

4 Obecný problém dekompozice - Divisiův přístup a řešení

Odlíšný způsob k řešení problému indexních čísel uplatnil v polovině 20.let našeho století francouzský matematik Francois Divisia¹, který formuloval úlohu nalezení agregátního indexu zcela obecně v tom smyslu, že hledal - pro libovolné časové období t - multiplikatívní rozklad „makroagregátu“ $P(t) \cdot Q(t)$ reprezentujícího součin agregátního cenového a kvantového indexního čísla do tvaru

(4.1)

$$P(t) \cdot Q(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t) ,$$

tj. tak , aby ve všech okamžicích spojitě uvažovaného času platila aditivní dekompozice agregátu na dílčí součiny příslušné cenové a kvantové „mikrofunkce“ všech uvažovaných komodit. Funkce $P(t)$ jako indikátor všeobecné cenové úrovně má přitom co nejlépe vystihovat pohyb cenové hladiny, podobně funkce $Q(t)$ jako reprezentant souhrnného fyzického objemu vývoj množstevního indexu. Obě tyto „makrofunkce“ jsou kladné se spojitou derivací na $\langle 0, T \rangle$ podle času.

O „mikrofunkcích“ cen a kvantit $p_i(t)$, resp. $q_i(t)$ Divisia předpokládal, že mají:

- spojitě první derivace (podle času),
- kladné hodnoty na celém uvažovaném intervalu $\langle 0, T \rangle$,
- konečnou variaci na každém podintervalu $\langle t-1, t \rangle$ spadajícího do $\langle 0, T \rangle$.

Takto obecně formulovaná úloha však není bez dalších předpokladů jednoznačně řešitelná, což snižuje její uplatnitelnost pro reálné potřeby. Je např. zřejmé, že vedle funkcí $P(t)$ a $Q(t)$, je řešením úlohy také každá dvojice tvaru $c \cdot P(t)$ a $\frac{Q(t)}{c}$ pro nějakou kladnou konstantu c .

Divisia samostatně uvažoval dekompozici (4.1) pro spojitý a diskrétní případ.

4.1 Situace se spojitým časem

Jelikož jsme předpokládali derivovatelnost u funkcí $P(t)$ a $Q(t)$, můžeme derivaci výrazu (4.1) zapsat

$$(4.2) \quad Q(t) \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} + P(t) \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t} .$$

Předpokládáme-li kladnost funkcí $P(t)$ a $Q(t)$ na celém intervalu $\langle 0, T \rangle$, můžeme dělit součinem $P(t) \cdot Q(t) > 0$. Dostaneme

$$(4.3) \quad \frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} + \frac{1}{Q(t)} \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t} .$$

Dále samostatně uvažujeme možnost aditivního rozkladu cenové změny v (4.3) na

¹ Divisia, F.: L'indice monétaire et la Theorie de la monnaie-revue d'Economie politique (1925)

$$(4.4A) \quad \frac{1}{P(t)} \cdot \frac{\partial P(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} ,$$

resp. obdobně kvantové změny v témže výrazu na

$$(4.4B) \quad \frac{1}{Q(t)} \cdot \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^N \frac{p_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} \cdot \frac{\partial q_k(t)}{\partial t} .$$

Následně aditivním rozkladem změny cenové a kvantové situace a dále úpravami využívajícími aparátu Stieltjesova integrálu (pro funkce s konečnou variací) lze dospět z původní formulace problému k aproximativnímu tvaru

$$(4.5) \quad \frac{1}{P(t^*)} \cdot [P(t) - P(t-1)] = \sum_{i=1}^N g_k(t_k^*) \cdot [p_k(t) - p_k(t-1)]$$

pro nějaké body t^*, t_k^* ležící v intervalu $\langle t-1, t \rangle$ a nějakou rozumnou váhovou funkci g_k , jmenovitě např. tvaru

$$(4.6A) \quad g_k(t_k^*) = \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} .$$

Pokud za oba tyto body vezmeme levý krajní bod intervalu, tj. $t^* = t_k^* = t-1$ a podobně dosadíme za funkci $g_k(t_k^*) = g_k(t-1)$ výraz

$$(4.6B) \quad g_k(t_k^*) = \frac{q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^N p_i(t-1) \cdot q_i(t-1)} ,$$

obdržíme po malé úpravě vztah

$$(4.7) \quad \frac{P(t)}{P(t-1)} = \frac{\sum_{i=1}^N p_k(t) \cdot q_k(t-1)}{\sum_{i=1}^N p_k(t-1) \cdot q_k(t-1)} ,$$

což je Laspeyresovo cenové indexní číslo vztahené k bodům $t-1, t$ dělicího intervalu. Cenové indexní číslo pro celé uvažované období $\langle 0, T \rangle$ pak získáme prostým zřetězením, tedy

$$(4.8) \quad P_{0T}^D = \overline{P_{0T}^L} = P_{01}^L \cdot P_{12}^L \cdot \dots \cdot P_{T-1,T}^L .$$

Jinou volbou, tentokrát nahrazením t^* a t_k^* pravým krajním bodem intervalu, tj. $t^* = t_k^* = t$ a dosazením za funkci $g_k(t_k^*) = g_k(t)$ výrazu

$$(4.9) \quad g_k(t) = \frac{q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)} ,$$

odvodíme podle Divisiova postupu zřetěžené Paascheho cenové indexní číslo P^P_{01} . Podobně lze dalšími speciálními volbami získat i jiná (zřetěžená) cenová indexní čísla, např. Edgeworthovo.

