5 Mikroekonomický přístup : Koňusova (*funkcionální*) indexní čísla

Tento typ od předchozích v principu odlišný indexních čísel je zasazen do prostředí teorie užitku, neboť jeho základní nástroje jsou vázány na pojmy z této oblasti a příslušný operační aparát je vybudován v přímé souvztažnosti s kritérii maximalizace užitku při daném rozpočtovém omezení, resp.duálnímu problému minimalizace výdajů spotřebitele na opatření komodit (při zachování užitku na předem stanovené pevné hladině). V definicích cenových funkcionálních indexních čísel se uplatňují podíly výdajů spotřebitele na pořízení komodit vyvolané relativními cenovými změnami při zachování shodného hodnotícího kritéria pro spotřebitele, tj. v situaci, kdy spotřebitel získává z nakoupených komodit nezměněný užitek, tj. srovnání probíhá při pohybu po stejných indiferenčních křivkách $u(.) = konst.$ vymezených hodnotami *nepřímé užitkové funkce* v základním a běžném období.

Obdobná úloha by mohla být formulována pro situaci výrobce nacházejícího se v prostředí, kterým se zabývá teorie produkce. Pak by šlo, mutatis mutandis, o analogickou situaci, kdy výrobce maximalizuje objem výroby při stanoveném omezení na množství výrobních nákladů, resp. o duální problém minimalizace výrobních nákladů při zachování předepsané úrovně produkce (ve smyslu definice nákladové funkce uplatňující se v teorii produkce).

5.1 Formulace problému s pojmy teorie užitku

Uvažujme stejně jako dříve dvě časová období, která budeme v souladu se značením zavedeným pro aparát indexních čísel označovat “0” - období základní a “1” - období běžné. Ekonomická situace, ve které se nachází spotřebitel, nechť je v tomto základním období zevně charakterizována cenovým vektorem $\boldsymbol{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0))$. Současně nechť spotřebitel, jehož preferenční hlediska jsou vyjádřena přímou užitkovou funkcí $u^{(0)}(x_1, x_2, ..., x_n)$ pobírá v tomto základním obdobím příjem $M(0)$, který v plném rozsahu vynaloží na nákup n komodit. Tyto informace nám umožňují zavést pro základní období nepřímou užitkovou funkci $\psi(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0); M(0))$, kterou budeme zkráceně označovat $\psi^{(0)}(\boldsymbol{p}, M)$. Jak patrno, horní index vyjadřuje časový okamžik měření, argumenty funkce jsou ceny komodit a důchod spotřebitele, obojí vzaté v období “0” .

Naprosto shodně pak formulujeme analogické podmínky pro běžné období “1” : V něm má spotřebitel příjem $M(1)$, přičemž vnější cenové prostředí je popsáno cenovým vektorem $\boldsymbol{p}(1) = (p_1(1), p_2(1), ..., p_n(1))$. To umožňuje parametrizovat nepřímou užitkovou funkci $\psi(p_1(1), p_2(1), ..., p_n(1); M(1))$, kterou budeme zkráceně značit $\psi^{(1)}(\boldsymbol{p}, M)$. Změny cenové hladiny budeme vyšetřovat ve dvou možných směrech, resp. fázích :

V prvé z nich budeme vycházet ze stavu daného situací v základním období “0”. Po změně cenového vektoru z původního $\boldsymbol{p}(0)$ na nový $\boldsymbol{p}(1)$ dojde následně k posunu původního rovnovážného bodu charakterizujícího úrovně poptávky po jednotlivých komoditách) $\boldsymbol{q}(0)$ do nového bodu $\boldsymbol{q}^*(0)$, v němž se (nová) poptávka po komoditách přizpůsobí relativním změnám cenových proporcí z $\boldsymbol{p}(0)$ na $\boldsymbol{p}(1)$. Obecně lze říci, že se zvýší poptávka po těch komoditách, u kterých došlo k relativnímu zlevnění na úkor statků, které naopak zdražily. Přitom se zpravidla změní i důchod potřebný k nákupu nových komoditních množství $\boldsymbol{q}^*(0)$. Aby nicméně byla zachována souměřitelnost posuzování obou situací spotřebitelem, nemění se uvažovaná hladina užitku $u(0)$, tzn. že přizpůsobení kvantit cenovým změnám se odehrává na téže indiferenční křivce

Druhá uvažovaná situace ve změnách cen a následném přizpůsobení jednotlivých poptávek bude v jistém smyslu “inverzní” k první : Vyjdeme ze stavu charakterizovaného cenovou hladinou a úrovní spotřeby komodit v běžném období “1”, tzn. $\boldsymbol{p}(1)$, $\boldsymbol{q}(1)$. Užitek odpovídající této výchozí situaci je dán hodnotou $u(1)$. Dále předpokládáme změnu cenového vektoru $\boldsymbol{p}(1)$ na úrovně cen tentokrát odpovídající základnímu období, tedy $\boldsymbol{p}(0)$. Tomuto cenovému pohybu bude odpovídat analogický pohyb kvantit, tedy přesun rovnovážného bodu do nového bodu $\boldsymbol{q}^*(1)$ zachycujícího úrovně poptávky po komoditách, který by se realizoval, pokud by poptávaný komoditní vektor - poskytující spotřebiteli užitek na nezměněné hladině $u(1)$ - byl odvozován z cenové úrovně základního období, tedy $\boldsymbol{p}(0)$.

5.2 Funkcionální cenová indexní čísla

Na základě předešlého vymezení situace a pojmů nyní definujeme :

__Definice 5.1__ Funkcionální **Koňusovo-Laspeyresovo cenové indexní číslo** P_{01}^{KL} na hladině užitku $u(0)$ je určeno výrazem

(5.1)
$$P_{01}^{KL} = \frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1)\cdot q_i^*(0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)\cdot q_i(0)}$$

kde symbol $q_i^*(0)$ označuje taková rovnovážná množství komodit, která při změněné cenové situaci $\boldsymbol{p}(1)$ přinášejí spotřebiteli stejný užitek $u(0)$ jako komoditní kombinace $q(0)$ za cenové situace $\boldsymbol{p}(0)$. Hodnotový agregát $M^*(1,0)$ pak označuje právě příjem dostačující k tomu, aby spotřebitel měl možnost nakoupit komodity v množstvích $q_i^*(0)$ (opět při nové cenové situaci $\boldsymbol{p}(1)$).

Ve výrazu (5.1) jsme použili místo označení $M(0)$ představujícího výdaj nutný na pořízení komodit $q_i(0)$ při cenách $p_i(0), i = 1,2,....,n$ - tedy celkem $\sum p_i(0)\cdot q_i(0)$ - poněkud odlišné značení $M(0,0)$. Je tomu tak proto, abychom mohli - v pořadí nejprve ceny, pak kvantity - zkráceně vyjadřovat příslušné hodnotové agregáty i v případě, že nedojde ke shodě časových období, v nichž jsou ceny a kvantity vyjadřovány. Obdobné značení uplatníme i v navazujících definicích.

__Definice 5.2__ : Funkcionální **Koňusovo-Paascheho cenové indexní číslo** P_{01}^{KP} na hladině užitku $u(1)$ je určeno hodnotou

(5.2)
$$P_{01}^{KP} = \frac{M(1,1)}{M^*(0,1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)\cdot q_i^*(1)} ,$$

kde analogicky symbol $q_i^*(1)$ označuje taková rovnovážná množství komodit, která při změněné cenové situaci $\boldsymbol{p}(0)$ přinášejí spotřebiteli stejný užitek jako komoditní kombinace $\boldsymbol{q}(1)$ za původní cenové situace $\boldsymbol{p}(1)$. Náklad na pořízení statků $M^*(0,1)$ pak odpovídá právě příjmu potřebnému k tomu, aby spotřebitel měl možnost nakoupit komodity v množstvích $q_i^*(1)$, tentokrát vycházeje z původní cenové situace $\boldsymbol{p}(1)$.

V této souvislosti bude mj. zajímavé a užitečné vyšetřit vztah výrazů $M^*(1,0)$ a $M(1,0)$. Druhý z nich, neuplatňující se přímo v definicích (5.1) a (5.2) funkcionálních indexních čísel, představuje úroveň příjmu potřebnou k tomu, aby spotřebitel za cenové situace $\boldsymbol{p}(1)$ nakoupil komodity ve stejných množstvích jako v základním období, tj. $\boldsymbol{q}(0)$, tzn. neuvažuje se zde žádná adaptace poptávky po komoditách při změně cenových proporcí.

Tvrzení 5.1 Za výše popsané situace vždy platí, že

$$M^*(1,0) \le M(1,0) \tag{5.3}$$

Ověření Postačí všimnout si srovnání hodnot nepřímé užitkové funkce $\psi^{(0)}(\boldsymbol{p}, M)$. Platí pro ni totiž

$$\psi(p_1(1), p_2(1), ..., p_n(1); M^*(1,0)) = u(0) = \psi^{(0)}(\boldsymbol{p}(0), M(0)).$$

přičemž příjem $M^*(1,0)$ je definičně nejmenší postačující k tomu, aby spotřebitel hladiny užitku $u(0)$ dosáhl za cenové situace $p(1)$. Pokud by platila opačná než ověřovaná nerovnost, tzn. situace $M^*(1,0) > M(1,0)$, potom by to znamenalo, že s menší hodnotou příjmu, totiž s úrovní $M(1,0)$ by bylo možno dosáhnout stejné hladiny užitku $u(0)$ jako s úrovní $M^*(1,0)$. Vzhledem k tomu, že srovnání by proběhlo při cenách $p(1)$ na téže indiferenční křivce, bylo by toto zjištění v rozporu s předpokladem, že $M^*(1,0)$ je minimální možný příjem. Nepřímá užitková funkce by tedy nemohla být v proměnné M rostoucí. Jak lze ukázat, dostali bychom se i do sporu s konvexností množin vymezujících indiferenční křivky. □.

