4.1 Výdajová funkce a její vlastnosti

Definice 13 Máme dánu spojitou užitkovou funkci $u(x)$, cenový vektor p a mějme dále určenu konkrétní velikost užitku u^0 (skalární, v ordinálním pojetí). Potom funkci

(4.1) $$E(u^0,p)=\mathrm{Min}\left|px; u(x)\geq u^0\right|$$

nazveme **výdajovou funkcí** ***[expenditure function]*** ve vztahu k užitkové funkci $u(x)$.

Argumenty výdajové funkce je cenový vektor a velikost užitku požadovaná spotřebitelem. Výdajová funkce představuje minimální možné náklady (spojené s nákupem nanejvýš n statků při exogenně stanovených cenách p) vynaložené na komoditní kombinaci, která poskytuje užitek přinejmenším o velikosti u^0. Spotřebitel přitom nemusí nakupovat všechny komodity a s ohledem na kriteriální funkci v (3.11) dá přednost těm, u kterých dosažení užitku na žádané výši docílí nejlevněji.

Definice 13A Výdajová funkce $E(u,p)$ příslušná užitkové funkci $u(x)$ s přijatými vlastnostmi (U1) - (U5) má tyto vlastnosti :

(V1) $E(u,p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $E(u^0,p)>0$ pro libovolnou úroveň užitku $u^0>0$.

(V2) $E(u,p^0)$ je **rostoucí v u** pro jakýkoliv cenový vektor $p^0>0$. $E(u^0,p)$ je **neklesající v p a rostoucí alespoň v jedné z cen p_i** pro libovolnou úroveň užitku u^0.

(V3) $E(u,p^0)$ je **spojitá v u** pro jakýkoliv cenový vektor $p^0>0$. $E(u,p^0)$ je **spojitá v p** pro libovolnou úroveň užitku u^0.

(V4) $E(u^0,p)$ je **lineárně homogenní v p** pro libovolnou úroveň užitku u^0. Znamená to, že platí $E(u^0,\lambda p)=\lambda.E(u^0,p)$ pro libovolné $\lambda\in(0,+\infty)$

(V5) $E(u^0,p)$ je **konkávní v cenách p** pro libovolnou úroveň užitku u^0.

Znamená to, že platí $E(u^0,\mu p+(1-\mu)p^*)\geq\mu.E(u^0,p)+(1-\mu).E(u^0,p^*)$ pro libovolné dva cenové vektory $p,p^*>0$ a libovolné $\mu\in\langle 0,1\rangle$.

Vlastnost (V2) konstatuje, že s růstem velikosti užitku požadovaného spotřebitelem (ostře) roste i výdaj na pořízení komodit. Vlastnost (V3) připouští, že růst některých cen (zpravidla těch, které právě nejsou ve vybírané kombinaci statků pro poskytujících užitek u^0) nemusí vést k růstu výdajů spotřebitele. Očekávaný vývoj nákladů na komoditní kombinaci při změně cenového měřítka všech komodit pak vyjadřuje (V4), zatímco vlastnost (V5) charakterizuje „ne vyšší než lineární“ tendenci vývoje výdajů při růstu kterékoliv z cen $p_i, i=1,2,....,n$. Vlastnost (V1) mluví o přirozených matematických omezeních funkce $n+1$ proměnných v kontextu ekonomického významu $E(u,p)$ a konstatuje, že kladnou hodnotu užitku nelze dosáhnout zdarma.

Jestliže máme definovánu výdajovou funkci $\mathbf{E(u,p)}$ s výše uvedenými vlastnostmi (jmenovitě vlastností (V2)), máme tím zaručeno, že k této výdajové funkci existuje funkce inverzní, která bude vyjadřovat hladinu užitku v jako funkci výdajů a cen komodit.
Význam výdajové funkce spočívá mj. v tom, že pomocí ní lze generovat celý systém poptávkových funkcí v tzv. Hicksově smyslu. Uvedená možnost (pro diferencovatelnou výdajovou funkci) vychází z modifikace tzv. Shephardova lemmatu. Z uvedeného lemmatu vyplývá, že lze psát :

(4.2) $$\frac{\partial \mathbf{E(u,p)}}{\partial \mathbf{p_j}} = \mathbf{h_i(u,p)}$$, kde

funkce na pravé straně vyjadřuje poptávku po komoditě $\mathbf{x_j}$.

