Vlastnosti užitkové funkce, geometrické znázornění

Pro užitkovou funkci $u(x)$ zavedenou výše pomocí relace „ $\succeq$„ přijmeme nyní některé vlastnosti, které jsou odvoditelné z vlastností preferenční relace „ $\succeq$ „a současně se ukazují jako opodstatněné téměř ve všech situacích spojených s rozhodováním spotřebitele na základě svých preferenčních kritérií.

Definice 1 **Jestliže funkce $u(x)$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má tyto vlastnosti**

(U1) $u(x)$ je *reálná konečná funkce* a platí pro ni $u(0) = 0.$.
(U2) $u(x)$ je *neklesající ve všech proměnných*, tzn. platí :
Jestliže $x \le z, x \ne z$, pak $u(x) \le u(z)$. *nebo:*
(U2s) $u(x)$ je *rostoucí ve všech proměnných*, tzn. platí : Jestliže $x \le z, x \ne z$,
Jestliže $x \le z, x \ne z$, pak $u(x) < u(z)$.
(U3) $u(x)$ je *spojitá* v celém definičním oboru.
(U4) $u(x)$ je *kvazikonkávní* funkce.
(U5) $u(x)$ je *určena až na ryze monotónní(rostoucí) spojitou transformaci* (u).

potom o takové funkci $u(x)$ řekneme, že má vlastnosti *užitkové funkce*.

Přesný význam vlastností (U4) a (U5) nyní vyložíme formulací příslušných definicí.

Definice 2 **Funkce n proměnných $G(x)$ se nazývá *konkávní*, jestliže pro kterékoliv dva body/vektory x, z z definičního oboru $D_r(G(x))$ platí nerovnost:**

$$G(x \cdot \lambda + (1-\lambda) \cdot z) \ge \lambda . G(x) + (1-\lambda) . G(z)$$

pro libovolné reálné číslo $\lambda \in (0,1)$. Konkávnost tedy znamená, že při průběhu argumentu úsečkou spojující body x, z komoditního prostoru nesmí hodnota funkce $G(y)$ v žádném bodě y této úsečky klesnout pod (prostorovou) úsečku spojující body $G(x)$ a $G(z)$.

Definice 3 **Funkce n proměnných $G(x)$ se nazývá *kvazikonkávní*, jestliže pro kterékoliv dva body x, z z definičního oboru $D_r(G(x))$ platí nerovnost:**

$$G(x \cdot \lambda + (1-\lambda) \cdot z) \ge Min[G(x); G(z)]$$

pro libovolné reálné číslo $\lambda \in (0,1)$. Kvazikonkávnost tedy obrazně znamená, že při průběhu argumentu úsečkou spojující body x, z (v komoditním prostoru) nesmí hodnota funkce $G(y)$ v žádném bodě $\mathbf{y}$ na této úsečce klesnout pod menší z hodnot obou krajních bodů této úsečky $G(x)$, resp. $G(z)$.

Kvazikonkávnost je zde definovaná bez ohledu na existenci derivací (resp. i spojitost) funkce n proměnných. Později ukážeme, jak lze tuto vlastnost formulovat u funkcí, které jsou diferencovatelné. Poznamenejme, že konkávní funkce je vždy kvazikonkávní, zatímco kvazikonkávní funkce nemusí být nutně konkávní. Prostorová úsečka spojující body $G(x)$ a $G(z)$ totiž** v žádném případě **nemůže „propadnout“ pod minimum** vzaté ze **svých krajních hodnot.

Vlastnost ***(U5)*** ***konstatuje, že užitková funkce není určena jednoznačně,*** *ale že* ***za „v podstatě tutéž funkci“****, resp. funkci patřící do „téže třídy jako je výchozí $u(x)$“* ***lze považovat i libovolnou transformovanou funkci*** $(u(x))$***, pokud je transformace*** $\varphi(.)$ ***spojitá a rostoucí.*** *Znamená to tedy, že užitkovou funkci uvažujeme „jen“ v ordinálním smyslu, tzn., že při porovnání užitku, který přináší dvě komoditní kombinace x a z, nerozhoduje, jaké jsou konkrétní číselné velikosti užitku $u(x)$ a $u(z)$, nýbrž jen to, zda vždy platí $u(x)>u(z)$ či $u(z)>u(x)$ nebo zda $u(x)=u(z)$. Zatímco pro kterékoliv dvě komodity lze rozhodnout, která z nich je pro spotřebitele z hlediska přinášeného užitku lepší (popř. jsou-li indiferentní), nelze rozdíl mezi dvěma různými užitky (nejsou-li komodity indiferentní), kvantitativně vyčíslit tj. změřit. Každá transformace φ s sebou přináší obecně jinou „mezihladinovou“ škálu pro měření rozdílů.*

