

6 Neostatistická koncepce – Theilova indexní čísla

Nizozemský matematik a ekonometr 50. - 70. let Henri Theil použil pro návrh indexních čísel postup, který vychází ze statistické (regresní) koncepce. Jednotlivé kroky tohoto postupu zde vyložíme.

Předpokládejme, shodně jako dříve, že pracujeme se souborem $N \geq 2$ komodit, o kterých registrujeme informace o cenách a kvantitách v průběhu nějakého časového období délky $T \geq 2$. V případě cen dostupná pozorování vytvářejí maticovou strukturu v podobě (kladných) $T \times N$ prvků matice $P_{T \times N}$ ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} p_1(1) & p_1(2) & p_1(3) & \cdots & p_1(N) \\ p_2(1) & p_2(2) & p_2(3) & \cdots & p_2(N) \\ p_3(1) & p_3(2) & p_3(3) & \cdots & p_3(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_T(1) & p_T(2) & p_T(3) & \cdots & p_T(N) \end{pmatrix}.$$

Obdobný požadavek klademe na dostupnost informací o kvantitách, které požadujeme v analogickém tvaru matice Q o rozměrech $T \times N$. Každý řádek matic P a Q tedy představuje informaci o cenách resp. kvantitách celého komoditního souboru v nějakém pevném čase t^* ($t^* = 1, 2, \dots, T$). Smyslem konstrukce hledaného indexního čísla je pak nalézt (agregací přes soubor komoditních cen resp. kvantit) vektory cen p a kvantit q pro každý časový okamžik $t = 1, 2, \dots, T$, tedy sestřít vektory $p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_T)'$ a $q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_T)'$ tak, aby každý z nich (dle zvoleného kritéria) vystihoval vývoj celkové cenové resp. množstevní úrovně v daném období.

6.1 Odvození neostatistických indexních čísel

Nejprve popíšeme postup, který povede ke konstrukci vektoru generujícího cenová indexní čísla p pro daný okruh období (popř. územních jednotek) založený na informacích, které máme k dispozici v podobě matic pozorování cen P a kvantit Q .

A) Při konstrukci vektoru p se omezíme na lineární případ (jako nejtýpčtější) vztahu mezi p a P . Budeme tedy hledat vektor p (řádkový o délce T) jako lineární kombinaci řádků matice P

$$(6.1) \quad p = P \cdot \alpha,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ je (dosud neznámý, sloupcový) vektor délky N . Jestliže interpretujeme t -tý řádek matice P jako bod v N – rozměrném Eukleidovském prostoru (jde o vektor cen komodit v čase t), pak hledáním vektoru α usilujeme o nalezení nadroviny v E_N , která prochází počátkem a (v dále definovaném smyslu) aproximuje jednotlivé řádkové vektory matice P . Poté sestrojíme projekce všech T takových N – rozměrných bodů (řádků matice P) na tuto nadrovinu. Za vektor cenových indexních čísel p pak vezmeme délky takto projektovaných bodů/vektorů od počátku souřadnic.

Parametrickým vyjádřením vyrovnávající nadroviny budou vztahy (pro $k = 1, 2, \dots, N$)

$$(6.2) \quad p_k = \beta_k \cdot p \quad (\beta_k \text{ kladné}).$$

Odchyly „pozorovaných“ cen $p_k(t)$ od jejich lineární aproximace $\beta_k \cdot p(t)$ označíme jako

$$(6.3) \quad u_k(t) = p_k(t) - \beta_k \cdot p(t).$$

Tyto dohromady vytvářejí matici cenových diferencí U , která je rovněž typu $T \times N$. V maticovém zápisu s vyjádřením dimenzí

$$(6.4) \quad U_{T \times N} = P_{T \times N} - p_{T \times 1} \cdot \beta'_{1 \times N}$$

(připomeňme, že p je sloupcový vektor typu $T \times 1$ a β sloupcový vektor typu $N \times 1$).

Jednoduchou substitucí z (6.1) pak dostáváme

$$(6.5) \quad U_{T \times N} = P - P \cdot \alpha \cdot \beta' = P(I_N - \alpha \cdot \beta'),$$

kde I_N je jednotková matice řádu N .

Úlohou, která bude dále řešena, je minimalizace matice U (v nějakém maticovém smyslu) v závislosti na parametrech β a α . Ze vztahu (6.5) je současně zřejmé, že takovéto řešení nebude jednoznačné, nýbrž bude určeno až na multiplikační konstantu $c > 0$, neboť zřejmě přenásobené vektory $c \cdot \beta$ a $\frac{1}{c} \cdot \alpha$ (resp. $\frac{1}{c} \cdot \beta$ a $c \cdot \alpha$) budou stejně tak vyhovovat minimalizační podmínce jako původní vektory β , α .

Nyní přistoupíme k využití informace o kvantitách obsažených v matici Q : Nejprve vytvoříme matici $H = Q' \cdot Q$, která je zřejmě rozměru $N \times N$. Tato matice je zřejmě symetrická a pozitivně semidefinitní a přísluší k ní kvadratická forma $x'Q'Qx$ pro nějaký N – složkový vektor x , ne identicky nulový. Prvky matice H jsou nezáporné, neboť prvky Q (jde o kvantity) jsou rovněž nezáporné.

Za minimalizační kritérium nyní zvolíme výraz

$$(6.6) \quad \text{Min } \text{Tr}(HU'U) = \text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[h_{ij} \left(\sum_{t=1}^T u_i(t) \cdot u_j(t) \right) \right] = F(\alpha, \beta),$$

tedy stopu matice $HU'U$. Minimalizaci provádíme podmíněně vzhledem k prvkům vektorů α , β . Předmětem dalších úvah bude tedy určení podmínek pro α , β , za kterých je výraz (6.6) minimální. Postup rozdělíme do několika kroků:

1) Nejprve upravíme výraz pro $U'U$ na základě znalosti generujících prvků. Postupně dostaneme:

$$(6.7)$$

$$U'U = [P' - \beta \cdot \alpha' \cdot P'] \cdot [P - P \cdot \alpha \cdot \beta'] = P'P - \beta \cdot \alpha' \cdot P' \cdot P - P' \cdot P \cdot \alpha \cdot \beta' + \beta \cdot \alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha \cdot \beta',$$

kde poslední člen můžeme zapsat jako $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta \cdot \beta')$, neboť $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha)$ je skalární hodnota.