4.2 Nepřímá užitková funkce a její vlastnosti

Definice 14 Máme dánu výdajovou funkci $\mathbf{M = E(u^0,p)}$ s cenovým vektorem p a současně tím určenu konkrétní velikost výdajů $\mathbf{M}$. Potom funkci

(4.3) $$\mathbf{\psi(M,p) = Max[u(x); px = M]}$$

nazveme **nepřímá užitková funkce** ***[indirect utility function]*** ve vztahu k výdajové funkci $\mathbf{E(u^0,p)}$. Argumenty této funkce jsou tedy cenový vektor a velikost příjmu spotřebitele použitelná na nákup komodit v množstvích $\mathbf{x}$.

Definice 14A Nepřímá užitková funkce $\mathbf{\psi(M,p)}$ příslušná k výdajové funkci $\mathbf{E(p,u^0)}$ s vlastnostmi (V1) - (V5) je charakterizována těmito vlastnostmi:

(W1) $\mathbf{\psi(M,p)}$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $\psi(\mathbf{p},0) = 0$.
(W2) $\mathbf{\psi(M,p^0)}$ je **rostoucí v M** **pro jakýkoliv cenový vektor** $\mathbf{p^0 > 0}$. Dále $\mathbf{\psi(M^0,p)}$ je **nerostoucí v p** (**pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů** $\mathbf{M^0}$) .

(W3) **spojitá v M** **pro jakýkoliv cenový vektor** $\mathbf{p^0 > 0}$ **a spojitá v p** **pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů** $\mathbf{M^0}$.

(W4) $\mathbf{\psi(M,p)}$ je **homogenní funkce stupně** 0 **současně v cenách p a výdajích M** .
Znamená to, že platí $\psi(\lambda\mathbf{M},\lambda\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{M},\mathbf{p})$ **pro libovolné** $\lambda \in (0,+\infty)$

(W5) $\mathbf{\psi(M^0,p)}$ je **konkávní funkce v** p **pro jakoukoliv úroveň výdajů** $\mathbf{M^0}$. Znamená to, že platí $\psi(\mathbf{M^0}, \mu\mathbf{p} + (1-\mu)\mathbf{p^*}) \geq \mu.\psi(\mathbf{M^0},\mathbf{p}) + (1-\mu).\psi(\mathbf{M^0},\mathbf{p^*})$ pro $\mu \in \langle 0,1 \rangle$.

Prvá z vlastností konstatuje mj. že s nulovými peněžními prostředky žádný kladný užitek nezískáme. Ryzí monotónnost ve (W2) ve vztahu k M předpokládá, že zvýšený příjem je vynaložen účelně a není alokován do neužitečných komodit. Dle (W3), se zvýšením kterékoliv z cen p_i (při neměnných výdajích) užitek nemůže nikdy vzrůst (nemusí však ani nutně klesnout, neboť ke zdražení může dojít u nenakupovaného

statku). Již jsme zmínili, že výdaj v lze ztotožnit s příjmem spotřebitele M. Vlastnost (W4) lze chápat tak, že pokud by došlo k tomu, že by se všechny ceny $p_1, p_2, ..., p_n$ i příjem M změnily v témže poměru (např. λ-násobně), nezmění se na situaci viděné očima spotřebitele vůbec nic: při nezměněných relativních cenových poměrech není ze strany spotřebitele důvod ke změnám poptávek po komoditám. (Ten se bude řídit stejnými preferenčními hledisky jako dříve.)

4.3 Marshallovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.1A) s podmínkou (3.1B) pro neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$, případně i veličinu λ obdržíme pro každou komoditu

Definice 15 Poptávkovou funkci po i-té komoditě *[commodity demand function] v Marshalovském tvaru [in the Marshallian form]*, zapsatelnou ve tvaru

(4.4) $$x_i = g_i(M, p_1, p_2, ..., p_n) \ ,$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru $\mathbf{p}$ a příjmu spotřebitele $\mathbf{M}$.

Definice 15A Máme-li poptávku po komoditě x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vyjádřenu zápisem (4.4) s nějakou poptávkovou funkcí $x_i = g_i(M, p)$ $n+1$ proměnných M a p, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí $g_1, ..., g_n$ má následující vlastnosti :

(D1M) $g_i(M, p)$ je **reálná konečná nezáporná funkce** a platí pro ni $g_i(0, p) = 0$.

(D2M) $g_i(M, p)$ je **nerostoucí v ceně i-té komodity p_i a neklesající v příjmu M**.