Poznámka 1 Nejednoznačnost určení užitkové funkce ve smyslu (U5) má důsledek v tom, že funkce $u(\boldsymbol{x})$, $2\cdot u(\boldsymbol{x}), \sqrt{\log u(\boldsymbol{x})}+4, 2\cdot\sqrt{u(\boldsymbol{x})+3}$ vyjadřují v podstatě tutéž situaci ve spotřebitelově hodnocení, které uplatňuje vůči několika komoditním kombinacích, které mu přinášejí užitek.

V případě, že chceme pojem užitkové funkce využít k hlubší analýze spotřebitelova chování *(např. ve vztahu k cenám komodit a příjmu spotřebitele)* ***a potřebujeme uplatnit poznatky diferenciálního počtu, přijímáme pro užitkovou funkci ještě další vlastnosti :***

(U6) **Existují spojité 1.parciální derivace** $u_r = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_r}$ (tj. podle všech proměnných) **.**

(U6*) **Existují spojité 2.parciální derivace** $u_{rs} = \dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r \partial x_s}$ **(** tj. pro $r,s = 1,2,....,n$ **).**

Význam uvažovaných vlastností (P1), (P2), (P3), (P5) preferenční relace **„$\succeq$„** bude zřetelnější ve světle následujícího tvrzení :

Věta 1 *(Debreu, Eilenberg, Rader)*
Jestliže preferenční relace „$\succeq$ „ splňuje vlastnosti (P1), (P2), (P3, (P5) v komoditním prostoru generovaném spočetnou bází otevřených množin, potom lze v tomto prostoru zkonstruovat spojitou užitkovou funkci $u(x)$.

Důkaz
a) existence nechť M_1, M_2 je posloupnost otevřených množin ve spočetné bázi X. Pro jakékoliv x uvažujme množinu $N(x)=\{n \mid z > x \ \ pro\ všechna \ \ z \in M_n\}$ a definujme funkci $v(x)$ vztahem

$$v(x)= \sum_{n\in N(X)} 2^{-n}$$

Jestliže $y \geq x$, potom $N(x) \subset N(y)$, takže $v(x) \leq v(y)$. Na druhé straně, jestliže y x, pak existuje $n \in N(y)$ takové, že $x \in M_n$, ale nikoliv $n \in N(x)$. Tedy $N(x) \notin N(y)$ a $v(y) > v(x)$. Tedy v je užitková funkce.

b) spojitost Nechť S označuje libovolnou množinu na rozšířené reálné přímce, která později bude brána jako $v(X)$. S stejně jako její doplněk $\#S$ může sestávat z nedegenerovaných a degenerovaných intervalů. Za „mezeru“ S označíme maximální nedegenerovaný interval doplňku $\#S$, který má horní a dolní hranici v S. Podle věty vyvozené G.Debreuem (1964) platí, že jestliže S

je podmnožina rozšířené reálné přímky R, pak existuje rostoucí funkce g z S do R taková, že všechny mezery $g(S)$ jsou otevřené množiny ..

Geometrická interpretace: Užitková funkce je představována nadplochou v $n+1$-rozměrném prostoru R_{n+1}, v rámci něhož komoditní prostor X generuje n dimenzních složek a hodnotu užitku v poslední $n+1$ dimenzi. V této $n+1$-dimenzi „měříme" užitek, který spotřebiteli přináší kterákoliv komoditní kombinace $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in X$. Geometrická místa bodů (komoditních kombinací), která poskytují stejný užitek (na určité konstantní úrovni u^*) vytvářejí (obrazně řečeno) určité „vrstevnice", přičemž výška každé vrstevnice udává hodnotu užitku pro danou kombinaci komodit.Tyto vrstevnice budeme nazývat indiferenční křivky (ve vztahu k užitku).