Vynásobíme-li vztah (6.7) zleva maticí H a vyjádříme-li stopu součinnové matice, dostaneme

$$(6.8) \quad \text{Tr}(H \cdot U' \cdot U) = \text{Tr}[H \cdot P' \cdot P] - 2 \cdot \text{Tr}[H \cdot \beta \cdot \alpha' \cdot P' \cdot P] + (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot \text{Tr}[\beta' \cdot H \cdot \beta].$$

Dále, s přihlédnutím k tomu, že platí $\text{Tr}[(H \cdot \beta) \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P)] = \text{Tr}[(\alpha' \cdot P' \cdot P) \cdot (H \cdot \beta)]$, přičemž výraz na pravé straně této rovnosti je skalár, a proto, že rovněž stopa $\text{Tr}[\beta \cdot H \cdot \beta']$ je skalár, upravíme (6.8) na

$$(6.8A) \quad \text{Tr}(H \cdot U' \cdot U) = \text{Tr}[H \cdot P' \cdot P] - 2 \cdot \alpha' \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta + (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta).$$

2) Dále vyšetříme, kdy tento výraz nabývá (v závislosti na α a β) svého minima. Jak známo, nutnou podmínkou extrému je, aby obě parciální derivace (vektorově zapsané) byly nulové, tj. platnost relací

$$(6.9A) \quad \frac{\partial \text{Tr}(H \cdot U' \cdot U)}{\partial \alpha} = -2 \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta + 2 \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot P' \cdot P \cdot \alpha = 0 \quad \text{a podobně}$$

$$(6.9B) \quad \frac{\partial \text{Tr}(H \cdot U' \cdot U)}{\partial \beta} = -2 \cdot H \cdot P' \cdot P \cdot \alpha + 2 \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot H \cdot \beta = 0.$$

Tuto soustavu $2N$ rovnic pro $2N$ neznámých α a β upravíme zkrácením dvěma, přičemž dále první rovnici vynásobíme zleva maticí H a druhou rovnici zleva maticí $-P'P$. Po těchto úpravách obdržíme

$$(6.10A) \quad -H \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta + H(\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot P' \cdot P \cdot \alpha = 0 \quad \text{a podobně}$$

$$(6.10B) \quad P' \cdot P \cdot H \cdot P' \cdot P \cdot \alpha - P' \cdot P \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot H \cdot \beta = 0.$$

Z (6.9A) však dále plyne, že $(\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot P'P \cdot \alpha = P'P \cdot H \cdot \beta$, čehož využijeme tak, že do druhého členu (6.10B) dosadíme za $P'P \cdot H \cdot \beta$ zmíněný výraz. (To lze beztestně provést, neboť $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha)$ je skalár.) Rovnice (6.10B) tak přejde na tvar

$$(6.10B^*) \quad P'P \cdot H \cdot P'P \cdot \alpha - (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot P' \cdot P \cdot \alpha = 0,$$

resp. dále na

$$(6.11) \quad P'P[H \cdot P' \cdot P - (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot I_n] \cdot \alpha = 0,$$

neboť také $\beta' \cdot H \cdot \beta$ je skalár.

3) Nyní provedeme obdobnou substituci ve vztahu k (6.10A). Z (6.9B) totiž plyne, že $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot H \cdot \beta = H \cdot P' \cdot P \cdot \alpha$. Nahradíme tedy v druhém členu levé strany (6.10A) výraz $H \cdot P' \cdot P \cdot \alpha$ a dostaneme

$$(6.10A^*) \quad H \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta - (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot H \cdot \beta = 0, \quad \text{neboli}$$

$$(6.12) \quad H \cdot [P' \cdot P \cdot H - (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot I_n] \cdot \beta = 0.$$

Skalární výraz $(\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta)$ vyskytující se jak v (6.11), tak v (6.12) nyní označíme jako λ^2 a (6.11) můžeme vyjádřit buď ve tvaru

$$(6.13A) \quad P' \cdot P \cdot [H \cdot P' \cdot P - \lambda^2 \cdot I_n] \cdot \alpha = 0, \quad \text{nebo také jako}$$

$$(6.13B) \quad P' \cdot P \cdot [H - \lambda^2 \cdot I_n] \cdot P' \cdot P \cdot \alpha = 0.$$

Tytéž úpravy učiníme s výrazem (6.12) a dostaneme obdobně dvojici vztahů:

$$(6.14A) \quad H \cdot [P' \cdot P \cdot H - \lambda^2 \cdot I_n] \cdot \beta = 0, \quad \text{resp.}$$

$$(6.14B) \quad H \cdot [P' \cdot P - \lambda^2 \cdot I_n] \cdot H \cdot \beta = 0.$$

4) Nyní ještě jednou užitíme vztah (6.9A), který po zkrácení 2 vynásobíme α' zleva. Dostaneme:

$$(6.15) \quad (\beta' \cdot H \cdot \beta) \cdot (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) = \alpha' \cdot P' \cdot P \cdot H \cdot \beta.$$

Odtud vidíme, že minimum výrazu $Tr(H \cdot U' \cdot U)$ lze vyjádřit jako

$$(6.16) \quad \underset{\alpha, \beta}{\text{Min}} Tr[H \cdot U' \cdot U] = Tr(H \cdot P' \cdot P) - (\alpha' \cdot P' \cdot P \cdot \alpha) \cdot (\beta' \cdot H \cdot \beta) = Tr(H \cdot P' \cdot P) - \lambda^2.$$

5) Nyní rozebereme možnosti, kdy platí podmínka (6.13B): Aby platila, musí být $P' \cdot P \cdot \alpha = 0$ anebo $P' \cdot P \cdot \alpha$ je vlastní vektor matice $P' \cdot P \cdot H$ a současně λ^2 je vlastní číslo této matice.

Z hlubších poznatků teorie matic (konkrétně z Perronovy věty) vyplývá, že maximální vlastní číslo matice, která má pouze kladné prvky, je vždy kladné a složky k němu příslušného vlastního vektoru jsou rovněž kladné. (Pro nezápornou a nerozložitelnou matici platí obdobné Frobeniovo zobecnění.) Ve vztahu k hledanému vektoru p tak máme zaručeno, že $P' \cdot P \cdot \alpha$ může být interpretován jako vektor indexních čísel.