(D3M) $g_i(M, p)$ je **spojitá v příjmu M a spojitá v p_i** $(i = 1, 2, ..., n)$.

(D4M) **Marshallovské poptávkové funkce $x_i = g_i(M, p)$ jsou homogenní stupně 0 současně v cenách a příjmu.** Platí tedy $g_i(\lambda M, \lambda p) = g_i(M, p)$.

(D5HM) Úplná **soustava marshallovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná.** Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i(M, p) = M$.

(D6M) **"Křížové" derivace marshallovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou symetrické**, tzn. platí

$$\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j.\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} = \frac{\partial x_j(M,p)}{\partial p_i} + x_i.\frac{\partial x_j(M,p)}{\partial M} \qquad \text{pro všechna } i, j$$

(D7M) **Matice S rozměrů $[n \times n]$ sestávající z prvků** $s_{ij} = \dfrac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j.\dfrac{\partial x_i(M,p)}{\partial M}$ **je negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S podmínku

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} + x_j.\frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M}\right]\cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$$

takže lze psát $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$. Přímým důsledkem negativní semidefinitnosti S jsou podmínky $s_{ii} \le 0, i = 1,2,...,n.$). Vlastní cenové pružnosti jsou nekladné.

4.4 Hicksovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.6A) s podmínkou (3.6B) pro neznámé $x_1, x_2, ..., x_n$, případně i veličinu μ obdržíme pro každou komoditu

Definice 16 Poptávkovou funkci po i-té komoditě *(commodity demand function)* v *Hicksovském tvaru [in the Hicksian form]*, zapsatelnou ve tvaru

(4.5) $$x_i = h_i(u, p_1, p_2, ..., p_n) \ ,$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru $\mathbf{p}$ a na spotřebitelem žádané hladině užitku $\mathbf{u}$.

Definice 16A Máme-li poptávku po komoditě x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vyjádřenu zápisem (4.5) s nějakou poptávkovou funkcí $h_i(u, p)$ $n+1$ proměnných $\mathbf{u}$ a $\mathbf{p}$, pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí $h_1, ..., h_n$ má následující vlastnosti :

(D1H) $h_i(u, p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce** a platí pro ni $h_i(0, p) = 0$.

(D2H) $h_i(u, p)$ je **nerostoucí v ceně i-té komodity p_i a neklesající v užitku $\mathbf{u}$.**

(D3H) $h_i(u, p)$ je **spojitá v užitku $\mathbf{u}$ a spojitá v p_i** $(i = 1, 2, ..., n)$.

(D4H) **Hicksovské poptávkové funkce $x_i = h_i(u, p)$ jsou homogenní stupně 0 v cenách $\mathbf{p}$**[1]. Znamená to, že platí $h_i(u, \lambda p) = h_i(u, p)$

(D5H) Úplná **soustava Hicksovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná**. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^{n} p_i h_i(u, p) = M$

(D6H) **"Křížové" derivace hicksovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou symetrické**, tzn. platí $$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u, p)}{\partial p_i} \qquad \text{pro všechna } i, j$$

(D7H) **Matice S^* rozměrů $[n \times n]$ sestávající z prvků $s_{ij}^* = \dfrac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j}$ je negativně semidefinitní**, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí S^* podmínku

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} \right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$$

S^* je tvořena prvky s_{ij}^*, kde $s_{ij}^* = \dfrac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j}$, takže lze psát $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^* \cdot \xi_i \cdot \xi_j \le 0$.

Důsledkem negativní semidefinitnosti S^* jsou podmínky $s_{ii}^* \le 0$.

[1] **Je-li výchozí (*výdajová*) funkce homogenní stupně 1, je její derivace (*poptávková*) funkce homogenní stupně 0.**

Poslední výrok tvrzení ad (D1) vyjadřuje skutečnost, že s nulovým příjmem nelze pořídit ani nejmenší množství žádného užitečného statku. Dvě vlastnosti obsažené v (D2) charakterizují závisle proměnnou (poptávku) jako monotónní funkce ceny p_i a příjmu M, přičemž zvýšení ceny neznamená nutně snížení poptávky (zájem spotřebitele může být upřen na jiné komodity) a zvýšení příjmu nemusí nutně vést (ze stejného důvodu) ke zvýšení poptávky po i-tém statku. Spojitost ve všech argumentech vylučuje skokovitý přírůstek poptávky při nepatrné změně ceny či příjmu. Vlastnosti uvedené v (D5) vyjadřují úplné rozložení disponibilního příjmu M na nákup (ne však nutně všech) n komodit bez ohledu na to, jakou formulaci poptávkových funkcí přijmeme. V podmínkách (D4) je obsažena zásada, že proporční změna důchodu a cen neovlivní nijak chování poptávky po žádné z komodit.