Kvantová indexní čísla bychom získali obdobně z rozkladu kvantové změny v (4.4B). V případě dosazení $t^* = t_k^* = t - 1$ obdržíme $Q^L_{t-1,t}$ a již popsaným následným zřetěžením Q^L_{0t} .

4.2 Situace s diskretním časem

Uvedený postup lze obdobně použít také na diskretní případ, kdy v intervalu $\langle 0, T \rangle$ uvažujeme množinu ekvidistantních izolovaných bodů $t = 0, 1, 2, \dots, T$ představujících okamžiky měření cen a kvantit. Opět uvažujeme rozklad agregátu

$$(4.10) \quad P(t) \cdot Q(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t) \quad t = 0, 1, 2, \dots, T$$

v $T + 1$ okamžicích.

Nejprve vyjádříme levou stranu změny agregátu mezi obdobími $t - 1$ a t (libovolnými následujícími): $P(t) \cdot Q(t) - P(t - 1) \cdot Q(t - 1)$ v podílovém vyjádření

$$(4.11) \quad \frac{[P(t) - P(t - 1)] \cdot Q(t) + [Q(t) - Q(t - 1)] \cdot P(t - 1)}{P(t - 1) \cdot Q(t)} = \frac{[P(t) - P(t - 1)]}{P(t - 1)} + \frac{[Q(t) - Q(t - 1)]}{Q(t)}.$$

Tomu odpovídající souhrnnou změnu N jednotlivých dílčích změn cen a kvantit na pravé straně (4.11) lze vyjádřit jako

$$(4.12) \quad \sum_{k=1}^N \frac{[p_k(t) - p_k(t - 1)] \cdot q_k(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t - 1) \cdot q_i(t)} + \sum_{k=1}^N \frac{[q_k(t) - q_k(t - 1)]}{\sum_{i=1}^N p_i(t - 1) \cdot q_i(t)}.$$

Vezmeme-li za přijatelné, že se cenová a množstevní změna hodnotového komplexu odehrávají relativně nezávisle na sobě, můžeme porovnat "stejnolehle" cenové a kvantové složky samostatně.

Pro relativní cenovou změnovou složku dostaneme rozklad tvaru

$$(4.13) \quad \frac{P(t) - P(t - 1)}{P(t - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^N [p_i(t) - p_i(t - 1)] \cdot q_i(t)}{\sum_{i=1}^N p_i(t - 1) \cdot q_i(t)} = P^P_{t-1,t} - 1,$$

kde $P^P_{t-1,t}$ představuje Paascheho cenové indexní číslo pro změnové období $t - 1, t$.

Zcela obdobně odvodíme pro relativní kvantovou změnovou komponentu vyjádření

$$(4.14) \quad \frac{Q(t) - Q(t - 1)}{Q(t)} = \frac{\sum_{i=1}^N [q_i(t) - q_i(t - 1)] \cdot p_i(t - 1)}{\sum_{i=1}^N p_i(t - 1) \cdot q_i(t)} = 1 - (Q^L_{t-1,t})^{-1},$$

kde tentokrát $Q^L_{t-1,t}$ zastupuje Laspeyresovo kvantové indexní číslo pro změnové období $t - 1, t$.

Obě předchozí rovnosti upravíme odstraněním -1 na obou stranách, čímž dostaneme

$$(4.15A,B) \quad \frac{P(t)}{P(t-1)} = P_{t-1,t}^P \quad \text{a podobně} \quad \frac{Q(t)}{Q(t-1)} = Q_{t-1,t}^L .$$

Jestliže nyní dále sestavíme konečnou posloupnost řetězových indexů

$\frac{P(1)}{P(0)}, \frac{P(2)}{P(1)}, \dots, \frac{P(T-1)}{P(T-2)}, \frac{P(T)}{P(T-1)}$ a tyto vzájemně vynásobíme, dostaneme pomocí (4.15A) vyjádření

$$(4.16) \quad \frac{P(T)}{P(0)} = P_{t,1}^P \cdot P_{1,2}^P \cdot \dots \cdot P_{t-2,t-1}^P \cdot P_{t-1,t}^P = P_{0T}^{*P} ,$$

což není nic jiného, než zřetěžené Paascheho cenové indexní číslo P_{0T}^{*P} . Podobně bychom z (4.15B) získali pro podíl $\frac{Q(T)}{Q(0)}$ zřetěžené Laspeyresovo kvantové indexní číslo Q_{0T}^{*L} .

