reakce CB záleží pozitivně na zisku ze snížení inflace na jednotku ztráty výstupu (λ) a inverzně na relativní váze přidělené ztrátám výstupu (α).

Redukovaný tvar výrazů pro x_t a π_t: stačí zkombinovat podmínku optimality (9.10) s rovnicí agregátní nabídky (9.4) a s rovnicí očekávání inflace.

$x_t = -\frac{\lambda}{\alpha}\pi_t$, $E_t\pi_{t+1} = \rho\pi_t \Rightarrow \pi_t = \lambda x_t + \beta E_t\pi_{t+1} + v_t = -\frac{\lambda^2}{\alpha}\pi_t + \beta\rho\pi_t + v_t$
$\pi_t(\alpha + \lambda^2 - \alpha\beta\rho) = \alpha v_t \Rightarrow \pi_t = \frac{\alpha v_t}{\lambda^2+\alpha(1-\beta\rho)} = \alpha q v_t$, $x_t = -\frac{\lambda}{\alpha}\pi_t = -\frac{\lambda}{\alpha}\alpha q v_t$

Tj.:

$$x_t = -\lambda q v_t \tag{9.11}$$
$$\pi_t = \alpha q v_t, \tag{9.12}$$

kde

$$q = \frac{1}{\lambda^2 + \alpha(1-\beta\rho)}.$$

Optimální politika (reakční funkce centrální banky) pro úrokovou sazbu se najde dosazením příslušné hodnoty x_t do křivky IS (9.1). Z výrazu (9.1) plyne:

$i_t = -\frac{1}{\varphi}x_t + E_t\pi_{t+1} + \frac{1}{\varphi}E_t x_{t+1} + \frac{1}{\varphi}g_t$ a dále
$x_t = -\frac{\lambda}{\alpha}\pi_t$, $E_t\pi_{t+1} = \rho\pi_t$, tedy
$i_t = \frac{\lambda\rho}{\alpha\varphi\rho}\pi_t + \rho\pi_t + \frac{1}{\varphi}\frac{\rho}{\rho}E_t(-\frac{\lambda}{\alpha}\pi_{t+1}) + \frac{1}{\varphi}g_t$
$= \frac{1}{\varphi}g_t + \rho\pi_t\left(1 + \frac{\lambda}{\rho\varphi\alpha} - \frac{\rho\lambda}{\rho\varphi\alpha}\right) = \frac{1}{\varphi}g_t + \gamma_\pi E_t\pi_{t+1}.$

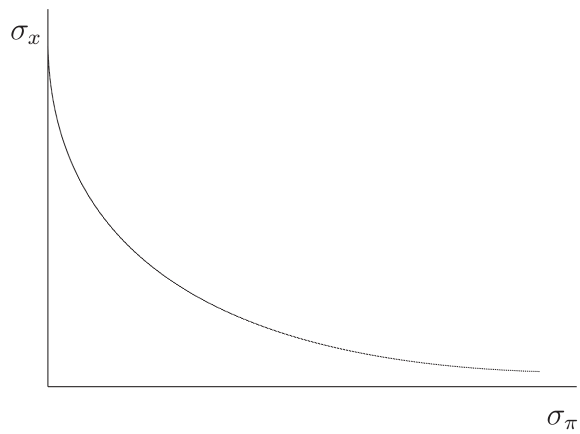
Tedy celkem:

$$i_t = \gamma_\pi E_t\pi_{t+1} + \frac{1}{\varphi}g_t \tag{9.13}$$

kde

$$\gamma_\pi = 1 + \frac{(1-\rho)\lambda}{\rho\varphi\alpha} > 1$$
$$E_t\pi_{t+1} = \rho\pi_t$$

- Reakční funkce CB (9.13) se skládá ze 2 částí – jednak je to reakce na inflační očekávání a dále protisměrná reakce na poptávkový šok.
- Při optimální politice v reakci na růst očekávané inflace by se měly nominální sazby zvýšit dostatečně, aby se zvýšily reálné sazby. Tj. při optimálním pravidle pro nominální úrokovou míru by měl koeficient u očekávané inflace převýšit jedničku. Kdykoli je inflace nad cílem, optimální politika požaduje zvýšení reálných sazeb, aby se omezila agregátní poptávka.
- Je-li přítomna náklady tlačená inflace, pak existuje krátkodobá substituce mezi inflací a výstupem.
- Obrázek zachycuje hranici možností politiky – jak se mění směrodatné odchylky výstupu a inflace (σ_x a σ_π) při optimální politice s preferencemi CB (α).



Obrázek 9.1: Hranice možností politiky

- Hranici definují rovnice (9.11) a (9.12). Body napravo od hranice jsou nedostatečně výkonné, body nalevo jsou nedosažitelné. Podél hranice existuje substituce.
- S rostoucím α (indikujícím relativně větší preference na stabilitu výstupu) generuje optimální politika nižší standardní odchylku výstupu, ale za cenu vyšší volatility inflace.

Krajní případy jsou:

$$\lim_{\alpha\to 0} \text{var}\,(x_t) = \lim_{\alpha\to 0} \text{var}\left(-\tfrac{\lambda v_t}{\lambda^2+\alpha(1-\beta\rho)}\right) = \lim_{\alpha\to 0} \text{var}\left(\tfrac{v_t}{\lambda}\right) = \tfrac{\sigma_v^2}{\lambda^2}$$
$$\lim_{\alpha\to 0} \text{var}\,(\pi_t) = \lim_{\alpha\to 0} \text{var}\left(\tfrac{\alpha v_t}{\lambda^2+\alpha(1-\beta\rho)}\right) = 0$$
$$\lim_{\alpha\to \infty} \text{var}\,(x_t) = \lim_{\alpha\to \infty} \text{var}\left(-\tfrac{\lambda v_t}{\lambda^2+\alpha(1-\beta\rho)}\right) = 0$$
$$\lim_{\alpha\to \infty} \text{var}\,(\pi_t) = \lim_{\alpha\to \infty} \text{var}\left(\tfrac{\alpha v_t}{\lambda^2+\alpha(1-\beta\rho)}\right) = \lim_{\alpha\to \infty} \text{var}\left(\tfrac{v_t}{1-\beta\rho}\right) = \tfrac{\sigma_v^2}{(1-\beta\rho)^2}$$

Tedy celkem:

$$\alpha \to 0: \quad \sigma_x = \frac{\sigma_v}{\lambda}; \quad \sigma_\pi = 0 \tag{9.14}$$

$$\alpha \to \infty: \quad \sigma_x = 0; \quad \sigma_\pi = \frac{\sigma_v}{1-\beta\rho}\,, \tag{9.15}$$

kde σ_v je směrodatná odchylka nákladového šoku.