Nerovnost (5.3) můžeme vysvětlit takto: Příjem nutný k zakoupení komodit poskytujících užitek $u(0)$ není větší, pokud dojde k přizpůsobení cen pohybem kvantit do nového rovnovážného bodu (odpovídajícího cenové úrovni $\boldsymbol{p}(1)$, než v situaci, kdy k takovémuto pohybu kvantit nedojde. Není to ostatně nic překvapivého, neboť pohyb kvantit (po téže indiferenční křivce) při změně cen do nového rovnovážného bodu se děje (v souladu s rovnocenným principem minimalizace potřebného příjmu) směrem k pořizování levnějších komodit v kombinacích poskytujících jinak stejnou hladinu užitku (je-li ovšem substituce mezi komoditami možná)..

Poznámka 5.1 Pro symbol $M^*(0,1)$ zavedený v *Definici 5.2* platí ve vztahu k $M(0,1)$ nerovnost

$$M^*(0,1) \le M(0,1) \tag{5.4}$$

kterou ověříme analogickou úvahou, pokud vyjdeme z ryzí monotónnosti nepřímé užitkové funkce $\psi^{(1)}(\boldsymbol{p}, M)$ ve vztahu k M. I zde můžeme konstatovat, že příjem nezbytný k pořízení komodit spotřebovávaných v běžném období $\boldsymbol{p}(1)$ je nižší v případě, že se kvantity pohybem do nového rovnovážného bodu (tentokrát pro cenovou úroveň $\boldsymbol{p}(0)$ přizpůsobí odehrané cenové změně. Připomeňme, že v této úvaze postupujeme v čase "inverzně", tj. od běžného "1" k základnímu "0" období. Opět je to plně v souladu s charakterizací rovnovážného bodu jako stavu, v němž se ustálí poptávka po jednotlivých komoditách, nastal-li dříve pohyb v cenách těchto komodit, přičemž toto směřování vyústí v "nejlevnější možnou komoditní kombinaci", s níž se dociluje daná hladina užitku $u(1)$. V uvažovaném případě platí

$$\psi(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0); M^*(0,1)) = u(1) = \psi^{(1)}(\boldsymbol{p}(1), M(1)).$$

a tedy pro příjem nemůže současně také platit $M(0,1) < M^*(0,1)$, neboť by to mj. znamenalo, že nepřímá užitková funkce není rostoucí v příjmu a že indiferenční křivky nemohou být “vyklenuty” směrem k počátku (nekonvexnost množin vymezujících tyto křivky).

Kvantová (množstevní) funkcionální indexní čísla nyní budeme definovat následujícím způsobem :

5.3 Funkcionální kvantová (množstevní) indexní čísla

Definice 5.3 Funkcionální **Koňusovo-Laspeyresovo kvantové indexní číslo** Q_{01}^{KL} pro cenovou situaci základního období $\boldsymbol{p}(0)$ je určeno výrazem

(5.5)
$$Q_{01}^{KL} = \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)\cdot q_i^*(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)\cdot q_i(0)} ,$$

kde kvantity $\boldsymbol{p}(1)$ mají stejný význam jako v Definici 5.2 .

Definice 5.4 Funkcionální **Koňusovo-Paascheho kvantové indexní číslo** $\boldsymbol{Q_{01}^{KP}}$ pro cenovou situaci běžného období $\boldsymbol{p}(1)$ je definováno výrazem.

(5.6)
$$Q_{01}^{KP} = \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(1)\cdot q_i^*(0)}$$

kde význam kvantit $q_i^*(0)$ je stejný jako v *Definici 5.1*.

Poznámka 5.2 Jak je z definicí kvantových funkcionálních čísel patrné, nejsou kvantová indexní čísla vyvozena z cenových pouhou mechanickou záměnou cen a kvantit. Je tomu tak proto, že zatímco v případě cenových funkcionálních indexních čísel zkoumáme pohyb kvantit - vyvolaný změnou cenových proporcí - v různých místech téže indiferenční křivky, nelze situaci srovnatelně formulovat pro pohyby v cenách., které se - jako exogenně dané veličiny (nezávislé na individuálních nákupních záměrech) - vyvíjejí nezávisle na změnách spotřebitelova nákupního chování.

Kvantová indexní čísla tedy vyjadřují nikoliv porovnání stavů ve dvou bodech téže indiferenční křivky, ale stavů na dvou různých indiferenčních křivkách představujících hladiny užitku pro základní a běžné období . Jinými slovy řečeno, jde o srovnání dvou situací na téže Engelově křivce[1] (tj. křivce vyjadřující vývoj poptávky po dané komoditě při rostoucím příjmu M a pevných cenách $\boldsymbol{p}$) . Pro případ definice 5.3 jde o Engelovu křivku při daných cenových proporcích $\boldsymbol{p}(0)$ základního období, v případě definice 5.4 se jedná o Engelovu křivku odpovídající pevným cenám $\boldsymbol{p}(1)$ běžného období**.**

[1] Engelova křivka $\Theta(M)$ je v podstatě zvláštní tvar nepřímé užitkové funkce, v níž jsou pevně stanoveny komodit

$$p_1 = p^*{}_1, p_2 = p^*{}_2, ..., p_N = p^*{}_N \quad : \quad \Theta(M) = \psi\left(p_1^*, p^*{}_2, ..., p^*{}_N ; M\right)$$

5.4 Jednostranná omezení funkcionálních čísel - Koňusovy nerovnosti

Z dokázaných nerovností (5.3) a (5.4) bezprostředně vyplývají další zajímavé důsledky.

Důsledek 5.1

Vzhledem k platnosti nerovnosti $M^*(1,0) \leq M(1,0)$, platí také nerovnost

(5.7) $$\frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} \leq \frac{M(1,0)}{M(0,0)}$$, což znamená $P_{01}^{KL} \leq P_{01}^{L}$

Odvodili jsme tedy poznatek, že funkcionální cenové indexní číslo P_{01}^{KL} lze shora omezit hodnotou Laspeyresova cenového indexního čísla (srovnávajícího vektory cen běžného a základního období).

Podobně při platnosti $M^*(0,1) \leq M(0,1)$ můžeme pokračovat vývodem, že

(5.8) $$\frac{M(1,1)}{M^*(0,1)} \geq \frac{M(1,1)}{M(0,1)}$$, což zde znamená, že $P_{01}^{KP} \geq P_{01}^{P}$

a lze tedy konstatovat, že funkcionální cenové indexní číslo P_{01}^{KP} lze zdola omezit hodnotou Paascheho cenového indexního čísla. Srovnání opět probíhá mezi vektory cen běžného a základního období, kvantity zde vystupují buď po přizpůsobení změnám cen nebo v původních hodnotách.

Vztahy (5.7) a (5.8) odvodil poprvé ruský statistik Andrej A.Koňus [1924] a jsou po něm nazývány Koňusovy nerovnosti. Funkcionální cenová indexní čísla nelze sice na jejich základě omezit oboustranně ohraničeným intervalem, nicméně možnost aspoň jednostranného omezení každého z obou definovaných indexních čísel je cenná (zvláště, tvoří-li hranice právě P_{01}^{P} a P_{01}^{L}).

Poznámka 5.3

Obdobným způsobem bychom dostali také pro kvantová funkcionální indexní čísla dvě jednostranná omezení, a to pro

(5.9) $Q_{01}^{KL} \leq Q_{01}^{L}$, neboť $$\frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} \leq \frac{M(0,1)}{M(0,0)}$$

(5.10) $Q_{01}^{KP} \geq Q_{01}^{P}$, protože $$\frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} \geq \frac{M(1,1)}{M(1,0)}$$

tedy obdobně jako u cenových lze alespoň jednostranně vymezit jejich vztahy k Laspeyresovu a Paascheho indexním číslům.

5.5 Grafické přiblížení

Přibližme výše uvedené obrázkem – viz **obr. č.1** : Máme na něm znázorněnu situaci se dvěma komoditami q_1 a q_2. Uvažujme dvě indiferenční křivky odpovídající hladinám užitku $u(0)$ a $u(1)$ takové, že v souladu s obrázkem $u(0) < u(1)$. První hladině užitku odpovídá nepřímá užitková funkce $\psi[p_1(0), p_2(0), M(0)] = u(0)$, druhé pak nepřímá užitková funkce $\psi[p_1(1), p_2(1), M(1)] = u(1)$.