Součtovatelnost (D5) a homogenita nultého stupně (D4) jsou důležitým nástrojem v teoretické analýze poptávkových vztahů, nicméně častěji se vyjadřují zprostředkovaně v zápisech s derivacemi poptávkových funkcí (místo původních poptávkových funkcí). Z ***podmínky součtovatelnosti*** (D5) takto vyplývají vztahy (platné pro $i = 1, 2, ..., n$) :

(4.6A,B)
$$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} = 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_i} + g_i(M,p) = 0$$

takže změna v příjmu M a cenách p způsobí přeskupení v nákupech, které neporuší výdajové omezení. Získáme je derivováním rozpočtového omezení $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$ podle příjmu , resp. podle ceny p_i.

Identity (4.6A) a (4.6B) se nazývají ***Engelova*** resp. ***Cournotova agregační podmínka***. Z podmínky homogenity nultého stupně (D4) obdobně vyplývá, že pro $i = 1, 2, ..., n$ platí

(4.7)
$$\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial p_k} + M \cdot \frac{\partial g_k(M,p)}{\partial M} = 0$$

Chování poptávky spotřebitele vůči každé komoditě $\xi_i, i = 1, 2, ..., n$ jen v závislosti na jeho příjmu (tzn. při pevném cenovém vektoru p) pak udávají

4.5 Engelovy křivky

Určíme-li ceny $\mathbf{p} = (p_1, p_2, .., p_n)$ v Marshallovské poptávkové funkci (4.4) pevně, získáme

Definice 17 Engelovu křivku pro i-tou komoditu *[Engel curve]* zapsatelnou ve tvaru

(4.8) $$x_i = f_i(M) ,$$

která je charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na jeho příjmu M a odvoditelné z poptávkových funkcí $g_i(M, \mathbf{p})$ poté, co do nich dosadíme jako pevné hodnoty ceny jednotlivých komodit $p_1, p_2, ..., p_n$.

Definice 17A Máme-li poptávku po i-té komoditě x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vyjádřenou zápisem (4.8) s nějakou ***Engelovou křivkou*** $f_i(M)$ jedné proměnné, pak každá tato Engelova křivka má následující vlastnosti :

(E1) **Engelova křivka $f_i(M)$ je reálná, konečná nezáporná funkce** a platí $f_i(0) = 0$.

(E2) **Engelova křivka $f_i(M)$ je neklesající v příjmu M**.

(E3) **Engelova křivka $f_i(M)$ je spojitá v M.**

(E4) **Engelova křivka $f_i(M)$ je konkávní v M.**

(E5) Úplná **soustava Engelových křivek $f_i(M)$ je součtovatelná**, tzn. platí

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(M) = M .$$

(E6) Platí **Engelova agregační podmínka** $\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \frac{\partial f_k(M)}{\partial M} = 1$

Vlastnosti Engelovy křivky $f_i(M), i = 1, 2, ..., n$ jsou vesměs konformní s vlastnostmi Marshallovské poptávkové funkce $g_i(M, \mathbf{p})$, pokud při pevném $\mathbf{p}$ omezíme pozornost na chování poptávky ve vztahu k příjmu. Navíc se předpokládá konkávnost (E4) $f_i(M)$ jako funkce jedné proměnné M a úplné vynaložení spotřebitelova příjmu na pořízení komodit (ne nutně všech) při jakékoliv úrovni M. ***Engelova křivka*** je (jen) slabě monotónní, neboť zvýšení příjmu nemusí nutně vést ke zvýšení poptávky právě po i-té komoditě.

Tečna k ***Engelově křivce*** vyjadřuje hodnotu mezního sklonu ke spotřebě dané komodity, tzn. poměr mezi (limitně chápanou) změnou spotřeby (realizované poptávky) x_i a změnou důchodu M tj. $\frac{\partial x_i}{\partial M}$. Připomeňme, že výraz

$$s_{iM} = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i} = \frac{\partial x_i}{x_i} \Big/ \frac{\partial M}{M}$$ nazýváme **příjmová pružnost poptávky**.