- Substituce se objevuje jenom při inflaci tlačené náklady.
- Pokud pohání inflaci nákladové faktory, je možné snížit inflaci v krátké době omezením poptávky.
- Pokud $\sigma_v = 0$, žádná substituce neexistuje a inflace závisí jen na současné a budoucí poptávce. Nastavením úrokových sazeb pro $x_t = 0$ pro všechna t, je CB schopná trefit zároveň inflační cíl a cíl pro výstup po celou dobu.
- V obecném případě s $\alpha > 0$, $\sigma_v > 0$, se jedná o pozvolnou konvergenci inflace zpět k cíli. Z rovnic (9.12) a (9.5) při optimální politice se obdrží vztah (9.16), protože $0 \leq \rho < 1$. V tomto formálním smyslu optimální politika zakotvuje cílování inflace.

$$\lim_{i\to\infty} E_t\{\pi_{t+i}\} = \lim_{i\to\infty} aq\rho^i v_t = 0. \tag{9.16}$$

- Podmínky pro extrémní inflační cílování jsou vidět ze vztahů (9.14) a (9.15). Když $\sigma_v = 0$ (není náklady tlačená inflace), je optimální politika okamžitého trefení inflačního cíle bez ohledu na preference. Protože v tomto případě nedochází k žádné substituci, není nikdy nákladné snažit se o minimalizaci variability inflace.

- Jak vztah (9.14) ukazuje, je optimální pro minimalizaci variance inflace pokud $\alpha = 0$, i za přítomnosti náklady tlačené inflace. Obecně je optimální postupná konvergence k inflačnímu cíli.

9.3 Problém inflačních tlaků

Uvažme nyní cílovou funkci tvaru:

$$\frac{1}{2}E_t\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i[\alpha(x_{t+i}-k)^2+\pi_{t+i}^2]\right\}\to\min \tag{9.17}$$

Lagrangean:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[\alpha(x_t-k)^2+\pi_t^2]+F_t+\mu(\pi_t-\lambda x_t-f_t),$$

kde $F_t = -\frac{1}{2}E_t\left\{\sum_{i=1}^{\infty}[\alpha(x_{t+i}-k)^2+\pi_{t+i}^2]\right\}$ a $f_t = E_t\pi_{t+1}+u_t$, přičemž F_t a f_t považuje CB za dané.

Podmínky prvního řádu:
$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_t} = -\alpha(x_t-k)-\mu\lambda = 0 \Rightarrow \mu\lambda = -\alpha x_t+\alpha k$
$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \pi_t} = -\pi_t+\mu = 0 \qquad \Rightarrow \mu = \pi_t$
Podmínka optimality:

$$x_t^k = -\frac{\lambda}{\alpha}\pi_t^k+k \tag{9.18}$$

- Míra inflace bude v tomto případě rovna $\pi_t^k = -\frac{\alpha}{\lambda}x_t+\frac{\alpha}{\lambda}k$, což je právě o kladný člen $\frac{\alpha}{\lambda}k$ více než v případě, kdy se CB nesnažila vytlačovat výstup nad jeho potenciální úroveň.
- Řešením tohoto problému může být jmenování guvernéra CB, který přidělí vyšší relativní náklady inflaci než společnost jako celek, snižuje zbytečné inflační tlaky, ke kterým dochází při diskreci pokud $k > 0$.

- Teorie $\times$ praxe? Inflace se ve většině zemí OECD nyní jeví pod kontrolou i přes absenci nějakých zřejmých institucionálních změn. Řada zemí převzala za řešení jmenování guvernéra s „odporem" k inflaci?

9.4 Optimální měnová politika se závazkem

CB už nebere očekávání soukromého sektoru za daná, její volba politiky tato očekávání určuje. Cílem je:

$$\frac{1}{2}E_t\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i(\alpha x_{t+i}^2+\pi_{t+i}^2)\right\}\to\min$$

za podmínky křivky agregátní nabídky tvaru

$$\pi_{t+i}=\lambda x_{t+i}+\beta E_t\{\pi_{t+1+i}\}+v_{t+i}\qquad\forall i=0,\ldots,\infty$$

kde

$$v_{t+i}=\rho v_{t+i-1}+\varepsilon_{t+i}\qquad\forall i=0,\ldots,\infty$$

Lagrangean:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}E_t\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i[(\alpha x_{t+i}^2+\pi_{t+i}^2)+\Phi_{t+i}(\pi_{t+i}-\lambda x_{t+i}-\beta\pi_{t+1+i}-v_{t+i})]\right\},\tag{9.19}$$

kde Φ_{t+i} je multiplikátor spojený s omezením na čas $t+i$, přičemž pro zjednodušení výpočtu zafixujeme parametr $\beta=1$. Výpočet extrému rozdělíme na dvě části, nejprve pro $i=0$, pak pro obecné $i\geq 1$.

a) $i=0$:

$$2\alpha x_t-\lambda\Phi_t=0,\ 2\pi_t+\Phi_t=0\Rightarrow 2\alpha x_t=\lambda\Phi_t,\ -2\pi_t=\Phi_t\Rightarrow x_t=-\frac{\lambda}{\alpha}\pi_t$$

b) $i\geq 1$: Suma v Lagrangiánu obsahuje tyto členy významné z hlediska optimalizace pro čas $t+i$: $\Phi_{t+i-1}(\pi_{t+i-1}-\lambda x_{t+i-1}-\pi_{t+i}-u_{t+i-1})$, $\Phi_{t+i}(\pi_{t+i}-\lambda x_{t+i}-\pi_{t+1+i}-u_{t+i})$ a $(\alpha x_{t+i}^2+\pi_{t+i}^2)$.

Z podmínek optimality plyne:

$$\begin{aligned} 2\alpha x_{t+i} - \lambda\Phi_{t+i} &= 0 \\ 2\pi_{t+i} + \Phi_{t+i} - \Phi_{t+i-1} &= 0. \end{aligned}$$

Tj. $\pi_{t+i} = -\frac{1}{2}(\Phi_{t+i} - \Phi_{t+i-1})$, $x_{t+i} = \frac{\lambda}{2\alpha}\Phi_{t+i}$, $x_{t+i-1} = \frac{\lambda}{2\alpha}\Phi_{t+i-1}$, z čehož plyne vztah $x_{t+i} - x_{t+i-1} = \frac{\lambda}{2\alpha}(\Phi_{t+i} - \Phi_{t+i-1}) = -\frac{\lambda}{\alpha}\pi_{t+i}$.

Tedy celkem:
a) $i = 1, 2, 3, \dots$

$$x_{t+i} - x_{t+i-1} = -\frac{\lambda}{\alpha}\pi_{t+i} \tag{9.20}$$

b) $i = 0$

$$x_t = -\frac{\lambda}{\alpha}\pi_t \tag{9.21}$$

- Optimální politika se závazkem využívá schopnosti centrální banky ovlivnit inflaci i pomocí očekávaných budoucích hodnot relevantních veličin.

- Optimální politika se závazkem, na rozdíl od politiky diskreční, požaduje urovnávání změny v mezeře výstupu jako odpověď na inflaci. Tj. závazek mění „poměrové” pravidlo pro x_t při diskreci, na pravidlo rozdílové, jak ukazuje porovnání rovnic (9.10) a (9.20).

- V úvodní periodě (tj. t) centrální banka přizpůsobuje x_t v reakci na π_t, jako by sledovala optimální pravidlo při diskreci, ale pouze v této periodě. Pokud by centrální banka mohla reoptimalizovat v čase $t+i$, vybrala by stejnou politiku, kterou implementovala v čase t *(dynamická nekonzistence)*.