A) Koňusovo-Laspeyresovo cenové indexní číslo

V základním období "0" nechť jsou dány ceny $p_1(0)$, $p_2(0)$. Jejich relativní poměr $\frac{p_2(0)}{p_1(0)}$ určuje (doplňkem do 180%) tangens úhlu γ . (tg γ = p1(0)/p2(0) = q2(0)/q1(0)) Úsečka r vyjadřuje rozpočtové omezení ve tvaru **{ r }**

(5.11) $$p_1(0) \cdot q_1(0) + p_2(0) \cdot q_2(0) = M(0{,}0) \qquad (\text{ zkráceně } M(0))$$

kde příjem o velikosti $M(0)$ udává minimální dosažitelné náklady na nákup komodit - v množstvích $q_1(0)$, $q_2(0)$ - postačující k dosažení užitku o velikosti $u(0)$. Bod C je (jediným) takovým optimálním bodem, v němž se úsečka r dotýká indiferenční křivky $u(0)$.

Předpokládejme, že se v důsledku nějakého exogenního vývoje změní cenový poměr $\frac{p_2(0)}{p_1(0)}$ tak, že se zdraží komodita q_1 a současně zlevní komodita q_2. Nový poměr cen bude $\frac{p_2(1)}{p_1(1)}$.

Znamená to, že k případnému dosažení užitku na téže úrovni $u(0)$ bude zapotřebí koupit více zboží q_2 a méně zboží q_1. Změněný relativní cenový poměr bude dán tangentou úhlu δ. Nákupy obou zboží budou realizovány v množstvích $q_1^*(0)$, $q_2^*(0)$, které odpovídají souřadnicím nového rovnovážného bodu D. Úsečka s procházející tímto bodem je přitom vyjádřena rovnicí **{ s }**

(5.12) $$p_1(1) \cdot q_1^*(0) + p_2(1) \cdot q_2^*(0) = M^*(1{,}0)$$

B) Koňusovo-Paascheho cenové indexní číslo

Uvažujme nyní obrácenou situaci k výše popsané. Nacházíme se v běžném období "1", v němž je užitek spotřebitele popsán nepřímou užitkovou funkcí $\psi^{(1)}[p_1(1), p_2(1), M(1)]$ na vyšší hladině užitku $u(1)$ tzn., že při stejném množství jedné komodity se nakupuje více množství komodity druhé než v základním období. Rovnovážný stav, který odpovídá minimálním možným vynaloženým nákladům na nákup komodit zajišťujících užitek $u(1)$, je vyjádřen polohou bodu G - komodity se tedy budou nakupovat v množstvích $q_1(1)$ a $q_2(1)$. Ceny nyní odpovídají cenovému poměru $\frac{p_2(1)}{p_1(1)}$ tzn. opět se nacházejí v proporci odpovídající tangentě úhlu δ.

Úsečka vedená bodem G rovnoběžně s přímkou s je vyjádřena rovnicí **{ s* }**

(5.13) $$p_1(1) \cdot q_1(1) + p_2(1) \cdot q_2(1) = M(1{,}1)$$

Tato úsečka není k indiferenční křivce $u(0)$ tečná, nýbrž ji protíná ve dvou bodech a nemůže tedy představovat minimální možné výdaje potřebné k dosažení užitku $u(0)$.
Nechť nyní dojde pod vlivem nějakého vnějšího podnětu ke změně cen, dejme tomu na poměr odpovídající cenové relaci v základním období tj. $\frac{p_2(0)}{p_1(0)}$. Přizpůsobení poptávky nákupem komodit v jiných množstvích než $q_1(1)$ a $q_2(1)$ – označme je $q_1^*(1)$ a $q_2^*(1)$ - je charakterizováno přesunutím nákupů z bodu G do nového rovnovážného bodu H. Je zřejmé, že přímky r a r^* jsou rovnoběžné, neboť ve vztahu k ose q_1 svírají stejný úhel γ.

Úsečka vedená bodem H rovnoběžně s přímkou r je vyjádřena rovnicí **{ r* }**

(5.14) $$p_1(0)\cdot q_1^*(1) + p_2(0)\cdot q^*{}_2(1) = M^*(0,1)$$

Přibližme ještě tímtéž obrázkem výdaje porovnávané v obou Koňusových indexních číslech :

$\underline{P^{KL}{}_{01}}$: Vezměme indiferenční křivku $\psi^{(0)} = \psi^{(0)}[p_1(0), p_2(0), M(0)]$ s užitkem na hladině $u(0)$. Výraz $M(0,0)$ představuje peněžní prostředky nutné (a postačující) k tomu, aby spotřebitel dosáhl užitku $u(0)$ při cenové úrovni $\boldsymbol{p}(0)$. Naproti tomu výraz $M^*(1,0)$ v čitateli P_{01}^{KL} udává peněžní objem postačující k tomu, aby spotřebitel dosáhl téhož užitku $u(0)$ při cenách $\boldsymbol{p}(1)$ běžného období. Nejúspornější možný výdaj představuje nákup komodit v množstvích odpovídajících bodu D, indexní číslo $P^{KL}{}_{01}$ je tedy konstruováno jako podíl výdajů na nákupy v bodě D a nákupních výdajů v bodě C. Přitom $P^{KL}{}_{01}$ může být jak větší, tak menší než 1.

V obecném případě nelze tedy říci, zda je $M^*(1,0) < M(0,0)$ nebo platí opačná nerovnost, zato již víme, že vždy platí $M^*(1,0) \le M(1,0)$, kde druhý výraz představuje množství peněz potřebné na nákupy obou komodit pro užitek $u(0)$ při cenové úrovni $\boldsymbol{p}(1)$, pokud by se ovšem poptávka nepřizpůsobila změně v poměru cen z $\boldsymbol{p}(0)$ na $\boldsymbol{p}(1)$. Velikost výdajů $M(1,0)$ by byla dána hodnotami na rovnoběžce s** s úsečkou s vedené bodem C.**{ s** }**

(5.15) $$p_1(1)\cdot q_1(0) + p_2(1)\cdot q_2(0) = M(1,0)$$

Hodnota funkcionálního (Koňusova) indexního čísla P_{01}^{KL} je tedy dána poměrem výdajů představovaných peněžním množstvím na úsečce s vůči analogickému množství vyjádřenému úsečkou r. Obecně nelze říci, které výdaje jsou větší (i když určením úhlů a souřadnic koncových bodů obou úseček by to možné bylo pro každý jednotlivý případ) lze pouze vyslovit tendenci, že posun "příliš daleko" od "malých" hodnot komoditních množství (tj. "ze středu blíže k osám") náklady (tedy i hodnota indexního čísla) porostou v důsledku rychle narůstajících nákladů spojených s pořízením komodity potřebné ve velkém množství při zřetelně nižším tempu poklesu nákladů na pořízení "ubývající komodity".

Nyní provedeme obdobnou úvahu ve vztahu k užitkové funkci $\psi^{(1)} = \psi^{(0)}[p_1(1), p_2(1), M(1)]$ tzn. s užitkem na hladině $u(1)$. Zřejmě výraz $M(1,1)$ představuje peněžní objem nutný a postačující k tomu, aby spotřebitel dosáhl užitku $u(1)$ při cenové úrovni $\boldsymbol{p}(1)$. V porovnání s tím výraz $M^*(0,1)$ ve jmenovateli P_{01}^{KP} udává nejmenší možný peněžní objem postačující k tomu, aby spotřebitel dosáhl téhož užitku $u(1)$ při cenách $\boldsymbol{p}(0)$ základního období. Ten představuje objem prostředků vynaložený na nákup komodit v množstvích odpovídajících bodu H (jako nejúspornějšímu nákupu při těchto cenách). P_{01}^{KP} tedy představuje podíl výdajů vynaložených na nákup obou komodit v množstvím odpovídajících bodu H a výdajů na nákupy komodit v množstvích vyjádřených bodem G. Ani zde nelze obecně říci, zda platí $M^*(0,1) < M(1,1)$ nebo opačná nerovnost, zato se lze snadno přesvědčit, že vždy platí $M^*(0,1) \leq M(0,1)$, kde $M(0,1)$ vyjadřuje výdaj na nákupy obou komodit pro užitek $u(1)$ při cenové úrovni $\boldsymbol{p}(0)$, jestliže by se poptávka po komoditách neadaptovala podle změny v poměru cen z $\boldsymbol{p}(1)$ na $\boldsymbol{p}(0)$. Velikost výdajů $M(0,1)$ udává tentokrát úsečka vedená bodem G (vyjadřujícím množství $q_1(1)$, $q_2(1)$ nakupovaná v nynějším "základním" období "1") rovnoběžně s úsečkou r a její rovnice je **{ r** }**

(5.16) $$p_1(0) \cdot q_1(1) + p_2(0) \cdot q_2(1) = M(0,1)$$

Tato úsečka není k indiferenční křivce $u(1)$ tečná, nýbrž ji protíná ve dvou bodech (jedním z je G).

Je patrné, že v případě tří a více komodit by byla situace principiálně obdobná, znázornění pomocí indiferenčních křivek a rozpočtových nadrovin by ovšem bylo komplikovanější.