Na její hodnotě závisí klasifikace ekonomických statků: V rámci nich

a) je-li příjmová pružnost poptávky větší než 1, pak jde o *luxusní statek* .

b) je-li příjmová pružnost poptávky v intervalu $(0,1)$, jde o *normální statek.*

c) je-li příjmová pružnost poptávky rovna 0, jde o *příjmově inertní statek*

d) je-li příjmová pružnost poptávky menší než 0, jde o *inferiorní statek.*

4.6 Shephardovo lemma a Royova identita

Nejdůležitějším tvrzením, které platí mezi výdajovou funkcí a soustavou Hicksovských poptávkových funkcemi v rovnovážné situaci, je ***Shephardovo lemma***. Ronald W.Shephard je formuloval původně pro vztah mezi nákladovou funkcí (jako obdobou výdajové funkce) a poptávkovými funkcemi (po výrobních faktorech) v teorii produkce.

Tvrzení 6 *Shephardovo lemma* *[Shephard lemma]*

Máme dánu výdajovou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$ příslušnou k užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5). Potom jednotlivé ze soustavy poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

(4.9)
$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_i}$$

což znamená, že tvar poptávkové funkce po komoditě ζ_i je určen jako parciální derivace výdajové funkce podle ceny této komodity. Toto fundamentální tvrzení je základním východiskem při konstrukci soustavy poptávkových funkcí po užitek přinášejících statcích z výdajové funkce.

Důkaz tvrzení 6

Zvolme pevně, ale jinak libovolně cenový vektor $\mathbf{p}^0$, hladinu užitku $\mathbf{u}^0$ a příslušný vektor optimálních (ve vztahu $\mathbf{p}^0$) $\boldsymbol{n}$ komoditních množství $\mathbf{x}^0$. Dále pro jakýkoliv jiný cenový vektor $\mathbf{p}$ definujme funkci $\chi(\mathbf{p})$ vztahem

(4.10)
$$\chi(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{p}_k \mathbf{x}_k^0 - \mathbf{E}(\mathbf{u}^0,\mathbf{p})$$

Protože $\mathbf{x}^0$ není nutně optimální ve vztahu k $\mathbf{p}$, výdaje na pořízení množství $\mathbf{x}^0$ při cenách $\mathbf{p}$ musí vždy být přinejmenším tak velké, jako jsou analogické výdaje na pořízení těch množství, která jsou optimální vzhledem k $\mathbf{p}^0$ - tyto minimální výdaje udává výdajová funkce $\mathbf{E}(\mathbf{u},\mathbf{p})$. Tedy $\chi(.)$ je vždy větší nebo nejméně rovna 0. Dále víme, že $\chi(\mathbf{p}^0)$ je rovna 0, tj. χ nabývá svého minima, pokud $\mathbf{p}$ je rovno $\mathbf{p}^0$. Proto všude tam, kde existují derivace $\dfrac{\partial \chi(.)}{\partial \mathbf{p}_i}$ musí platit v komoditní kombinaci $\mathbf{p}^0$

(4.10) $$\frac{\partial \chi(\mathbf{p}^0)}{\partial \mathbf{p}_i} = \mathbf{x}_i^0 - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0, \mathbf{p}^0)}{\partial \mathbf{p}_i} = 0$$

Protože jsme pevnou hodnotu $\mathbf{p}^0$ volili libovolně, je vztah (4.10) dokázán. □ .

Poznámka 1 I když výdajová funkce splňuje všechny vlastnosti (V1),..., (V5), nelze obecně zaručit, že *pomocí* ***Shephardova lemmatu*** odvozený systém poptávkových funkcí splňuje všechny vlastnosti předpokládané u funkcí deklarovaných jako poptávkové, tj. (D1),... , (D6).

Poznámka 2 Opačný postup - tzn. sestrojení výdajové funkce integrací systému poptávkových funkcí (aniž trváme na splnění vlastností (D1),... , (D6)) - není obecně uskutečnitelný, a to ani tehdy ne, jestliže s jistotou víme, že taková výdajová funkce $\mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0)$ existuje a že ji lze vyjádřit v explicitním tvaru. Pokud lze takovou výdajovou funkci zkonstruovat ze soustavy poptávkových funkcí, říkáme, že tato soustava splňuje tzv. ***"podmínku integrability"***.

Dalším užitečným tvrzením je věta, která charakterizuje určitou „příbuznost" struktury mezi funkčními tvary u jednotlivých poptávkových funkcí.