Při této interpretaci lze o soustavě vrstevnic mluvit jako o tzv. indiferenční mapě tvořené těmito vrstevnicemi pro všechny možné hladiny užitku. S ohledem na vlastnost (U5) je indiferenční mapa nezávislá na volbě transformační funkce $\varphi(u)$, neboli řečeno jinými slovy : průměty vrstevnic do n-rozměrného komoditního prostoru zůstávají při změně φ beze změn. Je tomu tak proto, že se změnou φ se sice může změnit nominální hodnota užitku, ale preferenční srovnání libovolných dvou komodit se zachovává.

Poznámka 2 Lze také ukázat, že také naopak ze znalosti indiferenční mapy tj. vrstevnic $u(x_1, x_2, ..., x_n) = \omega$ pro libovolné ω ležící na některé vrstevnici, lze odvodit (opět až na transformující funkci φ) tvar užitkové funkce $u(x)$. V tomto směru je tedy **znalost užitkové funkce a znalost indiferenční mapy rovnocenná.**

***) Ne ze všech hledisek je ovšem srovnání indiferenční mapy se skutečnou (geografickou) mapou plnohodnotné : Vrstevnice indiferenční mapy - jak ukazuje obrázek č. ... - nemohou být uzavřené křivky vzhledem k vlastnosti (U2) užitkové funkce a v důsledku (U4) musí vytvářet konvexní útvary : tzn. úsečkové spojnice propojující dva body na téže indiferenční křivce nesmí protnout žádný bod s nižší hladinou užitku. Spotřebitel pohlížející na mapu směrem „od počátku souřadnic" tedy „vrstevnice" vidí pouze směrem „do kopce", aniž by se v této mapě mohlo vyskytnout za vrcholem či hřebenem kopce (tj. při zvýšených množstvích dosazovaných komodit) opět klesání směrem dolů.**

Ekonomická historie zná mnoho polemik o oprávněnosti toho, zda lze na kvantifikaci užitku pohlížet i klasickým, tj. kardinálním způsobem. Přestože existuje řada (i nekomplikovaných) způsobů, jak přechod na kardinální vyjadřování provést, ukazuje ekonomická praxe, že důsledné kardinální pojetí měření užitku vyžaduje zpravidla vždy takové informace kvantitativní povahy, jejichž (třeba jen subjektivně posuzovanou) určitelnost či odhadnutelnost zajistit nelze. Zkuste např. ohodnotit, zda - třeba na odlehlém místě a v zimním čase - jsou pro nás teplé rukavice o 20%, 40% či 70% méně užitečné, než teplá zimní obuv, máme-li se rukavicemi chránit před omrznutím rukou a teplými botami před promrznutím nohou. Přitom už samotné ordinální srovnání může být určitým problémem. Ostatně provést úvahu s kardinální kvantifikací nejrůznějších užitkových preferenčních srovnání a následně vyslovit svůj názor či závěr může každý čtenář sám.

Definice 5 **První parciální derivace užitkové funkce podle libovolné r-té komodity vyčíslená v pevném bodě $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ je nazývána *mezním (marginálním) užitkem* *r-té komodity* v tomto bodě (kombinaci komodit). Mezní užitek značíme**

$$u_r\left(x^0\right) = \frac{\partial u\left(x^0\right)}{\partial x_r}$$

Podle předpokladu o ryzí monotónnosti užitkové funkce $u(x)$ **je mezní užitek vždy kladný. Požadavek je dost restriktivní, neboť nepřipouští** *(v realitě snadno myslitelné)* **úvahy o dosažení určité saturační úrovně „užitečnosti“ některých komodit, po jejímž překročení se užitek pociťovaný spotřebitelem již nezvyšuje.** *Lze uvést řadu případů, kdy po nabytí jisté úrovně dané komodity užitek dokonce klesá.*

Definice 6 **Podíl dvou mezních užitků (příslušných různým komoditám), vyčíslený v některém bodě x^0 komoditního prostoru X se nazývá *mezní* *(marginální)* *míra substituce mezi r-tou a s-tou komoditou*. Značíme ji m_{rs} a definujeme tedy jako**

$$m_{rs}(x^0) = \frac{u_r(x^0)}{u_s(x^0)}$$

Mezní míra substituce je ve vztahu k pořadí komodit reciproká. Obrátíme-li pořadí komodit v substitučním vztahu, obdržíme převrácenou hodnotu původní : $m_{sr} = \frac{1}{m_{rs}}$. Hodnota m_{rs} silně závisí na tom, kde ji vyčíslujeme.