C) Koňusovo-Laspeyresovo a Koňusovo-Paascheho kvantové indexní číslo

Pokud jde o kvantová funkcionální indexní čísla, pak $Q^{KL}{}_{01}$ i $Q^{KP}{}_{01}$ představují srovnání hodnoty nákupů na různých indiferenčních křivkách :

Koňusovo-Laspeyresovo kvantové číslo indexní $Q^{KL}{}_{01}$ je určen podílem výdajů v bodě G oproti bodu D, zatímco Koňusův-Paascheho kvantový index $Q^{KP}{}_{01}$ je dán podílem výdajů v bodě C oproti bodu H. V situaci popsané obrázkem je nákup komodit v G zřejmě dražší než v nákup v bodě D (proto $Q^{KL}{}_{01} > 1$), zatímco nákup statků v bodě C je levnější než nákup statků v H (odtud $Q^{KP}{}_{01} < 1$).

Účelem druhého obrázku –**obr. č.2** - je objasnit další vztahy mezi výdajovými veličinami :

Úsečky s, s^C, s^*, případně i s^H (procházející v daném pořadí body D, C, G příp. H) vyjadřují nákupy komodit uskutečněné v cenách běžného období - jde o hodnoty $M^*(1,0)$, $M(1,0)$, $M(1,1)$, popř. $M^*(1,1)$. Příslušnost k cenám běžného období značí první indexní hodnota " 1 ".

Naproti tomu úsečky r, r^D, r^*, r^G zobrazují možné nákupy obou komodit uskutečněné za ceny základního období - jde o výdaje $M(0,0)$, $M^*(0,0)$, $M^*(0,1)$ a $M(0,1)$. "Cenová příslušnost" k základnímu období je zde označena " 0 " coby první indexní hodnotou v závorce.

a) Připomeňme, že vždy platí $M^*(1,0) \leq M(1,0)$ a $M^*(0,1) \leq M(0,1)$, přičemž u indiferenčních křivek ve tvaru zachyceném obrázkem platí ostré nerovnosti. Nelze však obecně říci, zda M(1,0) < M(0,0) nebo zda platí opačná nerovnost (podíl obou výdajů definuje *prosté* **Laspeyresovo cenové indexní číslo** $P^L{}_{01}$). Obdobně nelze obecně rozhodnout o vztahu mezi nákupy M(1,1) a M(0,1), jejichž podíl definuje *prosté* **Paascheho cenové indexní číslo** $P^P{}_{01}$.

b) Pokud jde o veličiny srovnávané v obou klasických kvantových indexních číslech $Q^{L}{}_{01}$, $Q^{P}{}_{01}$, pak ani zde nejsou příslušné vztahy mezi výdaji jednoznačně dány : - dle obrázku sice $M(1{,}0) < M(1{,}1)$, ale při menším odstupu obou indiferenčních křivek by mohl nastat opak (úsečka s^{C} nemusí být vždy blíže počátku než úsečka s^{*}). $Q^{P}{}_{01}$ může být tedy menší i větší než 1. Podobně obrázek 2 sice sděluje, že $M(0{,}0) < M(0{,}1)$ - úsečka r je blíže k počátku než úsečka r^{G} - a tedy následně $Q^{L}{}_{01} > 1$, avšak jen proto, že jsme zvolili pro běžné období hladinu užitku $u(1)$ vyšší než pro běžné období $u(0)$. Při opačné volbě bude $Q^{L}{}_{01} > 1$. Úsečka s^{H} je ostatně zakreslena jen pro úplnost; výdaj $M^{*}(1{,}1)$ jí odpovídající je zřejmě nejdražší ze všech uvažovaných nákupů D, C, G, H při cenách $p(1)$.

c) Dále, hodnota Koňusova-Laspeyresova cenového indexního čísla tedy může jak větší tak menší než "neutrální" hodnota 1. Již víme, že vždy platí $M^{*}(1{,}0) \leq M(1{,}0)$, protože druhý výraz představuje množství peněz potřebné na nákupy obou komodit pro užitek $u(0)$ při cenové úrovni $p(1)$, pokud by se poptávka změně v poměru cen z $p(0)$ na $p(1)$ nepřizpůsobila. Výdaj $M(0{,}1)$ zde odpovídá úsečce s^{C} vedené bodem C (představujícím nakupovaná množství $q_1(0)$, $q_2(0)$) rovnoběžně s úsečkou s. Průběh úsečky s^{C} vyjadřuje rovnice **{ s$^{\mathbf{C}}$ }**

$$p_1(1)\cdot q_1(0) + p_2(1)\cdot q_2(0) = M(1{,}0) \tag{5.17}$$

Tato úsečka není k indiferenční křivce $u(0)$ tečná, nýbrž ji protíná ve dvou bodech (jedním z nich je právě bod C) a nemůže tedy představovat minimální možné výdaje zajišťující dosažení užitku $u(0)$.

d) Pokud obdobné úvahy aplikujeme na vztahy mezi nákupy v bodech $D, C, G,. H$ v cenách základního období $p(0)$, lze vyvodit, že hodnota výdaje na komodity při cenách $p(0)$ v bodě C je nižší něž výdaj odpovídající bodu D (úsečka r je blíže počátku než r^{D}), platí tedy $M(0{,}0) < M^{*}(0{,}0)$. Podobně, což je interpretačně důležitější, platí $M^{*}\{0{,}1) < M\{1{,}1)$, neboli, že výdaj v H je menší než výdaj v bodě G.

Ani v tomto případě (Koňusova-Paascheho indexního čísla) však nelze obecně říci, zda platí $M^{*}\{0{,}1) < M\{1{,}1)$ nebo opačná nerovnost. Opět závisí na poloze srovnávaných bodů G, H na indiferenční křivce $u(1) = \psi^{(1)}[p_1(1), p_2(1), M(1)]$ pro hladinu užitku $u(1)$. Na druhé straně už víme, že vždy platí $M^{*}(1{,}0) \leq M(1{,}0)$, kde $M(0{,}1)$ vyjadřuje výdaj na nákupy obou komodit v množstvích $q_1(1)$, $q_2(1)$ pro užitek $u(1)$ při cenové úrovni $p(0)$), jestliže by se poptávka po komoditách neadaptovala na změny z $p(1)$ na $p(0)$. Hodnotu výdaje $M(0{,}1)$ udává nyní úsečka r^{G} (rovnoběžka s úsečkou r) vedená bodem G. Rovnice r^{G} (při nezáporných $q_1(0), q_1(0)$) je **{ r$^{\mathbf{G}}$ }**

$$p_1(0)\cdot q_1(1) + p_2(0)\cdot q_2(1) = M(0{,}1) \tag{5.18}$$

Úsečka r^{G} není k indiferenční křivce $u(1)$ tečná, nýbrž ji protíná ve dvou bodech (G je jedním z nich). Připomeňme ještě, že úsečka r^{*} je vyjádřena rovnicí **{ r* }**

$$p_1(0)\cdot q_1^{*}(1) + p_2(0)\cdot q^{*}{}_2(1) = M^{*}(0{,}1) \tag{5.14}$$

e) Z obrázku č.2 je dále možné vyvodit názornou grafickou interpretaci Laspeyresova a Paascheho indexního čísla. Připomeňme, že Laspeyresovo cenové indexní číslo je definováno podílem

(5.19) $$P_{01}^{L} = \frac{M(1,0)}{M(0,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)\cdot q_i(0)}$$

zatímco Paascheho cenové indexní číslo podílem

(5.20) $$P_{01}^{P} = \frac{M(1,1)}{M(0,1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)\cdot q_i(1)}$$

hodnotě $P^{L}{}_{01}$ tedy odpovídá vztah úseček s^{C} a r, hodnotě $P^{P}{}_{01}$ pak vztah mezi s^* a r^{G}. Průsečík prvních dvou úseček představuje bod C, průsečík druhých dvou pak bod G. Podobně, Laspeyresovo kvantové cenové indexní číslo je definováno podílem

(5.21) $$Q_{01}^{L} = \frac{M(0,1)}{M(0,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)\cdot q(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0)\cdot q_i(0)} \quad ,$$

kdežto Paascheho cenové indexní číslo podílem

(5.22) $$Q_{01}^{P} = \frac{M(1,1)}{M(1,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(1)\cdot q_i(0)}$$

hodnotě $Q^{L}{}_{01}$ tedy odpovídá vztah úseček r^{G} a r, hodnotě $Q^{P}{}_{01}$ obdobně vztah mezi s^* a s^{C}. V obou případech se jedná o dvojice rovnoběžných úseček.

Konečně z obrázku zaznamenáme, ve kterých bodech komoditního prostoru jsou výhodnější nákupy v cenách běžného resp. v cenách základního období. V bodě C dochází ke shodě výdajů na nákupy $M(0,0)$ a $M(1,0)$, platí zde tedy identity $p(1).q(0) = p(0).q(0)$. Shodu nákladů při cenách $p(0)$ a $p(1)$ představuje polopřímka vycházející z počátku a procházející bodem C (i H), jejíž rovnice je

$$q_2 = \frac{q_2(0)}{q_1(0)}.q_1 = \frac{q_2{}^*(1)}{q_1(1)}.q_1$$

V této souvislosti bude dále zajímavé a užitečné vyšetřit vztah výrazů $M^*(1,0)$ a $M(1,0)$. Druhý z nich (neuplatňující se přímo v definicích 5.1 a 5.2 funkcionálních indexních čísel) znamená vlastně úroveň příjmu potřebnou k tomu, aby spotřebitel za cenové situace $p(1)$ nakoupil komodity ve stejných množstvích jako v základním období, tj. $q(0)$ (tzn. neuvažuje se žádná adaptace poptávky po komoditách při změně cenových proporcí).