Tvrzení 7 ***Symetrie poptávkových funkcí*** ***[symmetry of the demand functions]***

Mějme dánu výdajovou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})$ příslušnou k užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2),(V3),(V4),(V5), která má navíc spojité všechny parciální derivace aspoň do 2. řádu včetně. Potom pro systém poptávkových funkcí vyvozených pomocí *Shephardova lemmatu* (4.10) platí:

(4.11) $$\frac{\partial \mathbf{x}_j(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j}$$

Důkaz tvrzení 7

Okamžitě vyplývá z tzv. *Youngovy věty známé z matematické analýzy* deklarující nezávislost druhých parciálních derivací na pořadí derivování, jestliže jsou tyto druhé parciální derivace spojité. Pak platí:

(4.12) $$\frac{\partial \mathbf{x}_j(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j \partial \mathbf{p}_k} = \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_k \partial \mathbf{p}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_k(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j}$$

čímž je důkaz tvrzení proveden. □.

V tomto smyslu lze tedy mluvit o podmínce symetrie každé funkce ze soustavy poptávkových funkcí. Je tedy zřejmé, že všechny poptávkové funkce musí mít formálně příbuznou funkční podobu, která se může u jednotlivých funkcí systému lišit různými hodnotami parametrů těchto funkcí, nemůže jit však o principiálně odlišný funkční typ. *(např. jedna poptávková funkce nemůže být logaritmem součtu kvadrátů svých argumentů, zatímco druhá by byla arkustangentou součinu odmocnin těchže argumentů)*. Uvedená podmínka tedy výrazně snižuje „pestrost" v možných vzájemných odlišností jednotlivých poptávkových funkcí.

Shephardovo lemma umožňuje generovat Hicksovy poptávkové funkce z výdajové funkce. Pokud bychom chtěli odvodit ***Marshallovy poptávkové funkce***, stačí k tomu substituovat za argument u ve výdajové funkci hodnoty nepřímé užitkové funkce $\psi(.)$, která má argumenty $\mathbf{p}$ a $\mathbf{M}$. **Dostaneme**

(4.13) $$\mathbf{x_i = h_i(u,p) = h_i(\psi(M,p),p) = g_i(M,p)}$$

tzn. ***soustavu poptávkových funkcí (pro*** $i = 1,2,....,n$ ***) v Marshallově tvaru.***

Pokud bychom byli postaveni před opačný problém, tj. vyvodit Hicksovy poptávkové funkce z Marshallových, potom lze postupovat v inverzním směru. Máme-li dány $\mathbf{g_i(M,p), i = 1,2,....,n}$, dosadíme za argument $\mathbf{M}$ - výdaj je plně vynaložen na nákup $\boldsymbol{x}$ - hodnotu výdajové funkce $E(u,\boldsymbol{p})$.

(4.14) $$\mathbf{x_i = g_i(M,p) = h_i(E(u,p),p) = h_i(u,p)}$$

Vztah mezi nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí, jež jsou vzájemně inverzní, lze zapsat identitou

(4.15) $$\mathbf{\psi(M,p) = \psi(E(u,p),p) \equiv u}$$

Obdobou *Shephardova lemmatu* formulovaného ve vztahu k výdajové funkci pro vyvození poptávkových funkcí (tentokrát v Marshallově tvaru) z nepřímé užitkové funkce $\psi(\mathbf{p},M)$je vztah známý jako Royova identita. Je pojmenována po svém objeviteli, francouzském ekonomu a matematikovi *René Royovi* [1943]. Nezávisle na něm ji formuloval jiný francouzský matematik *Jean Villé* [1941].

Tvrzení 8 Royova identita *[Roy-Villé identity]*

Máme dánu nepřímou užitkovou funkci $\psi(\mathbf{p},\mathbf{M})$ příslušnou užitkové funkci $\mathbf{u(x)}$ s vlastnostmi (W1), (W2), (W3), (W4), (W5). Potom soustavu Marshallových poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

(4.16) $$\mathbf{x_i(M,p)} = \frac{-\dfrac{\partial \psi(\mathbf{M,p})}{\partial \mathbf{p_i}}}{\dfrac{\partial \psi(\mathbf{M,p})}{\partial \mathbf{M}}}$$

To znamená, že poptávkovou funkci po i-té komoditě obdržíme jako (záporně vzatý) podíl dvou parciálních derivací nepřímé užitkové funkce $\psi(M,p)$, a to jednak podle ceny $\mathbf{i}$-té komodity, jednak podle spotřebitelova příjmu M .

