# Míra růstu v makroekonomii ve finanční matematice

Václav Studený

Department of Applied Mathematics, Faculty of Economics
and Administration, Masaryk University
Lipová 24a, 602 00 Brno
studeny@econ.muni.cz

**1. Axiomy:** Uvažujme veličinu jejíž hodnoty $y_1$ a $y_2$ jsou známy ve dvou bodech $x_1$ a $x_2$ (tyto hodnoty mohou být například výsledek měření). Funkce $\kappa\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, která bude kvantifikovat přírůstek této veličiny by měla mít následující vlastnosti

**axiom 1** invariance vůči posunutí (v čase)

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa(x_1 + t, y_1, x_2 + t, y_2) \tag{1}$$

**axiom 2** invariance vůči homotetiím (například vůči volbě měny)

$$k > 0 \Longrightarrow \kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa(x_1, y_1 \cdot k, x_2, y_2 \cdot k) \tag{2}$$

Dále požadavek symetrie v růstu a poklesu:

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = -\kappa(x_1, -y_1, x_2, -y_2) \tag{3}$$

vynucuje podmínku axiomu 2 i pro $k < 0$

**axiom 3** $\kappa$ je rostoucí v první a čtvrté proměnné a klesající ve druhé a třetí proměnné.

**axiom 4** Počáteční podmínka: $\kappa(x_1, y, x_2, y) = 0$. (Míra růstu konstantní funkce je nulová.)

Máme

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) \overset{\text{Ax1}}{=} \kappa(0, y_1, x_2 - x_1, y_2) \overset{\text{Ax2}}{=} \kappa\left(0, 1, x_2 - x_1, \frac{y_2}{y_1}\right) \tag{4}$$

tak že existuje $\lambda\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \lambda\left(x_2 - x_1, \frac{y_2}{y_1}\right) \tag{5}$$

A $\lambda$ je klesající v první a rostoucí ve druhé proměnné.

**2. Funkce v ustáleném stavu:**

DEFINICE Řekneme, že funkce $f$ je v ustáleném stavu vzhledem k míře růstu $\kappa$ je-li $(x_1, x_2) \mapsto \kappa(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$ konstantní funkce.

Hledáme funkce $f$ takové, že

$$\kappa(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2)) = konst. \tag{6}$$

Předpokládejme, že už známe hodnotu $f(x_1)$ a $f(x_2)$ funkce $f$ ve dvou bodech $x_1$ a $x_2 = x_1 + h$ Pak

$$\kappa(x_2, f(x_2), x_2 + h, f(x_2 + h)) = \lambda\left(h, \frac{f(x_2 + h)}{f(x_2)}\right) = \lambda\left(h, \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)}\right) \tag{7}$$

A protože $\lambda$ je prostá v každé proměnné (Ax 3, viz pozn. za Ax. 4) je

$$\frac{f(x_1 + 2h)}{f(x_1 + h)} = \frac{f(x_2 + h)}{f(x_2)} = \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} \tag{8}$$

a dále indukcí:

$$f(x_1 + nh) = \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} \cdot f(x_1 + (n-1)h) = \left(\frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)}\right)^n \tag{9}$$

takže v dalších ekvidistantních bodech tvoří hodnoty funkce $f$ geometrickou posloupnost. Stejně ovšem:

$$\frac{f(x_1 + h/2)}{f(x_1)} \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1) + h/2} \Longrightarrow \frac{f(x_1 + h)}{f(x_1)} = \left(\frac{f(x_1 + h/2)}{f(x_1)}\right)^2 \tag{10}$$

Takže $f$ má hodnoty exponenciální funkce i ve všech bodech množiny $\{\frac{ah}{2^b}, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$. A protože tato množina je hustá (dense) v $\mathbb{R}$, platí:

**2.1. Lemma:** Je-li nějaká spojité funkce $f$ v ustáleném stavu vzhledem k míře růstu, která splňuje axiomy Ax1 – Ax4, pak je to exponenciální funkce $f\colon x \mapsto Ae^{Bx}$ s nějakými konstantami $A$ a $B$.