5.6 Fisherovy axiomy ve vztahu k funkcionálním indexním číslům

Rovněž u funkcionálních indexních čísel můžeme vyšetřovat, zda tato indexní čísla splňují jednotlivé axiomy/testy zavedené Irvingem Fisherem a jeho následovníky a na základě toho učinit jisté úvahy o jejich "teoretické kvalitě". S ohledem na nesymetričnost v adaptaci na změny vývoje kvantit a cen však musíme přistupovat k vyhodnocování závěrů pozorněji. Nelze pouze mechanicky zaměňovat symboly (ceny za množství a *vice versa*) v příslušných výrazech. Vždy je třeba promyslet, jaký je význam toho-kterého axiomu v prostředí cenových změn a následných posunů rovnovážných bodů. Omezíme se na vyšetření prvních osmi testů.

(F1) Axiom identity je zřejmě splněn triviálním způsobem u obou cenových indexních čísel, neboť při "nedostatku času" ke změně cen k žádné adaptaci poptávky po komoditách nemůže dojít. Kvantity se prostě nemění, tudíž pro $p_i(1) = p_i(0)$ vyplývá $q_i^*(0) = q_i(0)$ pro všechna $i = 1, 2, ..., n$ a následně $P_{01}^{KL} = 1$. Zde i formální dosazení do (5.1) vede ke stejnému závěru. Analogicky je tomu u indexního čísla P_{01}^{KP}, kde rovněž po dosazení $p_i(1) = p_i(0)$ a $q_i^*(0) = q_i(0)$ do (5.2) obdržíme 1.

(F2) Axiom záměny faktorů je rovněž u P_{01}^{KL} i P_{01}^{KP} splněn. K ověření je třeba pouze přiřadit k cenovému indexnímu číslu adekvátní kvantové : vezmeme-li např. P_{01}^{KL}, je nutné k němu jako duální použít kvantové Q_{01}^{KP} z definice 5.4, protože test musíme uvažovat v kontextu přechodu z hladiny $u(0)$ na $u(1)$. Potom platí

(5.23) $$P_{01}^{KL} \cdot Q_{01}^{KP} = \frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} \cdot \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

Analogickou úvahou prověříme, že také

(5.24) $$P_{01}^{KP} \cdot Q_{01}^{KL} = \frac{M(1,1)}{M^*(0,1)} \cdot \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)}$$

kde sledujeme nejprve adaptaci kvantit pohybem po indiferenční křivce $u(1)$ a následně sestup po Engelově křivce na úroveň $u(0)$.

(F3) U axiomu záměny období budeme porovnávat v souladu s následností dvou fází, ve kterých probíhá přizpůsobování kvantit (pohybem do nových rovnovážných bodů) cenovým změnám. Nejprve se odehraje změna cen $\boldsymbol{p}(0) \Rightarrow \boldsymbol{p}(1)$, poté protisměrná změna $\boldsymbol{p}(1) \Rightarrow \boldsymbol{p}(0)$. Proto vezmeme-li v prvé fázi poměr P_{01}^{KL}, musíme při obráceném kroku uplatnit P_{10}^{KP}. Obdobně postupujeme u kvantových indexních čísel. Platí tedy vztahy

(5.25) $$P_{01}^{KL} \cdot P_{10}^{KP} = \frac{M^*(1,0)}{M(0,0)} \cdot \frac{M(0,0)}{M^*(1,0)} = 1$$

jakož i vztah

(5.26) $$P_{01}^{KP}\cdot P_{10}^{KL}=\frac{M(1,1)}{M^*(0,1)}\cdot\frac{M^*(0,1)}{M(1,1)}=1$$

Podobně máme

(5.27) $$Q_{01}^{KL}\cdot Q_{10}^{KP}=\frac{M^*(0,1)}{M(0,0)}\cdot\frac{M(0,0)}{M^*(0,1)}=1$$

a také relaci

(5.28) $$Q_{01}^{KP}\cdot Q_{10}^{KL}=\frac{M(1,1)}{M^*(1,0)}\cdot\frac{M^*(1,0)}{M(1,1)}=1 \qquad ,$$

kteréžto rovnosti jsme snadno ověřili přímým dosazením do příslušných definičních výrazů.
(F4) Při vyšetření axiomu tranzitivity nejprve formulujme příslušnou levou stranu :

(5.29) $$P_{01}^{KL}\cdot P_{12}^{KL}=\frac{M^*(1,0)}{M(0,0)}\cdot\frac{M^*(2,1)}{M(1,1)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i^*(0)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(0)}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}p_i(2)\cdot q_i^*(1)}{\sum_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i^*(1)}$$

Znamená to tedy, že nejprve na indiferenční hladině užitku $u(0)$ dojde k pohybu rovnovážného bodu v závislosti na změně cenových relací $\boldsymbol{p}(0)\Rightarrow\boldsymbol{p}(1)$. Nová rovnováha se vytvoří v bodě $q_i^*(0)$. Druhým členem součinu levé strany je vyjádření analogické změny při přechodu $\boldsymbol{p}(1)\Rightarrow\boldsymbol{p}(2)$, tentokrát se však pohybujeme po indiferenční křivce $u(1)$ a nová rovnováha vznikne v bodě $q_i^*(1)$.

Na druhé straně výraz P_{02}^{KL} představuje opět situaci na indiferenční křivce $u(0)$, kde se nějaké jiné kvantity $q_i^{**}(0)$ ustálí v bodě rovnováhy při cenových relacích odpovídajících období "2". Vskutku zde není žádný důvod pro shodu $P_{01}^{KL}\cdot P_{12}^{KL}$ na levé a P_{02}^{KL} na pravé straně (5.19). Okružnost tedy není u funkcionálního cenového indexního čísla splněna.

(F5) Axiom určenosti: Je zřejmé, že výpadek některé z uvažovaných komodit nemá nijak osudný dopad na definiční určenost funkcionálního IČ. To je také vždy definováno, neboť jmenovatele lze ve všech případech interpretovat jako kladnou hodnotu nákladů na opatření komoditní kombinace (ať vezmeme ceny či kvantity jakkoliv).

(F6) Axiom souměřitelnosti: Jestliže změníme měrovou jednotku některé komodity (např. 100-násobkem), pak se ve stejném 100-násobku zvýší i cena za novou jednotku komoditního množství. Současně však dojde k reciproké změně (100-násobnému zmenšení) původní množstevní jednotky, ve které bude vyjádřen fyzický objem komodity. Výsledkem bude tedy hodnota $(100\cdot p_i\cdot\frac{1}{100\cdot q_i})$ shodná s původní v peněžním vyjádření. Je též zřejmé, že tyto změny měrových jednotek se nijak nedotýkají indiferenčních hladin. Test (F6) je tedy splněn.

(F7) Axiom proporcionality: Jestliže všechny ceny vzrostou mezi základním a běžným obdobím ve shodném poměru, tj. $p_i(1)=c\cdot p_i(0)$ pro všechna $i=1,2,....,n$, potom zřejmě nedojde k žádnému posunu rovnovážných bodů na jakékoliv hladině užitku, neboť relativní cenové proporce zůstanou beze změn. Žádná komodita vůči jiné nezlevní ani nezdraží. Tedy

(5.30) $$P_{01}^{KL} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i^*(0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)} = \frac{c \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)} = c \quad ,$$

neboť $q_i(0) = q_i^*(0)$ při nezměněných relacích v poptávce. Stejný výsledek získáme i pro Koňusovo-Paascheho indexní číslo.

Jak je z předchozího patrné, funkcionální indexní čísla jsou nepochybně kvalitním výrazovým prostředkem pro srovnání cenových resp. objemových hladin v situacích, kdy máme dostatek informací k sestrojení příslušných užitkových funkcí. Tím je ostatně také vymezen (dosti omezený) okruh jejich uplatnění, kterým může být jen speciální mikroekonomické prostředí : porovnávání dvou různých spotřebních košů, sledování vývoje reálné příjmové hladiny u jednotlivce nebo u stejnorodě se projevující malé sociální skupiny (rodiny apod.). Použitelnost na vyšších úrovních agregace chování spotřebitele je těžko myslitelná právě pro individuálnost hodnocení téhož spotřebního koše různými jedinci.

Platnost testu symetrie **(F8)** dovolujícího operovat s komoditami v libovolném pořadí je zřejmá.