Uvedené věty a vlastnosti aplikujeme na matice PHP' , $P'PH$ a $HP'P$. Matice PHP' je symetrická (v důsledku symetrie H) a je pozitivně semidefinitní, protože $P \geq 0$. Všechny tyto tři matice mají nezáporná vlastní čísla, přičemž největší z nich (co do absolutní hodnoty) je jednoduchým kladným kořenem charakteristického polynomu, který je stejný pro všechny tři matice. K tomuto vlastnímu číslu příslušné (u různých matic) vlastní vektory jsou různé, avšak všechny mají kladné všechny složky.

6) Vrátime-li se k výrazu pro stopu matice $[HU'U]$, dostaneme

$$(6.17) \quad Tr[HU'U] = Tr[HP'P] - \lambda^2.$$

Aby tedy byl výraz $Tr[HU'U]$ minimální, musí být λ^2 maximální (stopa $Tr(HP'P)$ je pevná hodnota nezávislá na α, β). Volíme tedy λ^2 jako největší vlastní číslo matice $P'PH$ resp. $HP'P$ a $P'P\alpha$ je vlastní vektor (nezáporných složek) příslušný λ^2 . Poznamenejme však, že minima $Tr[HU'U]$ v (6.16) nedocílíme, když platí $P'P\alpha = H\beta = 0$ - viz (6.13B) resp. (6.14B).

Označíme-li $(HP'P - \lambda^2 I_N) \cdot \alpha = d$, pak platí $P'Pd = 0$ a platí dvě možnosti

- a) buď $d = 0$ nebo b) matice $P'P$ je singulární.

Nastává-li případ a), potom α je vlastním vektorem matice $HP'P$ příslušným kořeni λ^2 .

Nastane-li naopak případ b), je možné volit α i jinak. Pokud je $P'P$ je singulární, zvolíme α tak, že odpovídá charakteristickému číslu matice $HP'P$.

Postačující podmínkou minimalizace je platnost vztahu $(\alpha P'P\alpha) \cdot (\beta' H \beta) = \lambda^2$, kde vektory α, β současně vyhovují nutným podmínkám (6.13A-B) i (6.14A-B).

Tím platí i v tomto případě podmínka (6.15), stejně jako nutná podmínka (6.10A-B) pro existenci extrému. Určení α tedy není jednoznačné, ale každé takové α je optimální.

Obdobně z podmínky (6.14A) zvolíme vektor β tak, aby byl vlastním vektorem matice $P'PH$ a odpovídal témuž vlastnímu λ^2 . Tím je splněn požadavek na minimalizaci kvadratické formy cenových odchylek i pro případ, kdy $P'P$ je singulární.

Vektor $p = P\alpha$ je určen jednoznačně až na multiplikativní skalár. Ze vztahu $P'Pd = 0$ plyne, že

$$(6.18) \quad d'P'Pd = 0 \quad \text{a tedy, že } Pd = 0.$$

Jestliže za d položíme $d = [HP'P - \lambda^2 I_N] \cdot \alpha$, dostaneme

$$(6.19) \quad P[HP'P - \lambda^2 I_N] \cdot \alpha = 0.$$

To lze vyjádřit ekvivalentně jako

$$(6.20) \quad [PHP' - \lambda^2 I_N] \cdot P\alpha = [PHP' - \lambda^2 I_N] \cdot p = 0.$$

Vektor generující cenová indexní čísla (určený zatím až na multiplikační konstantu) tak dostáváme jako vlastní vektor matice $PHP' = P'Q'QP$ odpovídající největšímu vlastnímu číslu této matice (které je, jak již bylo řečeno, kladné). Jednoznačnost určení tohoto vektoru však není zaručena ve smyslu dříve učiněných poznámek o vlastnostech matic s nezápornými prvky.

7) Nyní se budeme zabývat problémem určení kvantových indexních čísel obsažených ve vektoru q . Budeme přitom postupovat analogickou cestou jako při odvození cenových indexních čísel. Symetricky k (6.1) budeme tedy požadovat platnost

$$(6.21) \quad q = Q \cdot \gamma,$$

kde γ je vektor typu $N \times 1$. Parametrické vyjádření vyrovnávající nadrovinu bude pro $k = 1, 2, \dots, N$ vypadat takto

$$(6.22) \quad q_k = \eta_k q \quad (\eta_k \text{ s kladnými složkami})$$

a matice odchylek W s prvky $w_k(t) = q_k(t) - \eta_k \cdot q(t)$ sestavená obdobně jako U v (6.3) bude

$$(6.23) \quad W = Q(I - \gamma \cdot \eta),$$

kde η je vektor „odhadů“ složek vektoru γ typu $N \times 1$.

S obdobným cílem jako v případě vektoru generujícího cenová indexní čísla zavedeme pozitivně semidefinitní matici $G = P'P$ a postupujeme cestou minimalizace kvadratické formy

$$(6.24) \quad \text{Min } Tr(GW'W) = \text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[g_{ij} \left(\sum_{t=1}^T w_i(t) \cdot w_j(t) \right) \right] = F(\gamma, \eta).$$

Postup vede k získání čtveřice vztahů analogických k (6.13A) - (6.14B) a k dovození toho, že hledaný vektor q generujícího kvantová indexní čísla je určen jako vlastní vektor matice $QQQ' = Q'P'PQ$ odpovídající největšímu vlastnímu číslu této matice, kterým je opět λ^2 .

Nutné podmínky pro minimalizaci matice odchylek (6.24) a matice odchylek (6.6) jsou vyjádřeny následující soustavou podmínek (sloučením (6.13A) - (6.14B) a jejich analogiemi pro vektor generující kvantová indexní čísla):

$$(6.25) \quad \begin{aligned} & [P'PQ'Q - (\alpha'P'P\alpha) \cdot (\beta'Q'Q\beta)I_N] \cdot P'P\alpha = 0 & (A) \\ & Q'Q[P'PQ'Q - (\alpha'P'P\alpha) \cdot (\beta'Q'Q\beta)I_N] \cdot \beta = 0 & (B) \\ & [P'PQ'Q - (\eta'P'P\eta) \cdot (\gamma'Q'Q\gamma)I_N] \cdot P'P\eta = 0 & (C) \\ & Q'Q[P'PQ'Q - (\eta'P'P\eta) \cdot (\gamma'Q'Q\gamma)I_N] \cdot \gamma = 0 & (D) \\ & [Q'QP'P - (\alpha'P'P\alpha) \cdot (\beta'Q'Q\beta)I_N] \cdot Q'Q\beta = 0 & (E) \\ & P'P[Q'QP'P - (\alpha'P'P\alpha) \cdot (\beta'Q'Q\beta)I_N] \cdot \alpha = 0 & (F) \\ & [Q'QP'P - (\eta'P'P\eta) \cdot (\gamma'Q'Q\gamma)I_N] \cdot Q'Q\gamma = 0 & (G) \end{aligned}$$

$$P'P[Q'QP'P - (\eta'P'P\eta) \cdot (\gamma'Q'Q\gamma)I_N] \cdot \eta = 0 \quad (H)$$