Tvrzení 1 **Pro mezní míru substituce lze snadno odvodit vztah:** $m_{rs} = -\frac{dx_s}{dx_r}$

ověření **Vyjdeme z vyjádření totálního diferenciálu funkce** *a jeho rozkladu na dvě aditivní komponenty u funkce dvou (substitučních) proměnných*.

$$du\left(x^0\right) = \frac{\partial u\left(x^0\right)}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial u\left(x^0\right)}{\partial x_s} dx_s$$

Protože při pohybu po indiferenční křivce $u^* = konst$ se úroveň užitku nemění (mění se však vzájemný poměr faktorů x_r a x_s), platí pro totální diferenciál $du\left(x^0\right) = 0$. Odtud zřejmě plyne $-u_r dx_r = u_s dx_s$ **a dále**

$$\frac{u_r}{u_s} = -\frac{dx_s}{dx_r}$$

Mezní míra substituce mezi dvěma komoditami *(při neměnících se komoditách ostatních)* **vyjadřuje množství zvýšení jedné komodity** (při snížení druhé komodity o jednotku množství) **potřebné k tomu, aby nově vytvořená komoditní kombinace poskytovala stejný užitek jako kombinace původní. Mezní míra substituce zůstane nezáporná : Jeden z diferenciálů dx_r nebo dx_s bude záporný, neboť přírůstek v množství jedné komodity musí být kompenzován úbytkem druhé** *a vice versa*.

Věta 2 ***Zákon klesající mezní míry substituce*** Při pohybu po indiferenční křivce **platí**

$m_{rs}(x_1,x_2) > m_{rs}(x_1^*,x_2^*)$ **pro** $x_1 < x_1^*, x_2 > x_2^*$ **taková,že** $u(x_1,x_2) = u(x_1^*,x_2^*)$

právě tehdy, když je užitková funkce $u(x)$ ***kvazikonkávní.***

Důkaz **Ze zápornosti diferenciálu veličiny** $dm_{rs}(x_r,x_s)$ **při pohybu po indiferenční křivce vyvodíme pomocí věty o rozkladu totálního diferenciálu** (*Youngova věta*)**, že**

$$dm_{rs} = \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_s} dx_s < 0$$

Po úpravě **lze klesající tendenci mezní míry substituce vyjádřit vztahem :**

$$\frac{\partial m_{rs}}{\partial x_r} - m_{rs} \frac{\partial m_{rs}}{\partial x_s} < 0$$

Přepíšeme-li tento výraz v definičním vyjádření $m_{rs} = \dfrac{u_r}{u_s}$ **a provedeme-li výpočty parciálních derivací, dostáváme ekvivalentní vyjádření**

$$\frac{\partial\left(\dfrac{u_r}{u_s}\right)}{\partial x_r} - \frac{u_r}{u_s} \cdot \frac{\partial\left(\dfrac{u_r}{u_s}\right)}{x_s} < 0 \ ,$$ **které přejde po úpravách do podoby**

$$\frac{u_s u_{rr} - u_r u_{sr}}{u_s^2} - \frac{u_r}{u_s} \cdot \frac{u_s u_{rs} - u_r u_{ss}}{u_s^2}$$ **až po tvar**

$$\frac{u_s^2 u_{rr} - 2 \cdot u_r u_s u_{rs} + u_r^2 u_{ss}}{u_s^3} < 0$$

Zapíšeme-li čitatel pomocí kvadratické formy s proměnnými u_r, u_s **a koeficienty** u_{rr}, u_{rs}, u_{ss} **dostaneme (s vědomím toho, že** u_s^3 **je dle předpokladu > 0) nerovnost**

$$[u_s \quad u_r] \cdot \begin{bmatrix} u_{rr} & -u_{rs} \\ -u_{rs} & u_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_s \\ u_r \end{bmatrix} < 0$$

Jiným zápisem téže podmínky je vyjádření

$$\begin{vmatrix} 0 & u_r & u_s \\ u_r & u_{rr} & u_{rs} \\ u_s & u_{rs} & u_{ss} \end{vmatrix} > 0$$.