Pokud chceme, aby všechny exponenciální funkce $x \mapsto Ae^{Bx}$ byly v ustáleném stavu, máme (označíme-li $h = x_2 - x_1$)

$$\forall B\colon \kappa\left(x_1, Ae^{Bx_1}, x_2, Ae^{Bx_2}\right) = \lambda\left(x_2 - x_1, \frac{Ae^{Bx_2}}{Ae^{Bx_1}}\right) = \lambda\left(h, e^{Bh}\right) = konst \tag{11}$$

a platí:

$$\lambda(h, z) = \lambda\left(h, e^{h\ln\left(z^{1/h}\right)}\right) \xlongequal{B=\ln\left(z^{1/h}\right)} \lambda\left(1, e^{\ln\left(z^{1/h}\right)}\right) = \lambda\left(1, z^{\frac{1}{h}}\right) \tag{12}$$

a

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \kappa\left(0, 1, 1, \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}\right) \tag{13}$$

a tedy pro každou míru růstu $\kappa$ splňující axiomy Ax1 – Ax4, k níž jsou všechny exponenciální funkce $x \mapsto Ae^{Bx}$ v ustáleném stavu existuje nějaká rostoucí funkce

$$\kappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \phi\left(\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}}\right) \tag{14}$$

**2.2. Note:** Ve finanční matematice se používá translace

$$\phi\colon x \mapsto x - 1$$

a míra růstu

$$\kappa_1\colon (x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} - 1 \tag{15}$$

je tzv. *úroková míra složeného úročení za jednotku času.*

Ve finanční matematice se také částečně z historických důvodů, částečně z rigidity některých obchodních vztahů a zákonů používá tzv. úroková míra jednoduchého úročení:

$$f\colon \hat{\kappa}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} - 1 \tag{16}$$

Podle této míry jsou funkce v ustáleném stavu polynomy prvního stupně:

$$f\colon z \longmapsto (f(x_1) + Kf(x_1))\, z + f(x_1) - (f(x_1) + Kf(x_1))\, x_1 \tag{17}$$

**3. Infinitezimální verze, (Limitní tvar):**

V makroekonomii často potřebujeme vyjádřit rychlost $\nu$ růstu nějaké veličiny $f$ v bodě a ne na intervalu: Pokud budeme chtít aby míra růstu veličiny $f$ v bodě $x_0$ byla limitním případem její míry a pokud je $\phi$ spojitá, máme:

$$\nu(f)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \kappa(x_0, f(x(0)), x, f(x)) = \lim_{x \to x_0} \phi\left(\left(\frac{f(x)}{f(x_0)}\right)^{\left(\frac{1}{x - x_0}\right)}\right) = \phi\left(e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}}\right) \tag{18}$$

A pro $\kappa = \kappa_1$ máme

$$\nu_1(f)(x_0) = e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}} - 1 \tag{19}$$

V makroekonomii se často používá míra, kterou dostaneme volbou (14) pro tuto míru funkce ln. V takovém případě jest

$$\tilde{\nu}(f)(x_0) = \frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)} \tag{20}$$

a pokud bychom tutéž funkci použili jako míru růstu v (14) míra růstu na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$ by byla:

$$\tilde{\kappa}(x_0, f(x_0), x_1, f(x_1)) = \ln\left(\left(\frac{f(x_0)}{f(x_1)}\right)^{\left(\frac{1}{x_0 - x_1}\right)}\right) = \frac{\ln(f(x_0)) - \ln(f(x_1))}{x_0 - x_1} \tag{21}$$

Což je relativní přírůstek funkce $\ln \circ f$ (nikoliv funkce $f$) vzhledem k přírůstku argumentu této funkce. Tuto limitu v bodě $x_2 \to x_1$ má i $\hat{\kappa}(x_0, f(x_0), x_1, f(x_1))$

**3.1. Note:** Zajímavé je, že

$$\hat{\nu} = \lim_{x \to x_0} \hat{\kappa}(x_0, f(x_0), x_1, f(x_1)) = \tilde{\nu}(f)(x_0) \tag{22}$$

Zatímco

$$\hat{\nu} \neq \nu \tag{23}$$

Volíme-li v (14)

$$\phi(x) = x^t - 1 \tag{24}$$

dostaneme

$$\kappa_t(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} - 1 \tag{25}$$

což je tzv. *úroková míra složeného úročení za dobu délky* $t$ a platí známé vztahy

$$\kappa = \kappa_1 = \left(\kappa_{\frac{1}{t}} + 1\right)^t \tag{26}$$

Podobně jako $\kappa_t$ můžeme definovat i

$$\hat{\kappa}_t = f\colon \hat{\kappa}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{x_2 - x_1}\frac{1}{t} - 1 \tag{27}$$