Z těchto vztahů plyne, - stejně jako v předchozím případě vektoru generujícího cenová IČ - že vektory $P'P\alpha, \beta, P'P\eta$ a γ jsou vlastními vektory matice $P'PQ'Q$ a podobně vektory $Q'Q\beta, \alpha, Q'Q\gamma$ a η jsou vlastními vektory matice $Q'QP'P$, přičemž všechny tyto vlastní vektory přísluší největšímu vlastnímu číslu matic $P'PQ'Q$ resp. $Q'QP'P$ (ta jsou shodná) λ^2 . Všechny uvedené vlastní vektory jsou určeny až na kladné multiplikační konstanty a odpovídající si vektory v každé z obou čtveřic vztahů se mohou v této multiplikační konstantě lišit. Nic přitom nebrání zvolit $\beta = \gamma$, při kteréžto volbě se první a třetí rovnost v obou soustavách ztotožní. Vzhledem k (6.25A,D) a k (6.25F,G) můžeme psát

$$(6.26) \quad P'P\alpha = k_1\gamma \quad \text{a podobně} \quad Q'Q\gamma = k_2\alpha,$$

neboť jde o vlastní vektory příslušné k největšímu vlastnímu číslu λ^2 matic $P'PQ'Q$ resp. $Q'QP'P$. Tyto vektory se mohou lišit nanejvýš ve zmíněné multiplikační konstantě. Sloučením obou vztahů v (6.26) obdržíme dále

$$(6.27) \quad Q'QP'P\alpha = k_1Q'Q\gamma = k_1 \cdot k_2\alpha.$$

V (6.27) vidíme, že součin konstant $k_1 \cdot k_2$ zde reprezentuje maximální vlastní číslo matice $Q'QP'P$, tedy λ^2 (přičemž α je k němu příslušný vlastní vektor). Můžeme tedy vyjádřit

$$(6.28) \quad r_1 * r_2 = \lambda^2 = (\alpha'P'P\alpha) \cdot (\beta'Q'Q\beta) = (\alpha'P'P\alpha) \cdot (\gamma'Q'Q\gamma) = p'p \cdot q'q,$$

přičemž pro určení r_1 a r_2 máme jeden stupeň vůle (druhý z obou skalárů je vázán vztahem $r_2 = \frac{\lambda^2}{r_1}$). Zvolíme-li bez újmy na obecnosti $r_1 = \lambda$ (s kladným λ), dostaneme zřejmě také $r_1 = \lambda$ (jako odmocninu z největšího vlastního čísla matic $P'PQ'Q$ resp. $Q'QP'P$). Vztahy (6.26) se „zesymetризují“ na

$$(6.29) \quad P'P\alpha = \lambda\gamma \quad \text{resp.} \quad Q'Q\gamma = \lambda\alpha.$$

Tvrzení 6.1 Pro vektory p a q generující indexní čísla cenová a kvantová platí vztahy:

$$(6.30) \quad p'p = q'q = \lambda,$$

kde λ je odmocnina z největšího vlastního čísla matic $P'PQ'Q$ resp. $Q'QP'P$.

Ověření: Užijeme postupně vztahů (6.1): $p = P\alpha$, (6.21): $q = Q\gamma$ a vztahu (6.29) a dostaneme:

$$(6.31A) \quad q'QP'p = q'QP'P\alpha = \lambda q'Q\gamma = \lambda q'q \quad \text{a podobně}$$

$$(6.31B) \quad p'PQ'q = p'PQ'Q\gamma = \lambda p'P\gamma = \lambda p'p.$$

Poněvadž z rovnosti $q'QP'p = p'PQ'q$ (výraz je skalár) plyne, že $p'p = q'q$ a podle vztahu (6.28) platí $p'p \cdot q'q = \lambda^2$, máme $p'p = q'q = \lambda$. \square

Dále platí

Tvrzení 6.2 Pro vektory α a γ určující generující vektory p a q indexních čísel platí:

$$(6.32) \quad \alpha'\gamma = 1.$$

Ověření: Z (6.29) víme, že $P'P\alpha = \lambda\gamma$, což po vynásobení α' zleva dává $\alpha'P'P\alpha = \lambda\alpha'\gamma$. Výraz $\alpha'P'P\alpha = \lambda$, neboť $p = P\alpha, p' = \alpha'P, p'p = \lambda$ (dle Tvzení 6.1) a tedy musí platit $\alpha'\gamma = 1$. \square

Pro další účely označíme součin matic P a Q (Q v transpozici) zkráceně jako $R = P \cdot Q'$, kde R je matice typu $T \times T$ sestavená z prvků

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^N p_k(i) * q_k(j), \quad i, j = 1, 2, \dots, T.$$

Nyní ukážeme, že platí

Tvrzení 6.3 Pro hledané generující vektory indexních čísel p, q a pro matici $R = P \cdot Q'$ platí vztahy

$$(6.33A,B) \quad R'p = \lambda \cdot q \quad R \cdot q = \lambda \cdot p.$$

Ověření: Z předchozího víme, že platí $P'P\alpha = \lambda \cdot \gamma$. Vynásobíme-li tento vztah zleva maticí Q , dostaneme

$$QP'P\alpha = \lambda \cdot Q\gamma$$

a protože dále platí $QP' = R', Q\gamma = q$ a $P\alpha = p$, dostáváme dokazovaný vztah (6.33A). Pro druhou část tvrzení využijeme analogicky rovnost $Q'Q\gamma = \lambda\alpha$, kterou násobíme zleva maticí P s výsledkem

$$PQ'Q\gamma = \lambda \cdot P\alpha$$

a protože $PQ' = R, Q\gamma = q$ a $P\alpha = p$, můžeme konstatovat platnost vztahu (6.33B). \square

Tvrzení 6.4 Pro generující vektory indexních čísel p a q , matici $R = P \cdot Q'$ a skalár $\lambda > 0$ platí:

$$(6.34) \quad p'R'Rq = \lambda^2 p'q.$$

Ověření: Vynásobením vztahu (6.33B) maticí R' zleva dostaneme

$$(6.35) \quad R'Rq = \lambda \cdot R'p = \lambda QP'p.$$

Vynásobení (6.35) vektorem p' zleva pak vede k dokazovanému vztahu

$$p'R'Rq = \lambda p'QP'p = \lambda^2 p'q,$$

neboť dle (6.33A) platí $QP'p = \lambda q$. \square

Definice 6.1

Vektory p a q zkonstruované předchozím postupem, minimalizující kvadratickou formu (6.24) a splňující (6.26) a (6.29) se nazývají (podle H. Theila) vektory generující „Theilova symetrická nejlepší lineární cenová (resp. kvantová) indexní čísla“ (zkráceně SBLIN).