Důkaz tvrzení 8

Vztahem (4.7) jsme zapsali, že výdajová funkce a nepřímá užitková funkce jsou vzájemně v inverzním vztahu. Ten můžeme vyjádřit zápisem identity:

$$\psi[E(u,p),p]=u. \tag{4.17}$$

Jestliže tuto identitu (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot p a u) derivujeme podle pevně zvolené ceny p_i, dostaneme *při uplatnění řetězového pravidla pro derivaci složené funkce* vztah

$$\frac{\partial\psi[E(p,u),p]}{\partial p_i}=\frac{\partial\psi(E(p,u))}{\partial E(u,p)}\cdot\frac{\partial E(u,p)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial p_i}+\frac{\partial\psi(u,p)}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial p_i}=0 \tag{4.18}$$

, neboť při pevném u je $\frac{\partial u}{\partial p_i}=0$ a dále $\frac{\partial p}{\partial p_i}=1$, neboť $\frac{\partial p_j}{\partial p_i}=\partial_{ij}$ (*Kroneckerovo* ∂), $i,j=1,2,....,n$ a dále $E(u,p)=M$, neboť příjem M je rozdělen beze zbytku.

Vztah (4.18) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial M}\cdot\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i}+\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial p_i}=0 \tag{4.19}$$

Z *Shephardova lemmatu* víme, že $\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i}=x_i$ (tj.Hicksova poptávka po i-tém statku). Odtud tedy již snadno odvodíme

$$x_i=g_i(M,p)=-\frac{\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial p_i}}{\frac{\partial\psi(M,p)}{\partial M}} \tag{4.16}$$

□.

Poznámka 3 Jestliže nepřímou užitkovou funkci vyjádříme v normalizovaném tvaru, tzn. s argumenty představujícími jednotkové ceny statků (dělené příjmem) $\psi\left(\frac{p_1}{M},\frac{p_2}{M},....,\frac{p_n}{M},1\right)=\psi^*(r_1,r_2,....,r_n)$, kde pracujeme s n-členným vektorem normovaných cen $(r_1,r_2,....,r_n)$, pak lze *Royovu identitu* zapsat jako

$$\frac{p_i x_i}{M}=\frac{\frac{\partial\psi^*(r)}{\partial \log r_j}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi^*(r)}{\partial \log r_j}} \tag{4.20}$$

tedy ve tvaru vyjadřujícím rozpočtovou účast i-té komodity na celkovém příjmu M jako podíl parciální derivace nepřímé užitkové funkce podle logaritmované ceny této komodity a součtu analogicky vyjádřených parciálních derivací $\psi^*(r)$ podle všech logaritmovaných cen.

4.7 Schématické vyjádření vztahů

mezi *přímou užitkovou, nepřímou užitkovou* a *výdajovou funkcí* a *soustavami poptávkových funkcí v Marshallovském a Hicksovském tvaru*

K vyjádření vztahů mezi ekonomickými funkčními typy může sloužit schéma

rozpočtové omezení | **spotřebitel** | **užitková funkce**

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M \qquad\qquad u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Minimalizační úloha

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

za podmínky

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge u^0$$

Maximalizační úloha

$$\text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

za podmínky

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le M, \ x_i \ge 0$$

substituce

$$x_i = h_i\left(u^0, p\right)$$

substituce

$$x_i = g_i(M, p)$$

VÝDAJOVÁ FUNKCE

$$E\left(u^0, p\right)$$

← **inverze** →

NEPŘÍMÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

$$\psi(M, p)$$

Shephardovo lemma

$$x_i = \frac{\partial E\left(u^0, p\right)}{\partial p_i}$$

derivace E podle p_i

Royova identita

$$x_i = -\frac{\dfrac{\partial \psi(M, p)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial \psi(M, p)}{\partial M}}$$

záporný podíl derivací ψ podle p_i, M

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH V HICKSOVĚ TVARU

$$x_i = h_i\left(u^0, p\right)$$

←**substituce**→

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ PO KOMODITÁCH v MARSHALLOVĚ TVARU

$$x_i = g_i(M, p)$$

*/ Podrobněji R.W. Shephard: Cost and Production Functions (1953) nebo tentýž autor: Theory of Cost and Production Functions. Princeton U.P. 1970.

4.8 Problém „integrability“

Poznámka 4

Poptávkové funkce v Marshallovském tvaru lze získat v podstatě třemi způsoby:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením maximalizačního problému (1A) při rozpočtovém omezení (1B).