Zvolený způsob rozkladu podle (4.11) vede tedy ke dvěma speciálním situacím, které představují dříve známá dvě zřetěžená "klasická" indexní čísla.

Poznámka 4.1 Pokud bychom vycházeli z dekompozice hodnotového makroagregátu způsobem

$$(4.17) \quad [P(t) - P(t-1)] \cdot Q(t-1) + [Q(t) - Q(t-1)] \cdot P(t) ,$$

obdrželi bychom analogickou cestou dvojici zřetěžených indexních čísel P_{0T}^{*L}, Q_{0T}^{*P} .

Postupem podle Divisiova schématu obdržíme pro spojitý i diskretní případ zřetěžené indexní číslo splňující axiom záměny faktorů. Nevyhnete se však již zmíněné nejednoznačnosti určení v důsledku neurčitosti volby multiplikativního rozkladu (diskretní případ), resp. odhadu aproximujícího Stieltjesova integrálu (spojitý případ). Určitá zpřesnění získaných hodnot jsou nicméně možná v případech, kdy máme k dispozici dodatečné údaje o množinách bodů popisujících vývoj individuálních cen a kvantit.

Základní a závažný problém spojený s praktickou aplikací Divisiova přístupu je ten, že ceny a kvantit nemůžeme měřit kontinuálně, ale vždy jen v určitých odstupech. Takže pro jakékoliv praktické použití by musely být Divisiovy indexy se spojitým časem aproximovány diskretními, přičemž existuje mnoho možností jak takovou diskretní aproximaci provést. Diewert [1980] ukázal, že nejen Laspeyresův a Paascheho index mohou být vzaty jako speciální aproximace podílu $P(1)/P(0)$, ale že tomu tak může být i u Törnquistova indexu (exaktního pro *TRANSLOG* užítkovou funkci, jak zmiňujeme níže v kapitole [7]), pokud definujeme

$$\ln P_{01}^T = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (s_i(0) + s_i(1)) \cdot \ln \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right) , \quad \text{kde } s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{j=1}^N p_j(t)q_j(t)}$$

Za zmínku stojí, že postup, který použil Divisia v případě indexů se spojitým časem, uplatnil již o něco dříve anglický statistik T.L.Bennet² až na to, že neuplatnil na (4.1) dělení výrazem $p(t) \cdot q(t)$.

Bennet [1920] navrhl následující diskrétní aproximaci k měření diferencí (nikoliv tedy podílů jako Divisia) na agregátních cenových a množstevních úrovních:

$$(4.18) \quad \Delta P \equiv P(1) - P(0) \equiv 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (q_i(0) + q_i(1)) \cdot (p_i(1) - p_i(0)) \quad ,$$

$$(4.19) \quad \Delta Q \equiv Q(1) - Q(0) \equiv 1/2 \cdot \sum_{i=1}^N (p_i(0) + p_i(1)) \cdot (q_i(1) - q_i(0)) \quad .$$

Bennet přitom také ukázal, že rozdíl ve výdajích mezi dvěma obdobími $\sum_{i=1}^N p_i(1)q_i(1) - \sum_{i=1}^N p_i(0)q_i(0)$ dává přesně výraz rovný $\Delta P + \Delta Q$, kde ΔP a ΔQ jsou definovány pravými stranami (4.18), (4.19).

Poznámka 4.2 Obecná definice Divisiova spojitého indexu je čistě matematickou konstrukcí a nemusí mít žádnou bezprostřední souvislost s rozklady zasazenými do prostředí indexních čísel, dokonce ani nemusí mít vůbec žádný vztah k ekonomickému prostředí. Teprve později, Jean Villé [1951-52]³ a C.R.Hulten v [19] analyzovali Divisiovy indexy v prostředí cen a spotřebovaných množství za předpokladu, že spotřebitel optimalizuje své chování (z hlediska minimalizace nákladů) a že příslušná užitková funkce je lineárně homogenní⁴.

Protože se, jak známo, indexy $P_{01}^L, P_{01}^P, P_{01}^T$ mohou značně lišit, Divisiův přístup nevede k praktickému jednoznačnému návodu, jak řešit problém měření cen. Alternativní návrhy, jak aproximovat Divisiův index se spojitým časem pomocí diskrétních dat podali Paul Samuelson a Subramanian Swamy v [25].

² Bennet, T.L.: The Theory of Measurement of Changes in Cost of Living. Journal of the Royal Statistical Society 83/1920 s.455-462

³ Villé, J.:

⁴ Lineárně homogenní funkce N – proměnných $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ splňuje vlastnost $F(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \cdot F(\mathbf{x})$ pro libovolné skalární $\lambda > 0$.