- Určitou komplikaci představuje skutečnost, že pravidlo úrokové míry může mít nežádoucí vedlejší efekty. Zkombinují-li se rovnice (9.20) a (9.1), obdrží se optimální pravidlo úrokové míry (9.22):

$-\frac{\lambda}{\alpha}\pi_{t+1} = x_{t+1} - x_t$, $i_t = E_t\pi_{t+1} + \frac{1}{\varphi}g_t + \frac{1}{\varphi}(E_t x_{t+1} - x_t)$, tedy

$$i_t = \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha\varphi}\right) E_t\pi_{t+1} + \frac{1}{\varphi}g_t \tag{9.22}$$

- Koeficient u očekávané inflace je menší než 1. Při tomto pravidle vede růst očekávané inflace k růstu nominální úrokové míry, ale k poklesu reálné úrokové sazby, tj. nominální sazby se nezvýší dostatečně, aby došlo ke zvýšení sazeb reálných. Tedy CB místo aby ekonomiku utlumila, způsobuje její další růst, to znamená další růst produkce i inflace. Ale agenti vědí, jakého pravidla se CB drží, může tudíž být cílů dosaženo s menšími ztrátami.

9.5 Praktické komplikace

9.5.1 Nedokonalá informace

- V praxi není CB schopna zjistit včas všechny potřebné informace o stavu ekonomiky.
- Určitou dobu trvá, než se data sesbírají a zpracují; odebírání vzorků je nedokonalé; některé klíčové proměnné jako potenciální produkt nejsou přímo pozorovatelné a jsou zřejmě měřeny s velkou chybou.
- Pravidla mohou být tedy vyjádřena pouze v termínech příslušných předpovědí. Alternativou je užití mezicíle, který je přímo pozorovatelný.
- Už není jedno, co bude instrumentem MP.

9.5.2 Transmisní zpoždění

- Řada studií ukazuje zpoždění 6 až 9 měsíců v efektu změny úrokových sazeb na výstup, na inflaci asi rok a půl.

- Informace o dopadu současné MP na inflaci je dosažitelná pouze s velkým zpožděním, což způsobuje, že je nemožné kontrolovat provádění politiky. Tento problém je možné částečně obejít zaměřením se na předpověď inflace. Předpověď je okamžitě dostupná a poskytuje rychlý způsob pro posouzení průběhu politiky, ale pro vytvoření správné předpovědi musí mít CB dobrý strukturální model ekonomiky.

9.5.3 Volba instrumentu

- úroková sazba $\times$ peněžní agregát??
- Nechť je poptávka po bankovních rezervách dána jako

$$m_t - p_t = \kappa y_t - \eta i_t + u_t, \tag{9.23}$$

  kde p_t je cenová úroveň a u_t je náhodný šok v poptávce po penězích m_t.

- Je-li šok u_t perfektně pozorovatelný, pak je jedno, zda se použije jako instrument politiky i_t nebo m_t. Pokud ale šok u_t není pozorovatelný, už to není jedno. Je-li intrumentem úroková míra, nechá CB přizpůsobit peněžní zásobu šoku v poptávce po penězích. Nedochází k žádnému dopadu šoků v poptávce po penězích na výstup nebo inflaci, protože je centrální banka dokonale akomoduje. Při cílování peněz je opak pravdou. Úroková sazba a výstup se uzpůsobují, aby se vyčistil trh peněz.

9.5.4 Vyhlazování úrokových měr

- Optimální politika předpovídá více proměnlivé trajektorie úrokových měr, než je pozorováno v praxi.
- Tvůrci politiky to nejsou ochotni akceptovat v praxi $\Rightarrow$ vyhlazování úrokových měr (smoothing).
- Následující pravidlo MP zachycuje celkem dobře posledních dvacet let:

$$i_t = (1-\rho)(\alpha + \beta\pi_t + \gamma x_t) + \rho i_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{9.24}$$

kde α je konstanta interpretovatelná jako ustálený stav nominální úrokové míry a $\rho \in \langle 0, 1 \rangle$ je parametr, který odráží stupeň zpožděné závislosti v úrokové míře.

- Odhady parametru ρ pro čtvrtletní data jsou typicky kolem 0,8–0,9, což ukazuje velmi pomalé urovnání v praxi. Existující teorie zkrátka a dobře nevysvětluje, proč by měla centrální banka upravit úrokové míry takto pomalým způsobem.

9.5.5 Oportunistický přístup

- Je-li inflace výše než cíl, ale blízko optimu, politika by neměla omezit agregátní poptávku. Raději by měla zvolit tzv. oportunistický přístup, tj. měla by počkat, dokud by dosažení inflačního cíle mohlo být dosaženo s co nejmenšími náklady v termínech snížení výstupu.

- Je možné vysvětlit oportunistickou politiku malou úpravou cílové funkce politiky. Předpokládejme, že se tvůrci politiky starají poměrně dost o malé odchylky výstupu od cíle, alespoň relativně k malým odchylkám inflace. Příkladem cílové funkce zachycující tento jev je:

$$\frac{1}{2} E_t \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (2\alpha |x_{t+i}| + \pi_{t+i}^2) \right\} \to \min \tag{9.25}$$

Při této cílové funkci přejde podmínka optimality v:

$$x_t = 0 \;\Leftrightarrow\; |\pi_t| < \frac{\alpha}{\lambda};\; |\pi_t| = \frac{\alpha}{\lambda} \text{ jinak.} \tag{9.26}$$

- Tedy pokud je inflace v koridoru $\frac{\alpha}{\lambda}$ jednotek od inflačního cíle, je optimální politikou stabilizace výstupu. Politika by měla držet inflaci nanejvýš $\frac{\alpha}{\lambda}$ jednotek od cíle a pak počkat na příznivé nabídkové šoky, které ji posunou blíže k cíli (příznivé pohyby v nákladovém šoku v_t).

- Vlastně „cílování inflační zóny”.

9.6 Formální zápis modelu

Stavový zápis modelu:

$$\boldsymbol{x_t} = A\boldsymbol{x_{t-1}} + B\boldsymbol{u_t}$$

kde $\boldsymbol{x_t}$ je vektor stavů v čase t, $\boldsymbol{u_t}$ je vektor vsupů, A a B jsou matice koeficientů. My máme model tvaru:

$$\boldsymbol{x_t} = A_0\boldsymbol{x_t} + A_1\boldsymbol{x_{t-1}} + B_0\boldsymbol{u_t}$$

tj.

$$(I - A_0)\boldsymbol{x_t} = A_1\boldsymbol{x_{t-1}} + B_0\boldsymbol{u_t}$$

Pokud existuje uvedená inverze, pak:

$$\boldsymbol{x_t} = \underbrace{(I - A_0)^{-1}A_1}_{A}\,\boldsymbol{x_{t-1}} + \underbrace{(I - A_0)^{-1}B_0}_{B}\,\boldsymbol{u_t}$$