Ověření testu monotónnosti **(F9)** znamená prozkoumání, zda v případě splnění podmínek

$$p_i(1) \le \tilde{p}_i(1)\,; \; i = 1,2,..,N \qquad \text{bude platit též} \qquad P_{01}^{KL} \le \tilde{P}_{01}^{KL}$$

a tatáž podmínka také pro Koňusovo-Paascheho indexní číslo. Omezíme se na test u P_{01}^{KL} :

Je si třeba uvědomit, že zvětšení některých cen (při nezmenšení ostatních) povede vždy ke zvýšení spotřebitelova výdaje, pokud spotřebitel kupuje ty komodity, u kterých ke zdražení došlo. Ani při přesunu poptávky na nezdražené zboží nemůže nákup oproti původnímu zlevnit. Připomeňme, že určovacím kritériem je udržení užitku na původní indiferenční křivce ${}^0u$. Proto musíme definovat

$$\tilde{P}_{01}^{KL} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tilde{p}_i(1)\, \tilde{q}_i^{\,*}(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)} \quad ,$$

kde bod se souřadnicemi $\tilde{q}_i{}^*(0)$ leží na indiferenční křivce – je to bod B vyznačený na obrázku [5.4]. (Rozpočtové kritérium představuje na obrázku úsečka t´, nikoliv t , s níž nelze dosáhnout užitku ${}^0u$) .

Obecně však nelze zajistit platnost vztahu

(5.31) $$\sum p_i(1) q^*{}_i(0) \le \sum \tilde{p}_i(1) \tilde{q}^*{}_i(0)$$

což je vidět z téhož obrázku, kde v úseku $< P, R >$ je nákup

$$\sum p_i(1) q^*{}_i(0) \quad \text{levnější než nákup} \quad \sum \tilde{p}_i(1) \tilde{q}^*{}_i(0)$$

zatímco v úseku $< P, S >$ platí opačný vztah

$$\sum p_i(1) q^*{}_i(0) \ge \sum \tilde{p}_i(1) \tilde{q}^*{}_i(0) \quad .$$

Pouze za situace, při níž by platilo $\frac{\tilde{p}_1(1)}{p_1(1)} = \frac{\tilde{p}_2(1)}{p_2(1)} = ... = \frac{\tilde{p}_N(1)}{p_N(1)}$,

tzn. pokud by se uskutečnila proporční změna všech cen, platila by v (5.31) rovnost.

Testování monotónnosti vede tedy k zamítnutí **(F9)**. Analogicky by dopadlo testování u P_{01}^{KP}.

Test střední hodnoty **(F10)** pro P_{01}^{KL} vyžaduje vyšetření platnosti podmínky

(5.32) $$Min \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \le P_{01}^{KL} = \frac{\sum p_i(1) q*_i(0)}{\sum p_i(0) q_i(0)} \le Max \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

Všimněme si, že můžeme psát

$$\frac{\sum p_i(1) q*_i(0)}{\sum p_i(0) q_i*(0)} = P_{01}*^{KL} \le P_{01}^{KL} = \frac{\sum p_i(1) q*_i(0)}{\sum p_i(0) q_i(0)} ,$$

přičemž výraz pro $P_{01}*^{KL}$ lze zapsat jako vážený aritmetický průměr

(5.33) $$P_{01}*^{KL} = \sum w_i . \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad , \text{kde} \quad w_i = \frac{p_i(0) q_i*(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) q_j*(0)}$$

Je tomu tak proto, že platí

$$\sum p_i(0) q_i(0) = M(0,0) \le M*(0,0) = \sum p_i(0) q_i*(0) \quad .$$

Protože víme, že platí

$$Min \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \le P_{01}*^{KL} = \frac{\sum p_i(1) q*_i(0)}{\sum p_i(0) q_i*(0)} \le Max \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

platí pro Koňusovo-Laspeyresovo indexní číslo pouze jednostranné omezení

(5.34) $$\min \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \le P_{01}^{KL}$$

S využitím vztahů $\sum p_i(1) q_i(1) = M(1,1) \le M*(1,1) = \sum p_i(1) q_i*(1)$,

$$\frac{\sum p_i(1) q_i(1)}{\sum p_i(0) q_i*(1)} = P_{01}^{KP} \le P_{01}*^{PL} = \frac{\sum p_i(1) q_i*(1)}{\sum p_i(0) q_i*(1)}$$

(5.35) $$Min \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \le P_{01}*^{KL} = \frac{\sum p_i(1) q_i*(1)}{\sum p_i(0) q_i*(1)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) q_i*(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_i(0) q_i*(1)} . \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \le Max \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

bychom podobně předchozímu odvodili nerovnost

(5.36) $$P_{01}^{KP} \le \max \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad .$$

Pro Koňusovo-Paascheho indexní číslo platí opět jen jednostranné omezení (5.36) shora.

Ani testu (**F11)** Koňusova indexní čísla obecně nevyhovují. Zapíšeme-li např. P_{01}^{KL} po příslušných změnách jednotek cen a kvantit jako

(5.37)
$$P_{01}{}^{*KL} = \frac{\sum_{i=1}^{N} c.p_i(1)dq_i{}^*(0)}{\sum_{i=1}^{N} c.p_i(1)bq_i(0)}$$

je zřejmé, že dílčí krácení konstantou c nevede k původnímu P_{01}^{KL}. Podotkněme, že při posuzování, zda máme uplatnit stejné či různé konstanty b, d není rozhodující značení $q_i{}^*(0)$ v čitateli (5.37) : nula v závorce se vztahuje k hladině užitku ${}^0u$, nikoliv k časovému období – rovnovážný bod daný čitatelem výrazu P_{01}^{KL} je určen souřadnicemi odpovídajícími poměrům cen v běžném období „1“. Stejný závěr bychom učinili ve vztahu k P_{01}^{KP}.

Konečně, pokud jde o splnění axiomu invariance při mizející komoditě (**F12)** , lze zapsat

(5.38) při $q_N(0), q_N(1) \to 0$
$$\lim P_{01}^{KL} = \lim \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i{}^*(0)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} p_i(1)q_i{}^*(0)}{\sum_{i=1}^{N-1} p_i(0)q_i(0)}$$

Nedochází-li k žádnému pohybu cen, nemění se poloha rovnovážných bodů. Budou-li jejich $N-té$ souřadnice $q_N(0), q_N(1)$ konvergovat k nule, projeví se to úbytkem posledních členů v čitateli i jmenovateli (5.38) . Obdobná tendence se projeví též u P_{01}^{KP}.

Dále se budeme zabývat možnými zobecněními Koňusových kvantových indexní čísel.

Základní poznatky přinesli v tomto směru R.G.D.Allen, P.Samuelson, R.Pollak, S.Swamy a E.Diewert. Některé navržené konstrukty nesou příslušná autorská pojmenování: **Pollakův, Malmquistův** a **Allenův kvantový** (též ***množstevní*** nebo ***objemový***) **index.** Koňusova kvantová indexní čísla definovaná v (5.5) a (5.6) jsou vesměs jejich speciálními příklady nebo jsou použita v konstrukci těchto složitějších indexů.

Nejprve uvedeme Pollakův-Koňusův kvantový (objemový) index, jehož obsahem je podíl objemu výdajů běžného a základního období a Koňusova cenového indexního čísla

Definice 5.5

Pollakův-Koňusův kvantový (objemový) index [Pollak 1971] je definován jako

(5.39) $$Q_{01}^{PK}(\boldsymbol{q}^*(t)) = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i(0)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i^*(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)q_i^*(t)}} = \frac{\dfrac{M(1,1)}{M(0,0)}}{\dfrac{M^*(1,t)}{M^*(0,t)}} = \frac{\dfrac{E(u(\boldsymbol{q}(1)); p(1))}{E(u(\boldsymbol{q}^*(t)); p(1))}}{\dfrac{E(u(\boldsymbol{q}(0)); p(0))}{E(u(\boldsymbol{q}^*(t)); p(0))}},$$

V poslední z těchto definičních forem je užita notace s výdajovou funkci $E(u(\boldsymbol{q}(t)), \boldsymbol{p}(t.))$, jejíž vlastnosti jsou popsány např. v [xxx][2]. Označení "t" v argumentech cenového a množstevního vektoru zastupuje příslušnost k období, v němž jsou měřeny ceny či kvantity; toto období však nemusí být nutně jen základní nebo běžné. Je patrné, že definice $Q_{01}^{PK}(\boldsymbol{q}^*(t))$ závisí na referenčním vektoru $\boldsymbol{q}^*$, který se v ní vyskytuje.

Zavedení Pollakova-Koňusova kvantového indexu vychází z analogie z jednokomoditního případu, kdy je možné psát objemový index pomocí cenového jako

(5.40A) $${}^{(1)}\widetilde{Q}_{01}(1) = \frac{\dfrac{p(1).\,q(1)}{p(0).\,q(0)}}{\dfrac{p(1)}{p(0)}}$$

Pro obecnou N – komoditní situaci tak obdobně dostaneme

(5.40B) $${}^{(N)}\widetilde{Q}_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{p_i(1)q_i(1)}{p_i(0)q_i(0)}}{{}^{(N)}\widetilde{P}_{01}},$$

přičemž jednoznačnost bude dána až po konkrétní volbě cenového indexu ${}^{(N)}\widetilde{P}_{01}$.