Což je míra jednoduchého úročení za dobu délky $t$ a platí známé vztahy:

$$\hat{\kappa}_{\frac{1}{t}} = \frac{\hat{\kappa}_1}{t} \tag{28}$$

Funkce $\kappa \mapsto \frac{\kappa_t}{t}$ je Taylorovým polynomem stupně 1 v bodě 0 funkce $\kappa \mapsto (\kappa_t + 1)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1$ a historicky se používala k aproximaci při výpočtu úrokových měr za krátkou dobu. K legitimizaci této nepřesnosti vedlo zavedení pojmu interval připisování úroků. Dosazením $\frac{\kappa_1}{t}$ za $\kappa_{\frac{1}{t}}$ s nezanedbatelnou chybou, která je rostoucí v $t > 0$, dostaneme

$$\kappa_1 \sim \left(1 - \frac{\kappa}{t}\right)^t - 1 = \lambda_1 \tag{29}$$

Chyba $\lambda_1 - \kappa_1$ ovšem neroste přes všechny meze, ale má konečnou limitu $e^\kappa - 1 - \kappa$ v nekonečnu a platí

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_1 = \lim_{t\to\infty}\left(1 = \frac{\kappa}{t}\right)^t - 1 = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1 = \frac{\kappa}{t}\right)^{\frac{t}{\kappa}}\right)^\kappa - 1 = e^\kappa - 1$$

Působivost magického zjevení Eulerovy konstanty v tomto výpočtu dalo kdysi vzniknout pojmu *spojité úročení*. Je to obyčejné složené ůročení, ale místo úrokové míry $\kappa_1$ z (15) se pod jménem úroková míra uvádí hodnota $ln(\kappa_1 + 1)$.

Číslo $\ln(\kappa_1 + 1)$ dostaneme jako míru růstu, pokud v (14) volíme $\phi = \ln$ a v limitě dostaneme míru $\tilde{\nu}$ jako v (20).

## 4. Inverzní problém:

Použijeme-li jako míru růtu funkce $f$ zobrazení $\nu$ máme

$$\nu(f)(x) = e^{\frac{D(f)(x_0)}{f(x_0)}} - 1 \tag{30}$$

Což je explicitnín vyjádření pro míru růstu $\nu$ pokud známe $f$ a differenciální rovnice pro stavovou funkci $f$, pokud známe její míru růstu $\nu$. Tuto rovnici můžeme ekvivalentě psát ve tvarech:

$$\ln\left(\nu\left(t\right)+1\right)=\mathrm{D}\left(\ln\circ f\right)\left(t\right)$$

nebo

$$\mathrm{D}\left(f\right)\left(t\right)=\ln\left(\nu\left(t\right)+1\right)\cdot f\left(t\right)$$

Rovnici můžeme vyřešit a její řešení je:

$$f\colon x\mapsto e^{\left(\int_0^x\ln(\nu(s)+1)\mathrm{d}s\right)}f\left(0\right) \tag{31}$$

kde $\nu\left(t\right)$ je úroková míra z jednotku času v okamžiku $t$.

Provedeme-li tentýž výpočet pro míru $\tilde{\nu}$ dostaneme rovnici (20),

$$\tilde{\nu}\left(f\right)\left(x_0\right)=\frac{D\left(f\right)\left(x_0\right)}{f\left(x_0\right)}$$

a její řešení je

$$f\colon x\mapsto e^{\int_0^x\nu(s)\mathrm{d}s}f\left(0\right) \tag{32}$$

Výhodou formule (32) je, že je jednodužší, než (31), její nevýhodou ovšem je, že pokud do ní dosadíme konstantní úrokovou míru, nedostaneme obvyklou formuli pro složené úročení. Následující příklad ukazuje, použití formule (31).

Na příkldě ukážeme použití vzorce (31)

**4.1. Example:** předpokládejme, že známe míru míru inflace za jednotku času (například roční míru inflace, pokud jednotkou zvolíme rok) v okamžiku 0 a v okamžiku 1. Předpokláejme, že v okamžimu 0 byla míra inflace za jednotku času rovna 0.1 a oamžiku 1 byla míra inflce 0.2.

Zajímá nás míra inflace za dobu $\langle 1,0\rangle$. Je zřejmé, že tato míra inflace závisí na tom, jak se míra inflce měnila uvnitř intervalu $\langle 1,0\rangle$. uto informaci můžeme získatž z nějaké obecné teorie časových řad nebo aproximací. uvažujme čtyři možnosti: že byla po celou dobu konstatní a měnila se skokem v jednom, nebo ve druhém krajním bodě intervalu, že se měnila v afinní závislosti na čase a v kvadratické závislosti na čase. V těchto čtyřech případech jsou hodnotz míry inlace za jednotku času dány jednou ze čtyř následujících funkcí:

$$\bar{\iota}_1\left(u\right):=\begin{cases}0.1, & \text{if } u<1\\ 0.2, & \text{if } u\geq 1\end{cases},\quad \bar{\iota}_2\left(u\right):=\frac{u^2}{10}+0.1,\quad \bar{\iota}_3\left(u\right):=\frac{u}{10}+0.1,\quad \bar{\iota}_4\left(u\right):=\begin{cases}0.1, & \text{if } u\leq 0\\ 0.2, & \text{if } u>0\end{cases} \tag{33}$$