Náš model (diskrece):

$$\begin{aligned}
x_t &= -\varphi(i_t - E_t\pi_{t+1}) + E_t x_{t+1} + g_t \\
\pi_t &= \lambda x_t + \beta E_t\pi_{t+1} + v_t \\
i_t &= \gamma_\pi E_t\pi_{t+1} + \frac{1}{\varphi}g_t \\
g_t &= \mu g_{t-1} + \hat{g}_t \\
v_t &= \rho v_{t-1} + \hat{v}_t
\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(9.27)\\(9.28)\end{aligned}$$

kde

$$\gamma_\pi = 1 + \frac{(1-\rho)\lambda}{\rho\varphi\alpha} > 1, \quad E_t\pi_{t+1} = \rho\pi_t$$

Tedy

$$\text{stavy:} \quad \boldsymbol{x_t} = \begin{pmatrix} x_t \\ \pi_t \\ i_t \\ g_t \\ v_t \end{pmatrix} \text{vstupy:} \quad \boldsymbol{u_t} = \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ \hat{g}_t \\ \hat{v}_t \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \varphi\rho & -\varphi & 1 & 0 \\ \lambda & \beta\rho & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma_\pi\rho & 0 & \frac{1}{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice A_0, A_1 a B_0 nesou veškerou informaci o modelu. Na jejich základě se můžeme pokusit model odhadnout vhodnou odhadovou metodou.

9.6.1 Ukázka zadání a odhadu modelu v Matlabu

Viz předvedené m-files a obrázky.

9.7 Cvičení

Příklad 9.1. Mějme Phillipsovu křivku tvaru: $u = u * +\gamma(\pi^e - \pi)$, kde u je míra nezaměstnanosti, u^* je přirozená míra nezaměstnanosti, π^e jsou inflační očekávání, π je skutečná míra inflace. Myslíte, že vlády preferují Phillipsovy křivky s menším nebo spíš s větším γ?

Příklad 9.2. Předpokládejmě ztrátovou funkci CB ve tvaru

$$V = -\phi u^2 - \pi^2$$

kde $\phi > 0$. Čím větší je ϕ, tím "hodnější" je guvernér. Dále uvažme Phillipsovu křivku jako výše tvaru:

$$u = u^* + \gamma(\pi^e - \pi)$$

a) Předpokládejme, že inflační očekávání již byla zformována na úrovni π^e. Nalezněte optimální volbu míry inflace π_0 pro CB.

b) Pro fixní inflační očekávání nalezněte odpovídající míru nezaměstnanosti u_0.

c) Nyní předpokládejme, že soukromý sektor zná optimalizační problém CB i velikost parametru ϕ. Nalezněte míru inflace π_1, při níž se skutečná inflace a inflační očekávání rovnají. Jaká je odpovídající míra nezaměstnanosti?

d) Žili byste raději v zemi s nižším nebo s vyšším ϕ?

Příklad 9.3. Nyní se podíváme na vzájemnou interakci soukromého sektoru a CB v čase. Předpokládejme Phillipsovu křivku ve tvaru:

$$u_t = u^* + \gamma(\pi_t^e - \pi_t) \quad \forall t = 0, 1, \ldots, \infty$$

CB zná vztah popsaný Phillipsovou křivkou, ale soukromý sektor ne.

Preference CB jsou tvaru:

$$V_t = -u_t^2 - \pi_t^2 \quad \forall t = 0, 1, \ldots, \infty$$

Očekávání inflace soukromého sektoru se formují adaptivně:

$$\pi_t^e = \pi_{t-1} \quad \forall t = 0, 1, \ldots, \infty$$

Přepokládejme, že $\pi_0^e = 0$.

a) Předpolkádejme, že CB bere očekávání soukromého sektoru jako daná. Nalezněte míru inflace $\pi_t^*(\pi_t^e)$, která dává optimum cílové funkce.

b) Nastaví-li CB inflaci $\pi_t = \pi_t^*(\pi_t^e)$, jak se bude vyvíjet inflace v závislosti na její minulé hodnotě?

c) Jak se vyvíjí trajektorie inflace a nezaměstnanosti v čase? Konvergují někam nebo se naopak vyvíjí explozivně?

Příklad 9.4. Odhadněte jednotlivé rovnice soustavy (9.27) pomocí matlabovské funkce `regress`. Diskutujte výsledky (velikost parametrů, některé charakteristiky...) Čím mohou být zjištěné problémy/nesrovnalosti způsobeny?

10. Racionální očekávání

10.1 Princip racionálních očekávání

Nechť proměnná Π_t značí očekávanou hodnotu nějaké veličiny pro čas t na základě informací dosažitelných v čase t. Podobně nechť proměnná Π_{t+k} značí očekávanou hodnotu nějaké veličiny pro čas $t+k$ na základě informací dosažitelných v čase t. Předpokládejme, že současná hodnota veličiny závisí určitou měrou (α) na své očekávané hodnotě v příštím období a na nějakém exogenním vlivu Y_t lineárně:

$$\Pi_t = \alpha \Pi_{t+1} + Y_t \tag{10.1}$$

Tuto diferenční rovnici můžeme rozepsat pro všechna období $t+1, t+2 \dots$ až do ∞:

$$\begin{aligned} \Pi_{t+1} &= \alpha \Pi_{t+2} + Y_{t+1} \\ \Pi_{t+2} &= \alpha \Pi_{t+3} + Y_{t+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Výraz na pravé straně rovnice pro Π_{t+k} dosadíme vždy do rovnice předchozí (zpětná iterace). Provedeme-li to nekonečně mnohokrát, dostaneme Π_t jako následující nekonečnou sumu:

$$\Pi_t = \lim_{n \to \infty} (\alpha^n \Pi_{t+n} + Y_t + \alpha Y_{t+1} + \cdots + \alpha^n Y_{t+n}) \tag{10.2}$$

Pokud vývoj veličiny Π_t nijak neomezíme, nemusí být uvedená limita konečná a systém exploduje. Pokud je parametr α stabilní, tj. pokud $\alpha \in (-1, 1)$, dostaneme nekonečně mnoho stabilních řešení. Abychom dostali jediné stabilní řešení, musí být zároveň splněny dvě podmínky:

- $\alpha \in (-1, 1)$
- Π_{t+n} neroste nade všechny meze

Výše uvedené podmínky zajišťují, že Π_{t+n} neexploduje, ale v limitě konverguje k nule:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha^n \Pi_{t+n} = 0$$

Rovnice (10.2) se tedy zjednoduší na:

$$\Pi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k Y_{t+k}.$$

Příkladem takového vpředhledícího lineárního modelu je např. Phillipsova křivka následujícího tvaru:

$$\pi_t = \alpha E_t \pi_{t+1} + \hat{y}_t, \tag{10.3}$$

kde π_t je míra inflace v čase t, α je parametr, $E_t \pi_{t+1} = E(\pi_{t+1} | \Omega_t)$ jsou podmíněná očekávání míry inflace v čase $t + 1$ při znalosti všech relevantních informací dostupných v čase t.

10.2 Řešení lineárních modelů s RE

10.2.1 Převod modelu

Rovnice v modelu převedeme do následujícího tvaru:

$$AE_t x_{t+1} = Bx_t + C\epsilon_t, \tag{10.4}$$

kde A, B jsou matice koeficientů příslušejících vektoru x_{t+1} a x_t, C je matice koeficientů exogenní složky ϵ.