Konkretizujeme-li volbu časového období t v cenovém indexu ${}^{(N)}\widetilde{P}_{01}$ tak, že vezmeme přímo základní, resp. běžné období, získáme – pro případ cen $\boldsymbol{p}(0)$ - Koňusův-Paascheho kvantový index

$$Q_{01}^{KP} = \frac{E(u(\boldsymbol{q}(1), \boldsymbol{p}(1))}{E(u(\boldsymbol{q}^*(1), \boldsymbol{p}(0))} = \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)}$$

- pro případ vzetí $\boldsymbol{p}(1)$ dostaneme Koňusův-Laspeyresův kvantový index

$$Q_{01}^{KL} = \frac{E(u(\boldsymbol{q}^*(0), \boldsymbol{p}(1))}{E(u(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{p}(0))} = \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)}$$

[2] Všimněme si, že v definici výdajové funkce je psán (jako argument užitkové funkce) nejprve vektor kvantit $\boldsymbol{q}$, pak cenový vektor $\boldsymbol{p}$, zatímco v dříve zavedeném symbolu $M(.\,,.)$ je tomu naopak

Oba tyto indexy však mohou být zobecněny i jiným způsobem, než je Pollakův návrh.

K formulaci dalšího zobecňujícího indexu, Malmquistova kvantového indexu, je nutné zavést pojem ***distanční*** (někdy též ***deflační***) funkce[3]. ***Deflační*** funkce definovaná ve vztahu k užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$ a k danému (*referenčnímu)* komoditnímu vektoru $\boldsymbol{q}$ je dána takovou hodnotou konstanty $k > 0$, kterou je třeba vynásobit (tj. proporčně zvětšit nebo zmenšit) daný referenční vektor $\boldsymbol{q}$, aby hodnota $u(\boldsymbol{q})$ spadla přesně na indiferenční křivku odpovídající hladině užitku ${}^0u$. Vyslovme definici

Definice 5.6 Distanční (*deflační*) funkce [R.W.Shephard 1953/1971]

Mějme pevně dánu hladinu užitku ${}^0u$ a (přímou) užitkovou funkci $u(\boldsymbol{q})$, v níž jsou hodnoty komoditního vektoru $\boldsymbol{q}(t)$ získány v čase t. Pak definujeme

(5.41) $$D({}^0u, \boldsymbol{q}(t)) \equiv Max_k \left\{ k \,; u(\boldsymbol{q}(t)/k) \geq {}^0u ; k > 0 \right\}$$

Deflační funkce definovaná ve vztahu k užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$ a danému (*referenčnímu*) komoditnímu vektoru $\boldsymbol{q}$ je dána takovou hodnotou konstanty $k > 0$, kterou je třeba vynásobit (tj. proporčně zvětšit nebo zmenšit) daný referenční vektor $\boldsymbol{q}$, aby spadl přesně na indiferenční křivku odpovídající hladině užitku $u(\boldsymbol{q})$.

Poznámka: Hodnota distanční funkce, jak patrno z definice (5.41) informuje o tom, zda je uvažovaný komoditní vektor $\boldsymbol{q}(t)$ zapotřebí proporcionálně zvětšit – při $k < 1$- nebo naopak je ho možno proporcionálně zmenšit – při $k > 1$, abychom s ním dosáhli právě velikost užitku ${}^0u$. V případě neutrální (jedničkové) hodnoty distanční funkce je tento vektor právě tak „postačující" k získání hladiny užitku ${}^0u$. To ovšem neznamená, že by byly všechny statky využity právě v minimálních nutných množstvích (jde o proporční změnu $\boldsymbol{q}(t)$).

Hodnoty distanční funkce tedy leží v rozmezí $(0, +\infty)$, přičemž hodnoty $D({}^0u, \boldsymbol{q}(t))$ větší než 1 znamenají, že komodity jsou nasazeny ve „zbytečně velkých množstvích", zatímco hodnoty menší než 1 indikují „nedostatečná" množství statků pro dosažení požadované úrovně ${}^0u$. V takto zavedeném kontextu je pak

Definice 5.7

Malmquistův kvantový (objemový) index [S. Malmquist 1953] definován jako

(5.42) $$Q_{01}{}^M(\boldsymbol{q}) = \frac{D(u(\boldsymbol{q}); \boldsymbol{q}(1))}{D(u(\boldsymbol{q}); \boldsymbol{q}(0))} ,$$

kde $D(u, \boldsymbol{q}(t)) \equiv Max_k \{k; u(\boldsymbol{q}(t)/k) \geq u; k > 0 \}$ je deflační/distanční funkce, která odpovídá užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$. Znamená to tedy, že

Výraz $D(u(\boldsymbol{q}); \boldsymbol{q}(1))$ znamená nejvyšší hodnotu k, kterou je třeba deflovat vektor kvantit $\boldsymbol{q}(1)$, aby se dostal na hranici ***užitkové množiny vstupů*** $L(u(\boldsymbol{q})) = \{z, u(z) \geq u(\boldsymbol{q})\}$[4] odpovídající referenčnímu vektoru kvantit $\boldsymbol{q}(1)$,

[3] Pojem distanční funkce zavedl (v kontextu dalších pojmů teorie produkce) R.W.Shephard v Theory of Cost and Production Functions 1953/1970.

[4] V angličtině jde o „***utility input set***" jako obdoby „***production input set***" v produkčním kontextu.

Výraz $D(u(\boldsymbol{q});\boldsymbol{q}(0))$ znamená nejvyšší hodnotu k, kterou je třeba deflovat vektor kvantit $\boldsymbol{q}(0)$, aby spadl na hranici ***užitkové množiny vstupů*** $L(u(\boldsymbol{q})) = \{z, u(z) \geq u(\boldsymbol{q})\}$ odpovídající referenčnímu vektoru kvantit $\boldsymbol{q}(0)$.

Malmquistův index je definován jako podíl obou těchto hodnot. Jeho nevýhodou je tedy, podobně jako u jiných funkcionálních indexních čísel, závislost na nepozorovatelné užitkové funkci $u(\boldsymbol{q})$. Diewert v [6] ukázal, že také pro tento kvantový index je možné odvodit dolní a horní hranici podobně jako pro Koňusova indexní čísla a že tento objemový index splňuje podmínky obdobné testu střední hodnoty (F10) formulovaného pro množstevní indexní čísla. Platí totiž nerovnosti[5]

$$\min_i \left\{\frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right\} \leq Q_{01}{}^M(\boldsymbol{q}) \leq \max_i \left\{\frac{q_i(1)}{q_i(0)}\right\} \tag{5.43}$$

Předpoklad o výdajově minimalizujícím chování spotřebitele není nezbytný ani k definici samotného Malmquistova kvantového indexu ani k zajištění platnosti omezení (5.43). Abychom však mohli dále stanovit hranice těsněji vymezující hodnoty Malmquistova kvantového indexu, potřebujeme již předpokládat, že spotřebitel minimalizuje své výdaje ve vztahu k dosahovanému užitku a současně musíme doplnit předpoklad o tom, že vektor $\boldsymbol{q}(t)$ (jinak určený obecným obdobím t) musí být buď $\boldsymbol{q}(0)$ nebo $\boldsymbol{q}(1)$. Za těchto podmínek platí:

$$Q_{01}{}^M(q(1)) \geq \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(1)q_i(0)} = Q_{01}{}^P \quad \text{a také} \quad Q_{01}{}^M(q(0)) \leq \frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} = Q_{01}{}^L \tag{5.44}$$

tzn. hodnota kvantového Malmquistova indexu je zdola omezená Paascheho a shora Laspeyresovým množstevním indexem. Diewert rovněž ukázal, že platí-li hypotéza o výdajově minimalizačním chování spotřebitele, existuje $\lambda \in <0,1>$ takové, že $Q_{01}{}^M[\lambda.\boldsymbol{q}(0) + (1-\lambda).\boldsymbol{q}(1)]$ leží mezi $P_{01}{}^P$ a $P_{01}{}^L$. Tím je řečeno, že Paascheho, resp. Laspeyresovo kvantové indexní číslo vymezují Malmquistův index do intervalu pro nějakou indiferenční hladinu indexovanou množstevním vektorem , který je váženým průměrem s vahami λ a $1-\lambda$ dvou pozorovatelných vektorů $\boldsymbol{q}(0)$ resp. $\boldsymbol{q}(1)$.

<u>Definice 5.8</u>

Allenův kvantový (objemový) index [Allen 1949] je definován v kontextu přímé užitkové funkce $u(\boldsymbol{q})$ a k ní příslušné výdajové funkce $E(u(\boldsymbol{q}(*)), \boldsymbol{p}(t))$ jako

$$Q_{01}{}^A = \frac{E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1)); \boldsymbol{p}(t))}{E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0)); \boldsymbol{p}(t))} \quad , \tag{5.45}$$

kde $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1)), \boldsymbol{p}(1))$ je výdajová funkce odpovídající užitkové funkci s komoditními množstvími $\tilde{q}_1(1), \tilde{q}_2(1), ..., \tilde{q}_N(1)$ a podobně $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0)), \boldsymbol{p}(0))$ je hodnota výdajové funkce příslušná k užitkové funkci s komoditami v množstvích $\tilde{q}_1(0), \tilde{q}_2(0), ..., \tilde{q}_N(0)$ [6]. Index je tedy definován jako podíl dvou výdajových funkcí, z nichž v jedné se uplatňují množství statků

[5] Jde o obdobnou nerovnost – vyjádřenou pro *poměry množství* – jako je podmínka testu střední hodnoty **(F10)**.