Podmínka pro klesající mezní míru substituce je tedy totožná s podmínkou pro kvazikonkávnost výchozí užitkové funkce (***je-li tato dvakrát spojitě diferencovatelná*** **).**

Jinými slovy: **Jestliže předpokládáme pro užitkovou funkci vlastnost *kvazikonkávnosti*, budeme mít zaručeno, že příslušná mezní míra substituce bude mít při pohybu po indiferenční křivce *zleva/shora* ⇒ *doprava/dolů* klesající tendenci.**

Uvedené lze ilustrovat na obrázku 2 : Přípustné podoby indiferenční křivky vymezující hladinu užitku $\boldsymbol{u^0}$ nalezneme na obrázku [2a], kde je patrné, že při pohybu ve směru zleva/shora ⇒ doprava/dolů se vždy zachovává klesající tendence poměru $\frac{dx_2}{dx_1}$. Naopak na obrázku [2b] je tato relace porušena mezi („inflexními“) body B a C, kde je indiferenční křivka vyklenuta směrem „od počátku souřadnic“. (Povšimněme si však, že i v těchto případech první souřadnice bodu pohybujícího se v uvedeném směru po indiferenční křivce roste, zatímco druhá klesá). Klesající mezní míra substituce je tedy silnější vlastností, než pouhé konstatování, že $m_{rs} > 0$. Jak je patrné, v případech 2c,2d není množina $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{u^0}\right)$ konvexní. Později ukážeme (*na příkladu produkční funkce*), že kvazikonkávnost má přímý vztah ke konvexnosti množin $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{u^0}\right)$.

Zavedené předpoklady (U1)-(U5),(U6*) umožňují zavést velmi užitečnou **čtvercovou *matici U řádu n+1 sestávající z prvních a druhých parciálních derivací užitkové funkce $\boldsymbol{u_r}$ a $\boldsymbol{u_s}$***, konkrétně **tvaru**

$$
U = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}
$$

Matice U je vzhledem k vlastnosti (U6*) symetrická (obsahuje tedy nanejvýš $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ různých nenulových prvků). Jak uvidíme, tato matice bude hrát důležitou úlohu ve více situacích.

Monotónní transformace užitkové funkce

Užitková funkce je určena až na spojitou monotónní (rostoucí) transformaci $g(u)$. V dalším ukážeme, do jaké míry volba transformace (majících za následek nejednoznačnost **u) ovlivňuje veličiny jako je mezní užitek a mezní míra substituce.**

a) ***mezní užitek (transformované) užitkové funkce*** $g(u(x))$ se snadno odvodí z pravidla pro derivování složené funkce :

$$g_r = \frac{\partial g(u(x))}{\partial x_r} = g'(u) \cdot u_r \,, \text{ kde } \; u_r = \frac{\partial u(x)}{\partial x_r}$$

Hodnota mezního užitku při transformaci je závislá na volbě transformující funkce. Protože však $g(u)$ je rostoucí funkce, bude „transformovaný" mezní užitek kladný.

b) ***mezní míra substituce (transformované) užitkové funkce*** $g(u(x))$ se odvodí podobně

$$m_{g_{rs}} = \frac{g_r(u(x))}{g_s(u(x))} = \frac{\dfrac{\partial g(u(x))}{\partial x_r}}{\dfrac{\partial g(u(x))}{\partial x_s}} = \frac{g'(u) \cdot u_r}{g'(u) \cdot u_s} = \frac{u_r}{u_s}$$

Hodnota mezní míry substituce je na volbě transformující funkce nezávislá.
Jinými slovy: ***kvantitativní vyjádření vzájemného vztahu mezi dvěma substitučními komoditami není volbou transformující funkce dotčeno. Při transformaci se zachovává vzájemná poloha „vrstevnic" určujících indiferenční křivky : transformace nemění nic na substitučním vztahu obou komodit při pohybu po indiferenční křivce.***

c) ***druhé parciální derivace (transformované) užitkové funkce*** $g(u(x))$ se změní takto:

$$\frac{\partial^2 g(u(x))}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial (g'(u(x)) \cdot u_r)}{\partial x_s} = g'(u) \cdot \frac{\partial u_r(x)}{\partial x_s} + g''(u) \frac{\partial u(x)}{\partial x_s} \cdot u_r = g'(u) \cdot u_{rs} + g''(u) \cdot u_s \cdot u_r$$

d) ***matice U a její determinant se změní provedením*** *rostoucí spojité* ***transformace*** takto