Jestliže v předchozí definici uvolníme požadavek na „symetrii“ reprezentovanou vztahy (6.26) a obdobně formulovaných vztahů propojujících β a η , můžeme formulovat tzv. nejlepší lineární cenová indexní čísla (BLIN).

Definice 6.2

(a) Mějme matici $P_{T \times N}$ složenou (po řádcích) z T pozorování cenových vektorů p , dále

libovolnou pozitivně definitní matici H^* typu $N \times N$ takovou, že součin PH^*P' není nulová matice. Necht' dále λ^2 je největší (kladné) vlastní číslo matice PH^*P' . Potom řešení (vektor p^*) maticové rovnice

$$(6.36) \quad [PH^*P' - \lambda^2 I_N] \cdot p^* = 0$$

nazveme vektor generující nejlepší lineární cenové indexní číslo (BLPIN).

(b) Mějme matici $Q_{T \times N}$ složenou (po řádcích) z T pozorování vektorů kvantit q , dále libovolnou pozitivně definitní matici G^* typu $N \times N$ takovou, že součin QG^*Q' není nulová matice. Necht' dále μ^2 je největší (kladné) vlastní číslo matice QG^*Q' . Potom řešení (vektor q^*) maticové rovnice

$$(6.37) \quad [QG^*Q' - \mu^2 I_N] \cdot q^* = 0$$

nazveme vektor generující nejlepší lineární kvantové indexní číslo (BLQIN).

Jak je z předchozí definice patrné, v případě (nesymetrických) BLIN indexních čísel jsou hledané vektory cen p^* a kvantit q^* určeny nezávisle na sobě (což vyplývá z obecné možnosti volby pozitivně definitních matic H^* a G^*).

Jednotlivá cenová indexní čísla P_{St}^T a kvantová indexní čísla Q_{St}^T ($s, t = 1, 2, \dots, T$) dostaneme jako podíly t -tého a s -tého členu (složky) konečného řetězce (vektoru) p , neboť máme zaručeno, že tyto členy jsou vesměs kladná čísla. Definuujeme tedy

Definice 6.3

(a) Theilovým cenovým indexním číslem (SBLIN) vyjadřujícím globální cenovou změnu komplexu mezi obdobími s a t ($s, t = 1, 2, \dots, T$) nazveme podíl

$$(6.38) \quad P_{St}^T = \frac{p(t)}{p(s)},$$

kde $p(t)$ a $p(s)$ označuje t -tou, resp. s -tou složku vektoru p odvozeného předchozím postupem.

(b) Theilovým kvantovým indexním číslem vyjadřujícím globální množstevní změnu komplexu mezi obdobími s a t ($s, t = 1, 2, \dots, T$) nazveme podíl

$$(6.39) \quad Q_{St}^T = \frac{q(t)}{q(s)},$$

kde $q(t)$ a $q(s)$ označuje t -tou, resp. s -tou složku vektoru q odvozeného v (6.21).

Poznámka 6.1 Jak vyplývá z výše vyslovené definice, cenové ani kvantové Theilovo indexní číslo není závislé na normování vektorů p a q .

Nyní už jen přehledně shrneme základní kroky algoritmu, který vede k získání symetrických nejlepších nestranných lineárních čísel (SBLIN). Modifikace postupu pro BLIN vzhledem k zavedené definici 6.2 (s nutností specifikace matic H^* a G^*) je zřejmá.

Krok 1: Sestavíme matici $R'R = PQ'QP'$ a nalezneme (pomocí vhodné výpočetní metody) její největší vlastní číslo λ^2 , o kterém víme, že je kladné.

Krok 2: Řešíme soustavu homogenních lineárních rovnic (6.20), tj.

$$(6.40) \quad [PQ'QP' - \lambda^2 I_N] \cdot P\alpha = [PQ'QP' - G\lambda^2 I_N] \cdot p = 0$$

(jde o T rovnic pro T neznámých, jimiž jsou složky vektoru p) a určíme tak vektor p až na multiplikatívni konstantu.

Krok 3: Nesplňuje-li hledaný vektor p podmínku (6.30), tj. $p'p \neq \lambda$, normujeme jeho složky takto

$$(6.41) \quad p_i = \frac{1}{\sqrt{p'p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot p_i.$$

Krok 4: Získáme-li podle kroku 3 (normovaný) vektor generující cenová indexní čísla p , pak ze vztahu (6.33A), tj. $PQ'p = \lambda \cdot q$ dostaneme vektor generující nejlepší nestranná kvantová indexní čísla q jako

$$(6.42) \quad q = \frac{1}{\lambda} \cdot PQ' \cdot p.$$

6.3 Vlastnosti nejlepších lineárních indexních čísel (BLIN)

Stejně jako u klasických indexních čísel podrobme nyní Theilova indexní čísla zavedená definicí 6.3 vyšetření, které z axiomů zavedených v části [2.3] tato indexní čísla splňují. Omezíme se přitom na prvních Fisherových 8 testů. Vzhledem k tomu, že zde máme co činit s T obdobími (nejen se dvěma obdobími „0“ a „1“), provedeme ověření vůči kterékoliv dvojici období (popř. území) $s, t \in \{1, 2, \dots, T\}$. Vyšetření provedeme ve sledu, který umožní využít dosažené mezivýsledky.

Poznámka k dále použitému značení Vzhledem k tomu, že v této části budeme potřebovat blíže popsat vnitřní strukturu matic R, P a Q , použijeme pro jejich prvky označení ξ, π a ρ , neboť symboly p a q jsme již vyhradili pro jiný účel. Označíme tedy $P = \{\pi_{ji}\}$, $Q = \{\xi_{ji}\}$ ($j = 1, 2, \dots, T$, $i = 1, 2, \dots, T$), $R = \{\rho_{jk}\}$, ($j, k = 1, 2, \dots, T$). Dále: j -tý řádek matice P označíme π_j , i -tý řádek matice P označíme π_i a stejnou konvenci uplatníme u matic P a Q . Vlastní čísla matice R budeme značit $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_T$.