Příklad 10.1. Rovnici ve tvaru

$$\pi_t = \alpha \pi_{t-1} + \beta E_t \pi_{t+1} + \epsilon_t \tag{10.5}$$

chceme převést do podoby rovnice (10.4). Vektor x_t tedy bude obsahovat složky π_{t-1} a π_t, tedy

$$E_t x_{t+1} = \begin{bmatrix} \pi_t \\ \pi_{t+1} \end{bmatrix} \quad x_t = \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ \pi_t \end{bmatrix}$$

Mezi jednotlivými složkami těchto vektorů je vztah (horní index označuje, o který prvek ve vektoru x_t se jedná).

$$E_t x_{t+1}^{(1)} = x_t^{(2)} \tag{10.6}$$

Rovnici (10.5) můžeme přepsat jako

$$x_t^{(2)} = \alpha x_t^{(1)} + \beta E_t x_{t+1}^{(2)} + \epsilon_t \tag{10.7}$$

Přepis rovnice (10.4) se bude skládat z rovnice (10.7) a dále z rovnice (10.6) popisující vazbu mezi jednotlivými složkami vektorů x_t a x_{t+1}, tedy maticově lze psát:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t x_{t+1}^{(1)} \\ E_t x_{t+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

což je v původních veličinách

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \pi_t \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t.$$

Prvky vektoru x_t, které v čase t známe, nazveme *predeterminovanými*. Ty, které neznáme nazveme *nepredeterminovanými*.

10.2.2 Rozklad a transformace

Dále se budeme zabývat pouze případem, kdy matice A je regulární. Provedeme několik úprav rovnice (10.4).

$$\begin{aligned} AE_t x_{t+1} &= Bx_t + C\epsilon_t \\ E_t x_{t+1} &= A^{-1}Bx_t + A^{-1}C\epsilon_t \\ E_t x_{t+1} &= \tilde{B}x_t + \tilde{C}\epsilon_t, \end{aligned} \tag{10.8}$$

kde $\tilde{B} = A^{-1}B$ a $\tilde{C} = A^{-1}C$.

Dále pro matici $\tilde{B}$ najdeme rozklad

$$\tilde{B} = PVP^{-1}$$

kde matice V je čtvercová diagonální matice, obsahující na hlavní diagonále vlastní čísla. Matice P obsahuje ve sloupcích vlastní vektory. Pro matici V platí $V = P^{-1}\tilde{B}P$.

> *Poznámka:* Vlastní vektory v dané matice A jsou takové vektory, které se tímto zobrazením pouze natahují nebo zkracují, tj.
>
> $$Av = \lambda v$$
>
> Číslo λ, které popisuje, jak se vektor zkrátil či natáhl, nazýváme vlastní číslo. Je-li toto číslo v absolutní hodnotě menší nebo rovno jedné, jedná se o vlastní číslo stabilní; v opačném případě je to vlastní číslo nestabilní.

Dále provedeme lineární transformaci vektoru x_t

$$x_t = Pz_t \tag{10.9}$$

Tedy každý prvek vektoru z_t obsahuje informaci, která ovlivňuje prvek ve vektoru x_t. Tuto transformaci dosadíme do rovnice (10.8) [3]

$$\begin{aligned} E_t x_{t+1} &= \tilde{B}x_t + \tilde{C}\epsilon_t \\ Pz_{t+1} &= \tilde{B}Pz_t + \tilde{C}\epsilon_t \\ z_{t+1} &= \underbrace{P^{-1}\tilde{B}P}_{V} z_t + P^{-1}\tilde{C}\epsilon_t \end{aligned}$$

Výsledkem je tedy

$$z_{t+1} = Vz_t + D\epsilon_t,$$

kde $V = P^{-1}\tilde{B}P$ a $D = P^{-1}\tilde{C}$.

Abychom dostali jediné řešení, vyžaduje Blanchard-Kahnova podmínka, aby

- počet predeterminovaných veličin v x = počtu stabilních vlastních čísel

nebo obráceně

- počet nepredeterminovaných veličin v x = počtu nestabilních vlastních čísel

[3] Symbol z_{t+1} zde označuje očekávanou hodnotu a je zjednodušením zápisu $E_t z_{t+1}$.

10.2.3 Nestabilní část

Rovnice modelu přeskupíme tak, aby v matici V byla nejdříve seřazena stabilní vlastní čísla (část matice označená V_{11}) a poté nestabilní (označeno V_{22}). Tomu samozřejmě odpovídají veličiny ve vektoru z. [4] Obdobně je rozdělena matice D. Pro ilustraci poslouží toto rozepsání

$$z = \left[\frac{z^s}{z^u}\right] \qquad V = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix} \qquad D = \left[\frac{D_1}{D_2}\right]$$

Soustavu rovnic vyřešíme nejprve pro nestabilní část. Rozepíšeme si rovnice pro následující (dvě) časová období.

$$z^u_{t+1} = V_{22} z^u_t + D_2 \epsilon_t \tag{10.10}$$

$$z^u_{t+2} = V_{22} z^u_{t+1} + D_2 \epsilon_{t+1} \tag{10.11}$$

Z rovnice (10.10) si vyjádříme z^u_t. Obdobně z rovnice (10.11) vyjádříme z^u_{t+1} a dosadíme do rovnice (10.10). Výsledkem je poté rovnice (10.12)

$$\begin{aligned} z^u_t &= V_{22}^{-1} z^u_{t+1} - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_t \\ z^u_{t+1} &= V_{22}^{-1} z^u_{t+2} - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_{t+1} \\ z^u_t &= V_{22}^{-2} z^u_{t+2} - V_{22}^{-2} D_2 \epsilon_{t+1} - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_t \end{aligned} \tag{10.12}$$

Pokud výše naznačený postup budeme aplikovat nekonečně mnohokrát, dojdeme k následujícímu výsledku:

$$z^u_t = \underbrace{(V_{22}^{-1})^{\infty} z^u_{t+\infty}}_{=0} - \sum_{k=0}^{\infty} (V_{22}^{-1})^{k+1} D_2 \epsilon_{t+k}. \tag{10.13}$$

Protože matice V_{22} patří k nestabilní části řešení, má tedy na diagonále vlastní čísla větší než jedna. Tedy její inverze V_{22}^{-1} má na diagonále převrácené hodnoty matice V_{22}, tj. čísla menší než jedna. Pokud ji budeme nekonečně mnohokrát umocňovat, tak tyto hodnoty budou konvergovat k nule. Můžeme tedy psát:

$$z^u_t = - \sum_{k=0}^{\infty} (V_{22}^{-1})^{k+1} D_2 \epsilon_{t+k}$$

[4] Veličiny jsou označené horním indexem s jako *stable* a u jako *unstable*.