(B) Z nepřímé užitkové funkce pomocí Royovy identity (4.16)

(C) Z Hicksovských poptávkových funkcí (4.5) substitucí (4.14)

Jen u druhého způsobu je však zajištěn úspěch. *Cesta řešením maximalizačního problému nemusí vést k vyjádření marshallovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru* a pokud je toto možné, bude zpravidla zejména v obecných n-komoditních případech výsledný výraz poptávek velmi komplikovaný (obecně se všemi parametry výchozí přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). Ani v případě (C) nemusíme vždy získat explicitní tvar poptávek (problém je ale méně vážný než v (A)

Poznámka 5

Poptávkové funkce v Hicksovském tvaru lze získat rovněž třemi způsoby:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením minimalizačního problému (6A) při užitkovém omezení (6B).

(B) Z výdajové funkce pomocí Shephardova lemmatu (4.9)

(C) Z Marshallovských poptávkových funkcí (4.4) substitucí (4.13)

I zde je úspěch zajištěn jen ve druhém případě. *Cesta řešením minimalizačního problému nemusí vést k vyjádření hicksovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru* a i když by toto bylo možné, bude zpravidla v obecných n-komoditních případech výsledný výraz poptávek velmi komplikovaný (obecně se všemi parametry přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). Ani zde v případě (C) nemusíme obecně získat explicitní tvar poptávek (byť problém je méně vážný než v (A)

Vztah (11) $x_i(E(u^0,p)) = h_i(u^0,p)$ a *Shephardovo lemma* (4.9) dovolují psát obě soustavy (hicksovských i marshallovských) poptávkových funkcí vyjádřeními v parciálních diferenciálních rovnicích

(4.21A,B) $$x_i(E(u^0),p) = \frac{\partial E(u^0,p)}{\partial p_i} \qquad \text{resp.} \qquad x_i(M,p) = \frac{\partial E(\Psi(M,p),p)}{\partial p_i}$$

Řešením jedné či druhé soustavy (4.21) pro $E(u,p)$, resp. $\Psi(M,p)$ bychom tedy mohli – aspoň v principu – získat výdajovou, resp. přímou užitkovou funkci.

Sestavení/vytvoření výdajové funkce $E(u,p)$ z úplné soustavy hicksovských poptávkových funkcí $h_i(u,p)$ z (4.5) je však možné jen za předpokladů (D6H) a (D7H) tzn., že matice S^* musí být symetrická a pozitivně semidefinitní.

Podobně, **zpětné vytvoření/rekonstrukce nepřímé užitkové funkce $\psi(M,p)$ z úplné soustavy marshallovských poptávkových funkcí $g_i(M,p)$ z (4.4) je možné jen (mj.) za předpokladů (D6M), (D7M), tzn. že Sluckého substituční matice S bude symetrická a pozitivně semidefinitní.**

4.9 Alternativní vyvození Sluckého rovnice

Sluckého rovnici (6.18) odvozenou v části 6 přímo můžeme vyvodit také jiným způsobem, ve kterém využijeme *Shephardova lemmatu.*

Vyjdeme přitom z identity

$$h_i(u,p) = x_i(E(u,p),p) \ ,$$

kterou derivujeme podle ceny j-tého statku p_j. Dostaneme tak

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial E(u,p)} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j} \ ,$$

Protože však zřejmě $E(u,p) = M$, $\frac{\partial p}{\partial p_j} = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo δ) a protože dle *Shephardova lemmatu* (4.9) platí $\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_j} = x_j$, dostáváme z předchozího

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p_j} \ , \quad \text{neboli}$$

$$\frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial M} . x_j + \frac{\partial x_i(M,p)}{\partial p_j} \ ,$$

Povšimněme si, že výraz vlevo reprezentuje Hicksovské, zatímco oba výrazy vpravo Marshallovské pojetí. Po přeskupení členů již dostáváme *Sluckého rovnici* v obvyklém zápisu

$$\frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial p_j} = -x_j . \frac{\partial x_i(E(u,p),p)}{\partial M} + \frac{\partial h_i(u,p)}{\partial p_j} \ .$$

Zaznamenejme, že důchodový člen je reprezentován Marshallovským zápisem, zatímco substituční člen (obecně definovaný jako $X_{ij} = \lambda . \frac{|U_{ij}|}{|U|} = \frac{u_j}{p_j} . \frac{|U_{ij}|}{|U|}$) je vyjádřen v hicksovské notaci (s nepřítomností M) .