(F1) axiom identity ($P_{ss}^T = 1$) je splněn.

Ověření: Ztotožníme-li obě období (tedy $s = t$), znamená to stejnou situaci v cenách i v množstvích pro vektory cen a kvantit příslušné těmto období, jinými slovy shodu prvků v s -tém a t -tém řádku matice cen P a stejně tak v s -tém řádku a t -tém řádku matice kvantit Q . Odtud následně vyvodíme shodu příslušných prvků s -tého a t -tého sloupce matice Q' , která se uplatňuje v matici $R = PQ'$.

Pro s -tý a t -tý řádek matice R to dále znamená (označíme-li ρ_{sj} prvek na místě (s, j) matice R), že

$$\rho_{sk} = \sum_{i=1}^N \pi_{si} \xi_{ki} = \sum_{i=1}^N \pi_{ti} \xi_{ki} = \rho_{tk},$$

tzn., že s -tý a t -tý řádek matice R se sobě rovnají.

Podobně bychom dostali pro prvky ve sloupcích matice R

$$\rho_{js} = \sum_{i=1}^N \pi_{ji} \xi_{si} = \sum_{i=1}^N \pi_{ji} \xi_{ti} = \rho_{jt} ,$$

tzn., že také s -tý a t -tý sloupec matice R mají shodné prvky.

(Vše platí pro libovolné j, k a $s = t$ v rozsahu $1, \dots, T$.) Matice $R = PQ'$ má tedy stejný s -tý a t -tý řádek a stejně tak stejný s -tý a t -tý sloupec.

Pro hledané vektory $p (= P_{st}^T)$ a $q (= Q_{st}^T)$ tedy platí

$$(6.43) \quad QP'p = \lambda q \quad \text{a podobně} \quad PQ'q = \lambda p .$$

Označíme-li řádky matice R jako r_i ($i = 1, 2, \dots, T$) a sloupce téže matice jako r_j^* ($j = 1, 2, \dots, T$), můžeme „definiční“ vztahy (6.31A,B) zapsat jako

$$(6.44) \quad r_j^* p = \lambda \cdot q(j) \quad \text{resp.} \quad r_k q = \lambda \cdot p(k) \quad j, k = 1, 2, \dots, T .$$

Jestliže platí podle předpokladu $r_s = r_t$ (stejně jako $r_s^* = r_t^*$), potom též musí platit $p(s) = p(t)$ a obdobně $q(s) = q(t)$ při $s, t \in \{1, 2, \dots, T\}$. Jinými slovy $p_s = p_t$ a $q_s = q_t$. \square

Obdobný postup lze uplatnit pro ověření (F7):

(F7) axiom úměrnosti - proporční změna všech cen ($p_{ti} = c \cdot p_{si}$ pro všechna j) resp. kvantit - je splněn.

Ověření: Z předpokladu $p_{ij} = c \cdot p_{sj}$ (pro nějaké kladné c , které představuje poměrovou změnu cen) vyvodíme snadno, že

$$\rho_{tk} = \sum_{i=1}^N \pi_{ti} \xi_{ki} = \sum_{i=1}^N c \cdot \pi_{si} \cdot \xi_{ki} = c \cdot \rho_{sk} ,$$

tzn, že prvky t -tého řádku R jsou c -násobky prvků s -tého řádku R .

Podobně dostaneme pro prvky ve sloupcích matice R

$$\rho_{jt} = \sum_{i=1}^N \pi_{ji} \xi_{ti} = \sum_{i=1}^N \pi_{ji} \cdot c \cdot \xi_{si} = c \cdot \rho_{jt} ,$$

tzn, že také t -tý sloupec R má prvky c -násobky s -tého sloupce R .

K ověření (F7) potřebujeme prokázat, že $P_{st}^T = c$, resp., že také $Q_{st}^T = c$.

Z rovnic (6.42) vyvodíme, že jestliže $r_t = c \cdot r_s$ (stejně jako $r_s^* = r_t^*$), potom platí $p(t) = c \cdot p(s)$ při $s, t \in \{1, 2, \dots, T\}$, tzn. $p_t = c \cdot p_s$. Obdobně - *mutatis mutandis* - dostaneme, že $q_t = c \cdot q_s$. \square

(F2) axiom záměny faktorů ($P_{st}^T * Q_{st}^T = 1$) není splněn.

Odůvodnění:

Pokud by tento axiom byl splněn, muselo by to znamenat, že výraz (skalární součin) $p(t) * q(t)$ přesně vystihuje agregátní hodnotu v obdobích $t = 1, 2, \dots, T$, tzn. že

$p(t) * q(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_i(t)$ (sčítáme přes všech N komodit). Potom by musela platit

přinejmenším rovnost prvků na hlavní diagonále matice pq' a matice $PQ' = R$. Toto však obecně nijak zaručit nelze. Rozepíšeme-li prvky na hlavní diagonále matice pq' ($p = P\alpha$, $q = Q\gamma$) dostáváme:

$$(6.45) \quad \left[\sum_{i=1}^N p_i(t)\alpha_i(t) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^N q_j(t)\gamma_j(t) \right] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i\gamma_j \cdot p_i(t) \cdot q_j(t) \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

kde α_i, γ_i jsou příslušné složky N -členných vektorů α, γ . V případě platnosti **(F2)** by muselo platit

$$(6.46) \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i\gamma_j \cdot p_i(t) \cdot q_j(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) \cdot q_j(t),$$

což však není obecně zajištěné, neboť rovnic v (6.44), kterých je celkem T , je (až na výjimečný případ, kdy $T = 2N$) vždy více než neznámých (prvků vektorů α, γ , jichž je $2N$). \square

Před vyšetřením axiomů **(F3)** a **(F4)** se zabývejme vlivem dopadu záměny dvou komodit a záměny dvou období (území) na Theilova indexní čísla. Jak ukážeme v následujících dvou tvrzeních, indexní čísla SBLIN jsou vůči oběma takovým změnám invariantní:

Tvrzení 6.5 Vektory p a q generující Indexní čísla SBLIN zavedené *Definicí 6.1* jsou invariantní vůči jakékoliv záměně pořadí komodit (tj. vůči simultánní permutaci sloupců matic P a Q).