10.2.4 Stabilní část

Nyní se můžeme pustit do řešení stabilní (horní) části vektoru z.

$$z_{t+1}^s = V_{11} z_t^s + D_1 \epsilon_t. \tag{10.14}$$

K vyřešení této diferenční rovnice potřebujeme znát počáteční podmínku, kterou získáme následujícím způsobem. Vektor x_t můžeme rozdělit na následující složky (predeterminovaná a nepredeterminovaná část):

$$x_t = \left[\frac{x_t^{pred.}}{x_t^{unpred.}} \right]$$

Protože $x_t = P z_t$ můžeme soustavu rovnic pro názornost napsat jako

$$P \left[\frac{z_t^s}{z_t^u} \right] = \left[\frac{x_t^{pred.}}{x_t^{unpred.}} \right]$$

Matice P má tuto strukturu

$$P = \left[\begin{array}{c} P_{11} P_{12} \\ P_{21} P_{22} \end{array} \right]$$

Horní část soustavy můžeme rozepsat

$$P_{11} z_t^s + P_{12} z_t^u = x_t^{pred.}$$

kde z_t^u jsme již vypočítali, $x_t^{pred.}$ v čase t známe. Snadno pak můžeme dopočítat z_t^s.

$$z_t^s = P_{11}^{-1} (x_t^{pred.} - P_{12} z_t^u)$$

Tento výsledek dosadíme do rovnice (10.14) a iterací získáme celou trajektorii z_{t+k}. Konečné řešení soustavy pak dostaneme zpětnou transformací

$$x_t = P z_t$$

10.2.5 BK podmínka

Pokud by Blanchard-Kahnova podmínka nebyla splněna, můžou nastat dva případy s těmito důsledky:

1. Počet nestabilních vlastních čísel $>$ počet nepredeterminovaných proměnných $\Rightarrow$ soustava nemá ani jedno stabilní řešení
2. Počet stabilních vlastních čísel $>$ počet predeterminovaných proměnných $\Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho stabilních řešení

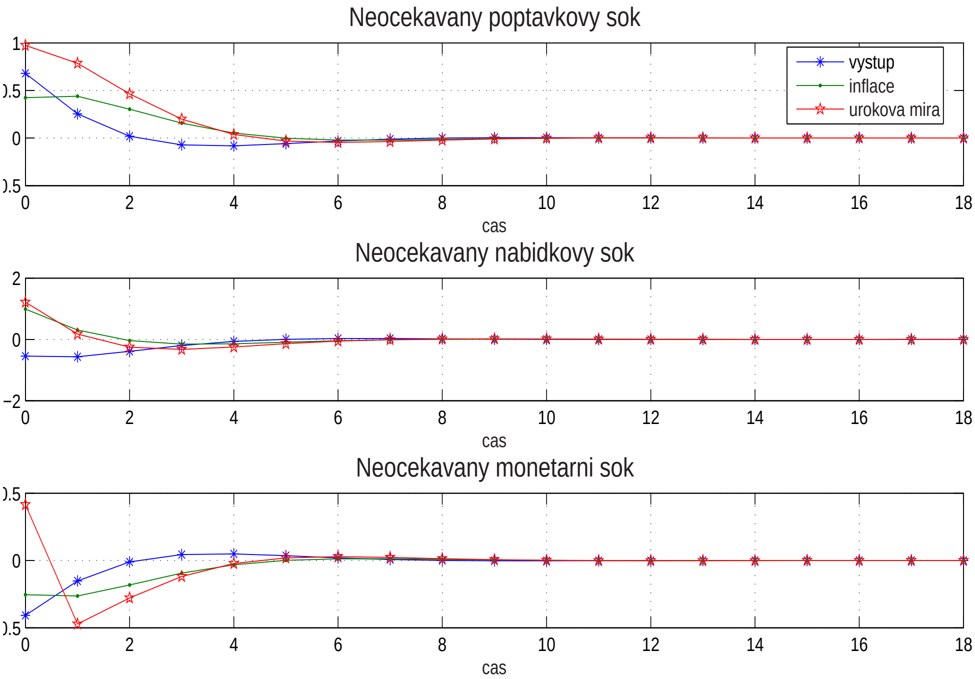
10.3 Cvičení

Příklad 10.2. Namodelujte racionální očekávání v násedujícím modelu:

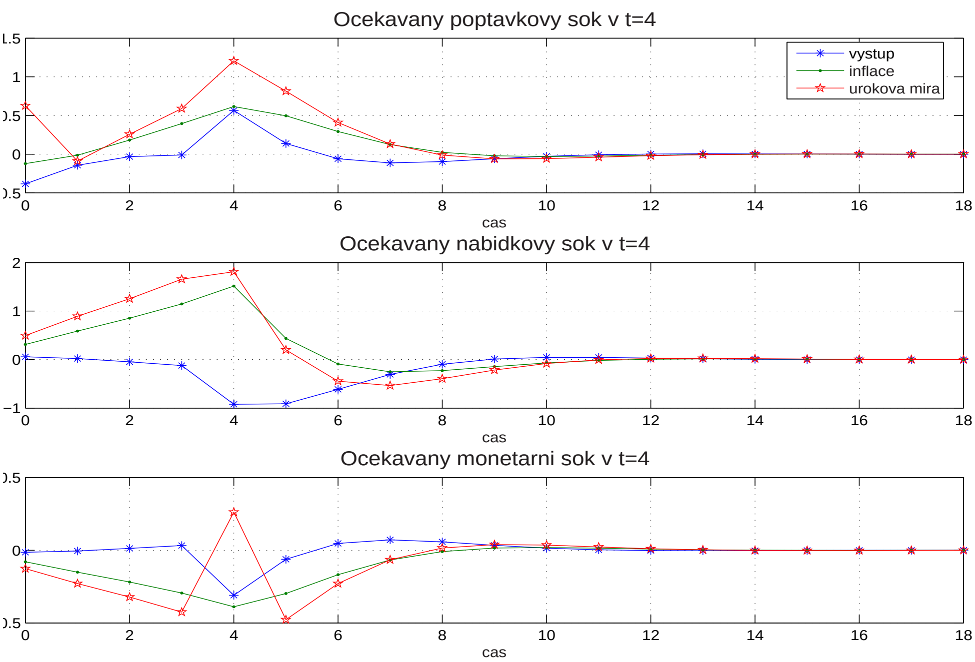
$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha y_{t-1} + \beta r_t + \omega_t \\
\pi_t &= \gamma \pi_{t-1} + (1-\gamma) E_t \pi_{t+1} + \delta y_t + \chi_t \\
r_t &= i_t - E_t \pi_{t+1} \\
i_t &= \lambda y_t + \kappa E_t \pi_{t+1} + \xi_t
\end{aligned}$$

y_t je mezera výstupu, π_t míra inflace, i_t nominální úroková míra, r_t reálná úroková míra; α, β, γ, δ, λ, κ jsou parametry; ω_t, χ_t, ξ_t jsou náhodné složky.

- Vytvořte soubor `zadani.m`, který bude obsahovat hodnoty všech parametrů, definiční matice modelu A, B a C a vektor predeterminovaných řádků.
- Dále vytvořte funkci `matice.m`, která ze zadaného modelu vypočte všechny informace (matice, vlastní čísla) nutné pro výpočet racionálních očekávání.
- Vytvořte funkci `reseni.m`, která racionální očekávání vyřeší.
- Tyto m-files postupně volejte souborem `priklad.m` a vykreslete průběh impulsních odezev při neočekávaném šoku (tj. v $t = 0$) poptávkovém, nabídkovém i monetárním; totéž proveďte pro očekávaný šok v $t = 4$.