Přitom první poslední možnost jsou triviální případy — míra za jednotku času je kosantní interval, za který počítáme inflaci má jednotkovou délku, tedy míra inflace za tuto dobu bz měla být tatáž konstanta. Obecný vzorec tedy musí dávat stejný výsledek. Máme:

$$\iota\left(\langle 0,1\rangle\right)=\mathrm{e}^{\left(\int_0^1(\ln(1+\bar{\iota}(u)\,\mathrm{d}\,u))\right)}-1 \tag{34}$$

takže postupně v našich čtyřech příkladech vzchází:

$$\bar{\iota}=\bar{\iota}_1=0.1\colon X\left(1\right)=e^{\left(\int_0^1\ln(1.1)\ \mathrm{d}\,u\right)}-1=0.1 \tag{35}$$

$$\bar{\iota}=\bar{\iota}_2=u\mapsto\frac{1}{10}u^2+0.1\colon X\left(1\right)=e^{\left(\int_0^1\ln\left(1.1+u^2/10\right)\ \mathrm{d}\,u\right)}-1=0.132945354\ldots \tag{36}$$

$$\bar{\iota}=\bar{\iota}_3=u\mapsto\frac{1}{10}u+0.1\colon X\left(1\right)=e^{\left(\int_0^1\ln(1.1+u/10)\ \mathrm{d}\,u\right)}-1=0.149637533\ldots \tag{37}$$

$$\bar{\iota}=\bar{\iota}_4=0.2\colon X\left(1\right)=e^{\left(\int_0^1\ln(1.2)\ \mathrm{d}\,u\right)}-1=0.2 \tag{38}$$

s kvantitativní shodou výsledku v prvním a posledním příkladu s výsledkem, který jsme očekávali. Této shody bychom, bohužel, nedosáhli, kdybychom použili formuli (32) dostaneme

$$e^{\int_0^1 0.1du} - 1 = 0.105170918 \tag{39}$$

$$e^{\int_0^1 1/10\,u^2+0.1du} - 1 = 0.142630812 \tag{40}$$

$$e^{\int_0^1 1/10\,u+0.1du} - 1 = 0.161834243 \tag{41}$$

$$e^{\int_0^1 0.2du} - 1 = 0.221402758 \tag{42}$$

and the first and the last results are obviously without question wrong (if we suppose interest rate). We can say that the inflation does not behave as the so called continuous interest.

Obvyklá formule pro budoucí hodnotu složeného úročení v případě, že úroková míra je konstantní je

$$x\,(t) = x\,(0) \cdot (1+\xi)^t\,, \tag{43}$$

a v případě, že je po částech konstantní, tedy If $I_i$ are the interest rates p. a. constant on the intervals $I_i = (t_i,\, t_{i+1})\ ;\ i = 0 \ldots n$ then the interest rate per $\cup_{i=0}^n I_i$ is

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} \tag{44}$$

**4.2. Theorem:** The formula (43) is a special case of the formula (44) for the constant interest rate and the formula (44) is a special case of the formula (31) for the piecewise constant rate of interest.

*Proof:* Let us suppose that $\iota\,(t) = I$ is constant:

$$e^{\left(\int_0^t \ln(1+I)\ \mathrm{d}\,u\right)} = e^{(t\cdot\ln(1+I))} = e^{\left(\ln(1+I)^t\right)} = (1+I)^t \tag{45}$$

Now let us suppose that $\iota$ is piecewise constant and that its value is $I_i$ in every point of the interval $I_i = (t_i,\, t_{i+1})\ ;\ i = 0 \ldots n$. Let $\chi_A$ be the characteristic function of the set A, then $\iota\,(t) = \sum \chi_{(t_i,t_{i+1})} \cdot I_i$

$$= e^{\left(\int_0^t \ln\left(1+\chi_{(t_i,t_{i+1})}\right)\cdot I_i\ \mathrm{d}\,u\right)} = e^{\left(\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}\ln(1+I_i) - t_i\ln(1+I_i))\right)} =$$
$$= \prod_{i=0}^{n-1} e^{(t_{i+1}-t_i)\cdot\ln(1+I_i)} = \prod_{i=0}^{n-1} e^{\ln}\,(1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} = \prod_{i=0}^{n-1} (1+I_i)^{(t_{i+1}-t_i)} \tag{46}$$

q. e. d.