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g'(u) \cdot u_1 & & & g'(u) \cdot u_n \\ g'(u) \cdot u_1 & g'(u) \cdot u_{11} + g''(u).u_1^{\,2} & & & g'(u) \cdot u_{n1} + g''(u).u_1 u_n \\ g'(u) \cdot u_2 & g'(u) \cdot u_{12} + g''(u).u_1 u_2 & & & g'(u) \cdot u_{n2} + g''(u).u_2 u_n \\ g'(u) \cdot u_3 & g'(u) \cdot u_{13} + g''(u).u_1 u_3 & & & g'(u) \cdot u_{n3} + g''(u).u_3 u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g'(u) \cdot u_n & g'(u) \cdot u_{1n} + g''(u).u_1 u_n & & & g'(u) \cdot u_{nn} + g''(u).u_n^{\,2} \end{pmatrix}$$

a příslušný ***determinant matice*** G **má tvar**

$$|G| = [g'(u)]^{n+1} \cdot |U|$$

Abychom určili hodnotu tohoto determinantu, *resp. pokusili se ho porovnat s determinantem* $|U|$, rozložíme $|G|$ pomocí známého součtového pravidla. To říká, že pokud je např. první sloupec čtvercové matice $A = \{a_{ij}\}$ $\boldsymbol{a}_1$ součtem dvou vektorů α a $\boldsymbol{\beta}$, pak je determinant $|A|$ roven součtu dvou determinantů čtvercových matic se sloupci $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ a $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$. Aplikováno na náš případ, kdy lze 2. až n-tý sloupec matice G rozložit na součtové členy, dostáváme :

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{a}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| = \\
&|\mathbf{a}_1, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| + |\mathbf{a}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| = \\
&|\mathbf{a}_1, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| + |\mathbf{a}_1, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| + \\
&|\mathbf{a}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| + |\mathbf{a}_1, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\beta}_3, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}_\mathbf{n}| \text{ atd.}
\end{aligned}
$$

Obdržíme tak $2n-1$ determinantů, které však až na jeden neovlivní výsledný výraz. Pouze první z nich, který má tvar

$$
|\boldsymbol{G}_1| = \begin{vmatrix}
0 & g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\
g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_{11} & g'(u)\cdot u_{21} & g'(u)\cdot u_{31} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} \\
g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_{12} & g'(u)\cdot u_{22} & g'(u)\cdot u_{32} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} \\
g'(u)\cdot u_3 & g'(u)\cdot u_{13} & g'(u)\cdot u_{23} & g'(u)\cdot u_{33} & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g'(u)\cdot u_n & g'(u)\cdot u_{1n} & g'(u)\cdot u_{2n} & g'(u)\cdot u_{3n} & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn}
\end{vmatrix}
$$

je nenulový a má hodnotu $[g'(u)]^{n+1}\cdot|U|$. Všechny ostatní determinanty se vyznačují vlastností, že aspoň dva jejich sloupce jsou lineárně závislé a jejich hodnota je tedy nulová. Přiblížíme to na rozkladu do čtyř součtových členů $|\boldsymbol{G}| = |\boldsymbol{G_1}| + |\boldsymbol{G_2}| + |\boldsymbol{G_3}| + |\boldsymbol{G_4}|$,

$$
|\boldsymbol{G}_2| = \begin{vmatrix}
0 & g'(u)\cdot u_1 & 0 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\
g'(u)\cdot u_1 & g'(u)\cdot u_{11} & g'(u).u_2 u_1 & g'(u)\cdot u_{13}'+g''(u).u_1 u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} + g''(u).u_1 u_n \\
g'(u)\cdot u_2 & g'(u)\cdot u_{12} & g'(u)\cdot u_2.u_2 & g'(u)\cdot u_{23}'+g''(u).u_2 u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} + g''(u).u_2 u_n \\
g'(u)\cdot u_3 & g'(u)\cdot u_{13} & g'(u)\cdot u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{33}'+g''(u).u_3{}^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} + g''(u).u_3 u_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g'(u)\cdot u_n & g'(u)\cdot u_{1n} & g'(u)\cdot u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{n3}'+g''(u).u_n u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn} + g''(u).u_n{}^2
\end{vmatrix} = 0
$$