Obrázek 10.1: Reakce ekonomiky na neočekávaný poptávkový, nabídkový a monetární šok



Obrázek 10.2: Reakce ekonomiky na očekávané šoky v čase t=4

11. Metody odhadu

11.1 Odhad parametrů

- *Klasický přístup:* parametry modelu jsou považovány za deterministické a konstantní v čase. Používá se např. MNČ nebo MMV, obě dávají pro lineární modely „pěkné” výsledky.

- *Bayesovský přístup:* Parametry jsou považovány za v čase proměnlivé náhodné proměnné. Model se tedy stává dynamickým systémem. Pokud je lineární, výsledky jsou opět pěkné a algoritmus, který lze použít k odhadu, se nazývá Kalmanův filtr. Pokud systém není lineární, lze ho odhadnout pomocí rozšířeného Kalmanova filtru, který se použije na linearizovaný tvar systému. Alternativní metodou je např. použití Bootstrap filtru.

11.2 Metoda nejmenších čtverců

Lineární regresní model (LRM) vysvětluje chování náhodné veličiny y pomocí náhodných veličin x_i tak, že předpokládá lineární závislost na paramterech, tj.:

$$y_t = b_0 + b_1 x_{t1} + b_2 x_{t2} + \ldots + b_k x_{tk} + u_t \qquad t = 1, \ldots, n \tag{11.1}$$

y_t – vysvětlovaná proměnná v čase t (endogenní)
x_{ti} – i-tá vysvětlující proměnná v čase t (exogenní)
u_t – náhodná složka v čase t
b_i – i-tý parametr
n – počet pozorování
$k+1$ – počet parametrů

Maticový zápis LRM:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{u} \tag{11.2}$$

$\boldsymbol{y}$ – vektor pozorování
$\boldsymbol{X}$ – matice plánu
$\boldsymbol{b}$ – vektor parametrů

kde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Metoda nejmenších čtverců dává takový odhad $\hat{\boldsymbol{b}}$ vektoru parametrů $\boldsymbol{b}$, aby byl minimalizován součet čtverců chyb (reziduí), tj.

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}})'(\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}) \to \min \tag{11.3}$$

Odhad $\hat{\boldsymbol{b}}$ vektoru parametrů $\boldsymbol{b}$ metodou nejmenších čtverců (MNČ) (Tento odhad lze odvodit z tzv. normálních rovnic, což jsou derivace kriteria SSE podle všech parametrů položené rovny nule.)

$$\hat{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{11.4}$$

Vyrovnané hodnoty $\hat{\boldsymbol{y}}$ vektoru $\boldsymbol{y}$ (tj. ten náš odhad)

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{b}} \tag{11.5}$$

Rezidua neboli chyba vyrovnání, tj. rozdíl mezi skutečnými a vyrovnanými hodnotami

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}} \tag{11.6}$$

Předpoklady pro použití MNČ

1) náhodná složka ($\boldsymbol{u}$) musí mít normální rozdělení
2) $E(u_t) = 0, \; t = 1 \ldots, n$
3) $D(u_t) = \sigma^2, \; t = 1 \ldots, n$ (homoskedasticita)
4) náhodné složky různých období jsou vzájemně nekorelované (nulová kovariance), tj. $E(u_t \cdot u_{t+p}) = 0, \; p \neq 0, \; t = 1 \ldots, n$ tedy

   3)+4) $\Leftrightarrow$ $var(\boldsymbol{u}) = E(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}) = \sigma^2 \cdot I_n = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & \sigma^2 \end{pmatrix}$
5) vysvětlující proměnné nejsou náhodné (jsou nestochastické), tj.

   $E(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}) = 0$
6) vysvětlující proměnné jsou navzájem nezávislé a jejich počet je menší než počet pozorování, tj. $h(\boldsymbol{X}) = k + 1 \leq n$

11.3 Metoda maximální věrohodnosti

- Mějme náhodný výběr $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ z rozdělení o hustotě $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ (vektor parametrů).

- $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta})$, tj. simultální hustota je v případě náhodného výběru součinem marginálních hustot; (v diskrétním případě je to pravděpodobnostní funkce).

- Označme $L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta})$. Funkci $L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X})$ nazveme *věrohodnostní funkce* .

- Odhad $\boldsymbol{\theta}^*$ nazveme *maximálně věrohodným* odhadem $\boldsymbol{\theta}$, jestliže

$$L(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{X}) \geq L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}) \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

- Pokud existují $\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$, nazýváme je *věrohodnostní rovnice* (nutná podmínka pro extrém; extrém poznáme podle druhé derivace).

- Položíme-li $\ln 0 = -\infty$, pak $\boldsymbol{\theta}^*$ je maximálně věrohodný odhad, právě když
$$\ln L(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{X}) \geq \ln L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}) \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$
- $l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X})$ je logaritmická věrohodnostní funkce, $\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$ logaritmická věrohodnostní rovnce
- $l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{X}) = \ln f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\theta}) = \ln \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \boldsymbol{\theta}) \Rightarrow$
$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$

Příklad 11.1. Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim A(\theta)$, tj. náhodný výběr z alternativního rozdělení o parametru θ. (Např. náhodná veličina X_i popisuje, zda i-tý student uspěje u zkoušky, $i = 1, \ldots, n$. Pokud uspěje, $X_i = 1$; tento jev nastane s pravděpodobností θ. Pokud neuspěje, $X_i = 0$; tento jev nastane s pravděpodobností $1-\theta$.) Nalezněte maximálně věrohodný odhad parametru θ.
$[\theta^* = \overline{\boldsymbol{X}}]$

Příklad 11.2. Mějme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. (Např. náhodná veličina X_i udává hmotnost vybraného studenta v ročníku). Nalezněte maximálně verohodný odhad pro střední hodnotu hmotnosti studenta a pro její rozptyl.
$[\overline{X};\ \frac{n-1}{n} S^2]$

11.4 Kalmanův filtr

- Kalmanův filtr je specialním případem odhadu pro normálně rozložené stavy $\boldsymbol{x}$ i výstupy $\boldsymbol{y}$. Normálně rozdělenou náhodnou veličinu plně charakterizuje její střední hodnota a rozptyl. Stačí tedy po celou dobu výpočtu sledovat pouze tyto dvě číselné charakteristiky.
- Mají-li být stavy rozloženy normálně, musí být příslušný dynamický systém nutně lineární s gaussovskými šumy, což je největší slabina Kalmanova filtru.

11.4.1 Obyčejný Kalmanův filtr

Mějme lineární diskrétní stochstický systém (x_t je vektor stavů, y_t je vektor výstupních hodnot, u_t je vektor exogenních hodnot, A, B, C a D jsou matice koeficientů, v_t a w_t jsou šumy):

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + v_t \tag{11.7a}$$

$$y_t = Cx_t + Du_t + w_t \tag{11.7b}$$

splňující: $x_0 \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$, $v_t \sim N(0, \Sigma_v)$, $w_t \sim N(0, \Sigma_w)$, $Ev_t w_t^T = 0$, $Ex_0 v_t^T = 0 \quad \forall t$, kde vektor μ_0 a matice $\Sigma_0, \Sigma_v, \Sigma_w$ jsou známé.