Functional

$$\iota \mapsto e^{\int_0^t \ln(1+\iota(s))\mathrm{d}s}$$

is continuous in the topology of uniform convergence.

the importance of the theorem (44) results from the following lemma:

**4.3. Lemma:** For every continous function $\iota$ defined on a closed intervale there is a sequence of piecewise constant functions $\xi_i$ such that že $\xi_i \to \iota$

*Proof:* Let us suppose that $f$ is continuous. According to the presumption the $\mathrm{Dom}\,(f)$ is compact. Let us choose a $\epsilon$ possitive. For every $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$ we will find neighbourhood $O\,(x)$ so that $F\,(O\,(x)) \subset O_{\epsilon/2}\,(f\,(x))$. $O\,(x)$ forms coverage of $\mathrm{Dom}\,(f)$ we will choose the final subcoverage $\Omega$. We will define $\delta = \min_{U\in\Omega}(\mathrm{Diam}\,(U))$, where$(\mathrm{Diam}\,(U))$ is the diameter of the set $U$. We devide $\mathrm{Dom}\,(f)$ to $n$ disjoint subintervals $(J_i^\epsilon)_i = 1^n$ of the length $\delta$. For every interval $J_i^\epsilon$ we will choose a point $x_i$, that is located inside and we denote it $y_i = f\,(x_i)$. Let us define: $x \in J_i^\epsilon \implies \zeta_\epsilon\,(x) = y_i$. Then $\forall x \in \mathrm{Dom}\,(f) : |f\,(x) - \zeta_\epsilon\,(x)\,| \le \epsilon$. And for $\xi_n = \zeta_{\frac{1}{2^n}}$ the presumptions of the lemma are satisfied.

**4.4. Corollary:** (44) says that the formula (43) is a special case of the formula (31). For the function that has only a finite number of discontinuity points we can make the approximation on each interval on which the function is continuous as in the lemma (46). And that means that the formula (31) is a limit case of the formula (15).

**5. Boundary interest rate:** If the interest rate is constant and positive, the state function is increasing and constant. If it is positive, but very quickly decreasing, the state function will be concave. What interest rate makes the state function afine (polynomial of degree 1)?

State function is

$$t \mapsto x(0)\, e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds} \tag{47}$$

its derivative is

$$t \mapsto x(0) \ln(1+\xi(t))\, e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds} \tag{48}$$

and the second derivative is

$$t \mapsto \frac{x(0)\, e^{\int_0^t \ln(1+\xi(s))ds} \left(\frac{d}{dt}\xi(t) + (\ln(1+\xi(t)))^2 + (\ln(1+\xi(t)))^2 \xi(t)\right)}{1+\xi(t)} \tag{49}$$

We are looking for the interest rate, which makes the second derivative equal to zero. If $x(0) \neq 0$ and $\xi > 0$, second derivative is equal to zero for such a $\xi$, which are the solutions of differential equation

$$\frac{d}{dt}\xi(t) + (\ln(1+\xi(t)))^2 + (\ln(1+\xi(t)))^2 \xi(t) = 0 \tag{50}$$

i. e. we solve the differential equation

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = -(\ln(1+\xi(t)))^2 (1+\xi(t)). \tag{51}$$

Its solution fulfilled the algebraical equation

$$-(\ln(1+\xi(t)))^{-1} + t = C \tag{52}$$

hence it is any of the functions

$$t \mapsto \xi(t) = e^{\left(\frac{1}{t-C}\right)} - 1 \tag{53}$$

for all constant $C$. We express $C$ using the initial condition

$$C = -\frac{1}{\ln(1+\xi(0))}$$

and we have

$$\xi(t) = e^{\left(\frac{1}{t+\frac{1}{\ln(1+\xi(0))}}\right)} - 1 = (1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{t\ln(1+\xi(0))+1}\right)} - 1 \tag{54}$$

If we put this interest rate into the rule for interesting (31) we obtain:

$$x(t) = x(0)\; e^{\left(\int_0^t \ln\left((1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{s\ln(1+\xi(0))+1}\right)}\right) ds\right)} = x(0)\; (t\ln(1+\xi(0))+1) \tag{55}$$

and this really is an affine function. We can conclude: If the interest rate has in the time 0 value $\xi(0)$ and if on the dependence on the time grows more quickly (decrease slowly) than function

$$t \mapsto (1+\xi(0))^{\left(\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\ln(1+\xi(0))+1}\right)} - 1 \tag{56}$$

in the dependence on the time then the state function is convex. If it decreases more quickly, the state function is concave.