Ověření: Pro prvky matice R zřejmě platí

$$(6.47) \quad \rho_{jk} = \sum_{i=1}^N \pi_{ji} \xi_{ki} \quad (j, k = 1, 2, \dots, T)$$

a vůbec tedy nezáleží na pořadí komodit vstupujících do těchto skalárních součinů. Výpočet vlastních čísel μ_i ($i = 1, 2, \dots, T$) matice RR není změnou pořadí komodit nijak dotčen. Podle (6.33A,B) to zajišťuje invarianci vektorů p, q vůči přečíslování komodit. \square

Tvrzení 6.6 Vektory p a q generující Indexní čísla SBLIN zavedené *Definicí 6.1* jsou invariantní vůči jakékoliv záměně pořadí dvou období (tj. vůči simultánní permutaci řádků matic P a Q).

Ověření: Prohození dvou období (výměna s -tého za t -tý řádek a naopak v P a tatáž výměna v Q) znamená, že v matici R se prohodí řádek r_s s r_t a současně sloupec r_s^* se sloupcem r_t^* . Totéž platí pro součin $R'R$ a také pro matici $R'R - \mu I_T$, protože prvky této matice, které obsahují μ (tj. diagonální prvky) budou i poté opět diagonálními prvky. Jak známo, determinant (čtvercové) matice je invariantní vůči *současné* výměně dvou řádků a týchž sloupců, takže bude i potom platit

$\det[R'R - \mu I_T] = 0$ pro tytéž hodnoty μ a nebude tedy nijak záviset na pořadí jednotlivých období. Platí-li to obecně pro všechna μ_j ; $j = 1, 2, \dots, T$, musí to platit zřejmě i pro největší vlastní číslo λ^2 (k němuž se váže hledaný vektor indexních čísel). \square

Provedená permutace řádků s a t a současně analogická permutace sloupců s a t vede toliko k tomu, že matice $R'R - \mu I_T$ bude mít na diagonále obecně jinak seřazená vlastní čísla (pokud netrváme striktně na jejich sestupném řazení). Hodnoty těchto čísel budou ovšem

shodné jako v původním případě). To nic nemění na určení maximálního vlastního čísla λ^2 , jehož hodnota se nezmění. Stejně tak se zachová vlastní vektor tomuto vlastnímu číslu příslušný.

(F3) axiom záměny období (území) $P_{st}^T * P_{ts}^T = 1$ je splněn.

Ověření: S ohledem na definiční podílový vztah (6.38) je ihned zřejmé, že bude platit

$$(6.48) \quad P_{st}^T \cdot P_{ts}^T = \frac{p(t)}{p(s)} \cdot \frac{p(s)}{p(t)} = 1.$$

(F4) axiom okružnosti je splněn.

Ověření: V našem T – dimenzním kontextu to znamená prokázat, že platí

$$P_{sv}^T \cdot P_{vt}^T = P_{st}^T \quad (\text{nezávisle na zvoleném meziobdobí „v“}).$$

To je ovšem s ohledem na definiční vztah (6.38) okamžitě zřejmé:

$$(6.49) \quad P_{st}^T \cdot P_{ts}^T = \frac{p(v)}{p(s)} \cdot \frac{p(t)}{p(v)} = \frac{p(t)}{p(s)} \quad \square$$

(F5) axiom určenosti (při nepřítomnosti některé komodity v některém období) je splněn.

Ověření: Je zřejmé, že cenová indexní čísla P_{st}^T definovaná definicí 6.1 tvoří ve všech složkách konečný, ne identicky nulový vektor (vlastní vektor příslušný kladnému vlastnímu číslu) a že v případě absence některé komodity se tento konstrukt nezhroutí. Totéž platí i pro kvantová indexní čísla Q_{st}^T . \square

(F6) axiom souměřitelnosti je splněn.

Ověření: Nezávislost vektoru (cenových) indexních čísel na měrových jednotkách komodit lze vyvodit opět z invariance prvků matice R vůči případným těmto změnám: d -násobné zvětšení (pro $D > 0$) původní měrové jednotky vede k $\frac{1}{d}$ násobnému zmenšení původní jednotkové ceny. Prvky matice R vyjadřující hodnotové agregáty (dané součiny $r_{jk} = \sum_{i=1}^N p_{ji} \cdot q_{ki}$) tedy vyvolanou změnou měrové jednotky komodity ovlivněny nebudou. \square

6.4 Vztah Theilových a klasických indexních čísel

Poslední otázkou, která nás zde bude v souvislosti s indexními čísly zavedenými H.Theilem zajímat, je případná souvztažnost konstruovaných SBLIN-indexních čísel vůči některým klasickým typům indexních čísel. S ohledem na výsledky dosažené v předchozích částech (zejména 2.4) lze za ústřední považovat otázku, zda (aspoň některá z nich) mohou být situována do intervalu vymezeného (zdola) Paascheho a (shora) Laspeyresovým indexním číslem. Ukážeme, že odpověď na takto položenou otázku je kladná.

Za uvedeným účelem omezíme (jinak libovolný konečný) počet T období, za která registrujeme údaje o cenách a kvantitách N komodit, na 2 ($T = 2$). Nejprve sestrojíme matici R „hodnotových“ skalárních součinů $R = P \cdot Q'$ pro dvě (časová) období:

$$(6.50) \quad R = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1) \\ \sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0) & \sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1) \end{pmatrix},$$

v níž význam všech přítomných symbolů je známý. Čtveřici prvků této matice nyní budeme normovat hodnotovým agregátem základního období $\sum p_i(0) \cdot q_i(0)$. Po vydělení dostaneme matici R^* tvaru

$$(6.51) \quad R^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)} \\ \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(0)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)} & \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)} \end{pmatrix},$$

v níž mimodiagonální prvky jsou představovány Laspeyresovými indexními čísly Q_{01}^L a P_{01}^L . Ve zkráceném zápisu tedy

$$(6.52) \quad R^* = \begin{pmatrix} 1 & Q_{01}^L \\ P_{01}^L & M(1) \\ & M(0) \end{pmatrix},$$

kde $M(1)$ a $M(0)$ jsou hodnotové agregáty běžného a základního období (značení je shodné jako u Stuelova indexního čísla v části [3.3]).