Označme D_t data známá v čase t a $x_{t|k} = x_t|D_k$. Pak apriorní estimátor $x_{t|t-1}$ a aposteriorní estimátor $x_{t|t}$ jsou normální pro všechna t, tj.

$$\begin{aligned} x_{t|t-1} &\sim N(\mu_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}) \\ x_{t|t} &\sim N(\mu_{t|t}, \Sigma_{t|t}) \end{aligned}$$

kde střední hodnoty $\mu_{t|t-1}, \mu_{t|t}$ a varianční matice $\Sigma_{t|t-1}, \Sigma_{t|t}$ se vypočtou podle vztahů:

$$\mu_{t|t} = \mu_{t|t-1} + K_t(y_t - C\mu_{t|t-1} - Du_t) \tag{11.8a}$$

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t C \Sigma_{t|t-1} \tag{11.8b}$$

$$\mu_{t+1|t} = A\mu_{t|t} + Bu_t \tag{11.8c}$$

$$\Sigma_{t+1|t} = A\Sigma_{t|t}A^T + \Sigma_v \tag{11.8d}$$

$$K_t = \Sigma_{t|t-1}C^T(C\Sigma_{t|t-1}C^T + \Sigma_w)^{-1} \tag{11.8e}$$

11.4.2 Rozšířený Kalmanův filtr

- Rozšířený Kalmanův filtr představuje standardní přístup k odhadu nelineárních rekurzivních systémů.
- Nelineární dynamický systém v každém kroku přibližně nahradíme jeho linearizací. Na tento linearizovaný systém pak aplikujeme obyčejný Kalmanův filtr.

Mějme nelineární dynamický systém:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) + v_t \tag{11.9a}$$
$$y_t = g(x_t, u_t) + w_t \tag{11.9b}$$

s počáteční podmínkou $x_0 \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$. *Rozšířený Kalmanův filtr* definujeme jako algoritmus výpočtu následujících estimátorů:

$$x_{t|t-1} \sim N(\mu_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1})$$
$$x_{t|t} \sim N(\mu_{t|t}, \Sigma_{t|t})$$
$$x_{t|N} \sim N(\mu_{t|N}, \Sigma_{t|N})$$

kde

$$\mu_{t|t} = \mu_{t|t-1} + K_t(y_t - g(\mu_{t|t-1}, u_t)) \tag{11.10a}$$
$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t C_t \Sigma_{t|t-1} \tag{11.10b}$$

$$\mu_{t+1|t} = f(\mu_{t|t}, u_t) \tag{11.10c}$$
$$\Sigma_{t+1|t} = A_t \Sigma_{t|t} A_t{}^T + \Sigma_v \tag{11.10d}$$
$$K_t = \Sigma_{t|t-1} C_t{}^T (C_t \Sigma_{t|t-1} C_t{}^T + \Sigma_w)^{-1} \tag{11.10e}$$

$$\mu_{t|N} = \mu_{t|t} + F_t(\mu_{t+1|N} - \mu_{t+1|t}) \tag{11.10f}$$
$$\Sigma_{t|N} = \Sigma_{t|t} - F_t(\Sigma_{t+1|t} - \Sigma_{t+1|N}) F_t{}^T \tag{11.10g}$$
$$F_t = \Sigma_{t|t} A^T \Sigma_{t+1|t}^{-1} \tag{11.10h}$$

a kde matice A_t, C_t jsou následující Jakobiány:

$$A_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_{t|t}) \qquad C_t = \frac{\partial g}{\partial x}(\mu_{t|t-1}) \tag{11.11}$$

11.5 Bootstrap filtr

- Tato metoda představuje alternativní metodu odhadu, zejména pro negaussovské systémy.

- Vážený bootstrap algoritmus je metodou pro nalezení optimálního odhadu dynamických systémů. Jeho hlavní síla spočívá v jeho obecnosti. Lze ho aplikovat na jakýkoli nelineární systém s libovolně rozloženými šumy.
- Je to aplikace metody *Monte Carlo* při bayessovské estimaci. Metoda Monte Carlo je založena na tom, že informaci o rozložení náhodné veličiny nese náhodný výběr z tohoto rozložení. Čím je náhodný výběr delší, tím je informace přesnější.
- Pro náhodný vektor $x \in \mathcal{L}^{n_x}$ máme náhodný výběr $(x_1, \ldots, x_n)$ délky n, obsahující vzorky $x_i \in \mathcal{R}^{n_x}$. Empirická hustota pravděpodobnosti získaná z náhodného výběru je aproximací skutečné hustoty pravděpodobnosti náhodného vektoru x.

Empirickou hustotu prravděpodobnosti lze psát jako:

$$p_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x_i) \tag{11.12}$$

kde $\delta(x) : \mathcal{R}^{n_x} \to \mathcal{R}$ je tzv. *Diracova funkce*, definovaná jako:

$$\delta(x) = \lim_{h \to 0} \delta_h(x), \quad \delta_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{for } 0 < x < h \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{11.13}$$

Jednotlivým vzorkům přiřadíme váhy $w_i \geq 0$ tak, aby součet vah dal jedničku. Empirická hustota pravděpodobnosti je pak:

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \delta(x - x_i) \tag{11.14}$$

Mějme dynamický systém:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, u_t, v_t) \\ y_t &= g(x_t, u_t, w_t) \end{aligned}$$

s počátečním stavem x_0 a s empirickou pravděpodobnostní funkcí:

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i(0|-1)\delta(x - x_i(0|-1))$$

Mějme dána data D_t. Potom odhady $x_{t|t-1}, x_{t|t}, x_{t|N}$ s empirickou pravděpodnostní funkcí:

$$p_n(x_{t|t-1}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t|t-1)\delta(x - x_i(t|t-1))$$
$$p_n(x_{t|t}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t|t)\delta(x - x_i(t|t))$$
$$p_n(x_{t|N}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t|N)\delta(x - x_i(t|N))$$

jsou vypočteny *váženým bootstrap algoritmem*, právě když platí:

$$x_i(t|t) = x_i(t|t-1) \tag{11.15}$$
$$\overline{w}_i(t|t) = p(y(t)|x_i(t|t-1), u(t))\, w_i(t|t-1) \tag{11.16}$$
$$w_i(t|t) = \frac{\overline{w}_i(t|t)}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j(t|t)} \tag{11.17}$$

$$x_i(t+1|t) = f(x_i(t|t), u(t)) + v_i(t) \tag{11.18}$$
$$w_i(t+1|t) = w_i(t|t) \tag{11.19}$$

$$x_i(t|N) = x_i(t|t) \tag{11.20}$$
$$\overline{w}_i(t|N) = w_i(t|t) \sum_{j=1}^{n} w_j(t+1|N)\, p(x_j(t+1|N)|x_i(t|N), u(t)) \tag{11.21}$$
$$w_i(t|N) = \frac{\overline{w}_i(t|t)}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j(t|t)} \tag{11.22}$$

11.6 Ukázky metod odhadů ekonomických modelů