v důsledku lineární závislosti 1. a 3. sloupce: ty jsou násobky vektoru** $(0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$**,

$$
|\boldsymbol{G}_3| = \begin{vmatrix}
0 & 0 & g'(u).u_2 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\
g'(u)\cdot u_1 & g''(u)\cdot u_1.u_1 & g'(u).u_2 & g'(u)\cdot u_{13}'+g''(u).u_1 u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} + g''(u).u_1 u_n \\
g'(u)\cdot u_2 & g''(u)\cdot u_1.u_2 & g'(u)\cdot u_{22} & g'(u)\cdot u_{23}'+g''(u).u_2 u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} + g''(u).u_2 u_n \\
g'(u)\cdot u_3 & g''(u)\cdot u_1.u_3 & g'(u)\cdot u_{23} & g'(u)\cdot u_{33}'+g''(u).u_3{}^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} + g''(u).u_3 u_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g'(u)\cdot u_n & g''(u)\cdot u_1.u_n & g'(u)\cdot u_{2n} & g'(u)\cdot u_{n3}'+g''(u).u_n u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn} + g''(u).u_n{}^2
\end{vmatrix} = 0
$$

v důsledku lineární závislosti 1. a 2. sloupce: ty jsou násobky vektoru** $(0, u_1, u_2, \ldots u_n)$**,

$$|G_4| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & g'(u)\cdot u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_n \\ g'(u)\cdot u_1 & g''(u)\cdot u_1.u_1 & g''(u).u_2.u_1 & g'(u)\cdot u_{13} + g''(u).u_1.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n1} + g''(u).u_1.u_n \\ g'(u)\cdot u_2 & g''(u)\cdot u_1.u_2 & g''(u).u_2.u_2 & g'(u)\cdot u_{23} + g''(u).u_2.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n2} + g''(u).u_2.u_n \\ g'(u)\cdot u_3 & g''(u)\cdot u_1.u_3 & g''(u).u_2.u_3 & g'(u)\cdot u_{33} + g''(u).u_3^2 & \cdots & g'(u)\cdot u_{n3} + g''(u).u_3.u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'(u)\cdot u_n & g''(u)\cdot u_1.u_n & g''(u).u_2.u_n & g'(u)\cdot u_{n3} + g''(u).u_n.u_3 & \cdots & g'(u)\cdot u_{nn} + g''(u).u_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

tentokrát v důsledku lineární závislosti 1., 2. i 3. sloupce (každý z těchto sloupců je opět násobkem vektoru $(0, u_1, u_2, ..., u_n)$**.**

Z předchozího tedy vyplývá, že můžeme psát

$$|G| = [g'(u)]^{n+1} \cdot |U|,$$

Odtud je patrné, že i když jsou obecně hodnoty determinantů $|U|$ **a** $|G|$ **různé, zachovává po transformaci (*spojitou rostoucí funkcí*) determinant** $|G|$ **znaménko souhlasné s původním** $|U|$**.**

Poznámka 3 ***- lineární transformace užitkové funkce***

Zvolme nejjednodušší spojitou rostoucí transformační funkci, kterou je lineární funkce (s kladným koeficientem u lineárního členu), tedy $g(u) = au + b$**, kde** $a > 0$**,** b **libovolné . Pak platí**

$$\frac{\partial g(u)}{\partial x_r} = a \cdot u_r, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\partial^2 g(u)}{\partial x_r \partial x_s} = a \cdot u_{rs}$$

Znamená to tedy, že jak mezní užitek, tak prvky matice 2. parciálních derivací se od původních prvků matice U **liší pouze vynásobením kladnou konstantou** a**. Příslušný determinant** $|G|$ **je pak** a^{n+1} **- násobkem původního** $|U|$**.**

Definice 7 **Jestliže ve třídě** ordinálních **užitkových funkcí** $g(u(x))$**, které jsou ekvivalentní s** $u(x)$ **po lineární transformaci** g**, existuje užitková funkce** $v(x)$ **taková, že platí**

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

pak říkáme, že $u(x)$ **je aditivně rozložitelná užitková funkce.**

V takovémto případě lze vyjádřit individuální přínosy k celkovému užitku samostatně pro každou komoditu, jinými slovy, celkový užitek je pak součtem těchto individuálních přínosů.