Nyní si připomeneme von Bortkiewiczův vztah - viz část [2.6] - platný pro podíl Paascheho a Laspeyresova indexního čísla, podle kterého lze psát

$$(6.53) \quad P_{01}^P = P_{01}^L(1 + \omega),$$

kde symbol ω vyjadřuje součin tří členů: (vážených) výběrových variačních koeficientů V_x , V_y a (váženého) výběrového korelačního koeficientu r_{xy} vektorů x a y určených vztahy

$$(6.54) \quad x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(0)},$$

$$(6.54A) \quad \text{s vahami} \quad w_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^N p_j(0) \cdot q_j(0)}.$$

Jak známo, párový korelační koeficient r_{xy} má v důsledku protichůdné tendence ve vývoji cen a kvantit (vůči příslušným průměrným hodnotám) ve shodném období změn (0→1) záporné znaménko. S ohledem na výše konstatované lze dále psát

$$(6.55) \quad R^* = \begin{pmatrix} 1 & Q_{01}^L \\ P_{01}^L & P_{01}^L Q_{01}^L (1 + \omega) \end{pmatrix}$$

V dalším kroku stanovíme poměry P_{01}^{Th} a Q_{01}^{Th} jako $P_{01}^{Th} = \frac{p(1)}{p(0)}$ resp. $Q_{01}^{Th} = \frac{q(1)}{q(0)}$, tedy indexní čísla typu BLIN (vyjadřují pohyb cenové a množstevní hladiny mezi základním a běžným obdobím). Velikost podílového zkreslení ω bude zpravidla malá. V rámci sledovaného cíle nás (pro dvě období 0 a 1) nebude zajímat absolutní velikost složek hledaných vektorů p a q , nýbrž jen jejich vzájemný poměr (obejdeme se tedy i bez znalosti vlastního čísla λ). Vektory p a q dostaneme v souladu s dříve popsáním schématem pomocí maticových rovnic

$$(R'R - \lambda^2 I_N) \cdot p = 0.$$

Nejprve se budeme věnovat Theilovu cenovému indexnímu číslu P_{01}^T . K jeho výpočtu slouží první z předchozích rovnic, která v rozepsání po prvcích (dle období) představuje zápis:

$$(6.56) \quad \begin{pmatrix} 1 & Q_{01}^L \\ P_{01}^L & P_{01}^L \cdot Q_{01}^L \cdot (1 + \omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & P_{01}^L \\ Q_{01}^L & P_{01}^L \cdot Q_{01}^L \cdot (1 + \omega) \end{pmatrix} - \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Po dalších poněkud zdlouhavějších úpravách se zanedbáním členů vyjadřujících zkreslení nižších řádů dostaneme pro hledané Theilovo cenové indexní číslo P_{01}^T vztah:

$$(6.57) \quad P_{01}^{Th} = P_{01}^L \left(\frac{1 + \theta \cdot (Q_{01}^L)^2}{1 + (Q_{01}^L)^2} \right) + o(\omega), \text{ kde}$$

ω představuje již zmíněný výraz z von Bortkiewiczova poměru jako součin $V_{\frac{p1}{p0}} \cdot V_{\frac{q1}{q0}} \cdot r_{\frac{p1, q1}{p0, q0}}$

a $o(\omega)$ vyjadřuje výraz, pro který při $\omega \rightarrow 0$ $\lim \left[\frac{o(\omega)}{\omega} \right] = 0$ a který je zanedbáván.

Podobně lze vyjádřit pro Theilovo kvantové indexní číslo vztah

$$(6.58) \quad Q_{01}^{Th} = Q_{01}^L \left(\frac{1 + \omega (P_{01}^L)^2}{1 + (P_{01}^L)^2} \right) + o(\omega).$$

Vzhledem k tomu, že platí nerovnosti (s ohledem na záporné θ a kladnou hodnotu P_{01}^L)

$$(6.59) \quad 1 + \omega < 1 + \omega \left[\frac{(P_{01}^L)^2}{1 + (P_{01}^L)^2} \right] < 1,$$

dostáváme odtud platnost

$$(6.60) \quad P_{01}^P < P_{01}^{Th} < P_{01}^L,$$

což znamená, že hodnota Theilova cenového indexního čísla se rovněž nachází v intervalu tvořeného zdola Paascheho a shora Laspeyresovým cenovým indexním číslem. Uvážíme-li dále, že v případě nevelkých kvantových a cenových změn mezi porovnávanými obdobími (jsou-li tato relativně blízko sebe a kdy Q_{01}^L i P_{01}^L se neliší příliš od 1) platí

$$(6.61) \quad \frac{(Q_{01}^L)^2}{1 + (Q_{01}^L)^2} \cong \frac{1}{2} \cong \frac{(P_{01}^L)^2}{1 + (P_{01}^L)^2},$$

potom lze říci, že Theilovo (cenové) indexní číslo leží zhruba ve středu intervalu vymezeného zdola P_{01}^P a shora P_{01}^L . \square

Stejný závěr lze vyslovit i pro Theilovo kvantové indexní číslo, pro něž platí obdobně

$$(6.62) \quad Q_{01}^P < Q_{01}^{Th} < Q_{01}^L.$$

Theilův přístup vycházející z regresního principu není však jediným v úvahu přicházejícím. Krátce po jeho vyvinutí přišli s určitou jeho modifikací Theilovi krajané Kloeck a de Witt [1961]. Stručně lze základní myšlenku jejich přístupu uvést takto:

Je-li Theilův přístup ve své podstatě založen na nepodmíněné minimalizaci výrazu

$$(6.63) \quad \text{Min } E = \text{Min } [PQ' - pq'],$$

kde E lze interpretovat jako matici "odchylek pozorovaných a vyrovnaných hodnot", přičemž SBLINy minimalizují

$$(6.64) \quad \text{Tr } E \cdot E' = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N e_{jk}^2,$$

potom metoda Kloecka a de Witta spočívá rovněž v minimalizaci (6.63), avšak při platnosti apriorně vyžadované podmínky $\text{Tr } E = 0$. Tato podmínka je - jak lze ukázat - slabší než požadavek na platnost axiomu záměny faktorů (**F2**), který - jak víme - Theilovy SBLINy nesplňují - avšak míra nesplnění (**F2**) je při této dodatečné podmínce nižší než v případě Theilových SBLINů. Postup odvození příslušných indexních čísel (pojmenovaných BLAU - nejlepší nestranná průměrná indexní čísla) je založen na metodě Lagrangeových multiplikátorů (která je obvyklým nástrojem analýzy při aplikaci metody nejmenších čtverců s lineárními omezeními) a má iterační charakter.