[6] V případě, že se ceny změní z $\boldsymbol{p}(0)$ na $\boldsymbol{p}(1)$, dosazujeme $\tilde{\boldsymbol{q}}(1) = \boldsymbol{q}^*(1), \tilde{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}(0)$, v opačném případě – při změně cen z $\boldsymbol{p}(1)$ na $\boldsymbol{p}(0)$ - dosazujeme $\tilde{\boldsymbol{q}}(1) = \boldsymbol{q}(1), \tilde{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{q}^*(0)$,

nakoupená v běžném období, ve druhé množství statků nakoupená v základním období. Vše uvažujeme v situacích, kdy se spotřebitel změnami nákupů přizpůsobuje cenovým změnám.

Definice Allenova indexu je tedy spojena s trojicí vektorů $\tilde{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{\boldsymbol{q}}(1), \boldsymbol{p}(t)$, přičemž určení cenového vektoru $\boldsymbol{p}(t)$ není blíže specifikováno.

Poznámka 5.4 Jestliže do Allenova kvantového indexu (5.45) dosadíme za cenový vektor $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)$, obdržíme Koňusovo-Paascheho kvantové indexní číslo ${Q_{01}}^{KP}$; podobně jestliže vezmeme $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(1)$, obdržíme Koňusův-Laspeyresův kvantový index. ${Q_{01}}^{KL}$.

Je totiž bezprostředně vidět, že po těchto dosazeních budeme mít

$$(5.46A) \qquad {Q_{01}}^{A}(\boldsymbol{p}(0)) = \frac{E(u(\boldsymbol{q}^*(1), \boldsymbol{p}(0))}{E(u(\boldsymbol{q}(0), \boldsymbol{p}(0))} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i^*(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot q_i(0)} = \frac{M^*(0,1)}{M(0,0)} = Q_{01}^{KL} \qquad ,$$

a analogicky

$$(5.46B) \qquad {Q_{01}}^{A}(\boldsymbol{p}(1)) = \frac{E(u(\boldsymbol{q}(1), \boldsymbol{p}(1))}{E(u(\boldsymbol{q}^*(0), \boldsymbol{p}(1))} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{n} p_i(1) \cdot {q_i}^*(0)} = \frac{M(1,1)}{M^*(1,0)} = Q_{01}^{KP} \qquad ,$$

„Neutrální“ hodnota Allenova indexu (5.45) je zřejmě 1 – bude jí dosaženo právě tehdy, jestliže oba množstevní vektory $\tilde{\boldsymbol{q}}(0), \tilde{\boldsymbol{q}}(1)$ poskytnou stejný užitek. Za této situace a vzhledem k ryzí monotónnosti přímé užitkové funkce i výdajové funkce v užitku ${}^0u$ [7] bude platit $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1); \boldsymbol{p}) = E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0); \boldsymbol{p})$. Jestliže $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1); \boldsymbol{p}) > E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0); \boldsymbol{p})$, pak je dle (5.45) hodnota Allenova indexu větší než 1, naopak při $E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(1); \boldsymbol{p}) < E(u(\tilde{\boldsymbol{q}}(0); \boldsymbol{p})$ dává tento index hodnotu menší než 1. Hodnota Allenova indexu tak přímo indikuje, zda je komoditní kombinace $\tilde{\boldsymbol{q}}(0)$ více či méně „užitkotvorná“ než komoditní kombinace $\tilde{\boldsymbol{q}}(1)$.

Za zmínku dále stojí, že Allenův kvantový index splňuje „kvantový protějšek“ testu záměny faktorů **(F3)** , tj. platí pro něj vztah

$$(5.47) \qquad {Q_{01}}^{A}(\boldsymbol{p}(t)).{Q_{10}}^{A}(\boldsymbol{p}(t)) = 1 \qquad , \qquad t = 0{,}1 .$$

Z (5.46A-B), jakož i z obou dříve uvedených Koňusových nerovností vyslovených pro kvantová indexní čísla (5.9) a (5.10),dále plyne, že

$$(5.48A) \qquad {Q_{01}}^{A}(\boldsymbol{p}(0)) = Q^{KL} \le \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) q_i(0)} = {Q_{01}}^{L}$$

a podobně

[7] Výdajová funkce je rostoucí v užitku, tzn. pro ${}^0u <{}^1 u$ platí $E({}^0u; \boldsymbol{p}) < E({}^1u; \boldsymbol{p})$

(5.48B) $$Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{p}(1)) = Q^{KP} \geq \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)q_i(0)} = Q_{01}{}^{P}$$

Také pro Allenův kvantový index (při dosazeních $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(0)$, resp. $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(1)$) tedy existují hranice omezující jeho hodnotu zdola a shora. Toto zjištění má svůj význam, neboť hodnota $Q_{01}{}^{A}$ (jinak nepozorovatelné veličiny závisející na volbě užitkové funkce $u(\boldsymbol{q})$) je takto aspoň jednostranně omezena (z pozorování určitelnými) hodnotami, které na tvaru užitkové funkce nezávisí.

Diewert [1981] s využitím dřívějších výsledků Pollaka [1971] a Samuelsona-Swamyho [1974] dále ukázal, že jestliže je užitková funkce ***neoklasická***[8] , pak pro všechny *kladné vektory cen* a ***kladné vektory kvantit*** platí vztahy

(4.49) $$Q_{01}{}^{P} \leq Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{p}(t)) = Q_{01}{}^{PK}(\boldsymbol{q}(t)) = \frac{u(1)}{u(0)} \leq Q_{01}{}^{L}$$

Takže, jestliže je užitková funkce *neoklasická*, pak se *Allenův kvantový index* rovná (pro všechny cenové referenční vektory $\boldsymbol{p}(t)$) *Pollakovu-Koňusovu* kvantovému indexu (pro všechny referenční vektory kvantit $\boldsymbol{q}(t)$) a oba se současně rovnají podílu $u(1)/u(0)$. Navíc jsou v takovémto případě jak Allenův, tak *Pollakův-Koňusův* index zdola omezeny *Paascheho* kvantovým indexem $Q_{01}{}^{P}$ a shora omezeny *Laspeyresovým* kvantovým indexem $Q_{01}{}^{L}$.

V obecném případě (není-li užitková funkce *neoklasická*), ukázal Diewert, že existuje $\lambda \in <0,1>$ takové, že $Q_{01}{}^{PK}(\lambda.\boldsymbol{q}(0) + (1-\lambda).\boldsymbol{q}(1))$ leží mezi $Q_{01}{}^{P}$ a $Q_{01}{}^{L}$ a existuje též (obecně jiné) $\lambda^* \in <0,1>$ takové, že, $Q_{01}{}^{A}(\lambda.\boldsymbol{p}(0) + (1-\lambda).\boldsymbol{p}(1))$ též leží mezi $Q_{01}{}^{P}$ a $Q_{01}{}^{L}$. Znamená to tedy, že (prosté) Paascheho a Laspeyresův kvantové indexy, (které jsou na rozdíl od $Q_{01}{}^{KP}$, $Q_{01}{}^{KL}$ a $Q_{01}{}^{A}$ založeny na pozorovatelných veličinách), ohraničují zdola i shora Koňusovy kvantové indexy i Allenův index, pokud volíme příslušné referenční vektory vhodně mezi $\boldsymbol{q}(0)$ a $\boldsymbol{q}(1)$, resp. mezi $\boldsymbol{p}(0)$ a $\boldsymbol{p}(1)$.

V (5.30) jsme již ukázali, že oba *Koňusovy cenové indexy* $P_{01}{}^{KP}$, $P_{01}{}^{KL}$ vyhovují podmínce Fisherova testu proporčnosti (F7): jestliže $\boldsymbol{p}(1) = c.\boldsymbol{p}(0)$, pak $P_{01}{}^{KL} = P_{01}{}^{KP} = c$. Je to dáno tím, že výdajová funkce je *lineárně homogenní v cenách.* Obdobnou podmínku však nelze uplatnit ve vztahu ke kvantitám: Ani Polakův-Koňusův kvantový index (5.39) ani Allenův kvantový index (5.45) nejsou lineárně homogenní, nelze tedy obecně psát (při $\boldsymbol{q}(1) = c.\boldsymbol{q}(0)$ s kladným skalárem c)

[8] O užitkové funkci řekneme, že je *neoklasická*, jestliže je *kladná*, *spojitá* a *lineárně homogenní*.

$$Q_{01}{}^{PK}(\boldsymbol{q}^{*}) = \frac{\dfrac{E(u(\boldsymbol{q}^{c}(1)); p(1))}{E(u(\boldsymbol{q}^{*}(t)); p(1))}}{\dfrac{E(u(\boldsymbol{q}(0)); p(0))}{E(u(\boldsymbol{q}^{*}(t)); p(0))}} = c. \qquad ,$$

ani $$Q_{01}{}^{A}(\boldsymbol{q}^{c}(1)) = \frac{E(u(\boldsymbol{q}^{c}(1)); \boldsymbol{p}(t))}{E(u(\boldsymbol{q}(0)); \boldsymbol{p}(t))} = c.\frac{E(u(\boldsymbol{q}(0)); \boldsymbol{p}(t))}{E(u(\boldsymbol{q}(0)); \boldsymbol{p}(t))} = c$$

To je mj. důvodem pro vyvození Malmquistova indexu, který tuto vlastnost má.