

## Teorie produkce

*Teorie produkce* je další z oblastí matematické ekonomie, v níž matematické nástroje slouží k formalizaci mikroekonomické teorie. Analyzuje se zde chování typického výrobního ekonomického subjektu (firmy), který usiluje o racionální fungování výrobního procesu v tržním prostředí, kde ceny výrobních faktorů, příp. výrobků jsou určeny mimo vůli výrobce, jsou tedy považovány za exogenní veličiny. Soubor *výrobních faktorů* v rámci uvažované technologie (*souborů výrobních postupů, zkušeností, informací, know-how*) vede k dosažení určité úrovně produkce (*výroby, výstupu, outputu*). Výrobce přitom primárně usiluje o maximalizaci ziskové stránky výroby tzn. o maximalizaci rozdílu mezi objemem tržeb z prodaných výrobků a mezi s výrobou souvisejícími výrobními náklady.

Zatím ponecháme stranou cenová hlediska a soustředíme se na "technologickou" stránku výrobního procesu. Popíšeme elementární vlastnosti, které charakterizují abstraktně chápaný výrobní vztah, pomocí něhož se výrobní faktory transformují v rámci dané technologie do celkové produkce. Tento vztah nazýváme *produkční funkcí*. Později k tomuto připojíme analýzu cenově-nákladové stránky výroby, abychom mohli zkoumat zákonitosti, které v daném prostředí platí mezi uvažovanými ekonomickými kategoriemi. V některých směrech zde spatříme obdobu ekonomických funkčních typů, se kterými jsme se dříve setkali v prostředí analýzy spotřebitelské poptávky.

### 1. Produkční množiny, produkční funkce

Nejprve zavedeme základní pojmový aparát umožňující na základě množinových kategorií (tzv. **produkčních množin vstupů**, popř. **výstupů**) zavést pojem **produkční funkce**. Omezíme se na výrobní vztahy v naturálním pojetí, zatím bez zavedení cenových vektorů (výrobních činitelů, resp. výrobků).

Produkční funkce však není výchozím, fundamentálním pojmem. Lze uplatnit složitější analytický aparát (tzv. **produkční korespondence**, či **relace**) který však překračuje rámec aktuální potřeby výkladu. Tyto pojmy poprvé důkladně vyšetřoval počátkem 50.let americký matematický ekonom prof. **Ronald W. Shephard**, který při teoretické analýze elementárních vlastností produkčních vztahů dospěl k možnosti popsat strukturu vlastností **produkčních množin** axiomaticky.

#### Definice 1

Uvažujeme-li konkrétní hodnotu velikosti produkce  $y^0 > 0$ , pak pro danou technologii je příslušná **produkční množina vstupů** [production input set]  $L(y^0)$  definována jako množina kombinací všech výrobních faktorů, s nimiž lze v dané technologii dosáhnout produkce  $y^0$ . Jestliže této technologii odpovídá konkrétní produkční funkce  $F(x)$ , lze  $L(y^0)$  vyjádřit jako

$$L(y^0) = \{x; x \geq 0, F(x) \geq y^0\}$$

V produkční množině vstupů jsou - jak patrné z definice - obsaženy i **neefektivní kombinace výrobních faktorů** (faktory jsou přítomny ve větších množstvích, než je nutné k dosažení produkce  $y^0$ ). Je proto účelné se v další analýze zaměřit jen na hraniční body množiny  $L(y^0)$ , případně na oblasti těchto bodů, vyznačující se úsporným nakládáním s výrobními faktory ve vztahu k požadované úrovni produkce.

## Definice 2

**Izokvanta** [Isoquant]  $Q(y^0)$  (na hladině produkce  $y^0$ ) **produkční množiny vstupů**  $L(y^0)$  je definována jako

$$Q(y^0) = \{x \in L(y^0); \Theta \cdot x \notin L(y^0)\} \quad \text{pro skalární } \Theta \in (0,1)$$

Jde tedy o množinu hraničních bodů produkční množiny vstupů, vymezující takové kombinace výrobních faktorů, které jsou v níže uvedeném smyslu postačující pro dosažení produkce na úrovni  $y^0$ . Izokvantu ve vztahu k produkční funkci se chápat jako obdobu indifferenční křivky vůči užitkové funkci  $u(x)$ . Jinak ale produkční funkce vzhledem k objektivní možnosti měřit velikost produkce (peněžně i naturálně) se od užitkové funkce liší mj. právě svým kardinálním vymezením.

## Definice 3

**Účinná (efektivní) podmnožina** [efficient subset]  $E(y^0)$  produkční množiny vstupů je daná definicí

$$E(y^0) = \{x \in L(y^0), z \leq x \text{ (avšak } z \neq x) \Rightarrow z \notin L(y^0)\}$$

Účinná podmnožina  $E(y^0)$  reprezentuje takové varianty nasazení výrobních faktorů, při kterých jsou tyto faktory vynakládány právě v minimálních nutných množstvích.

Abychom si lépe uvědomili rozdíl mezi *izokvantou* a *účinnou podmnožinou* (téže *produkční množiny vstupů*  $L(y^0)$ ), všimněme si, že bod  $x$  leží na izokvantě  $Q(y^0)$  právě tehdy, neexistuje-li žádný jiný bod  $z$ , který by byl jeho proporčním zmenšením (ležel by tedy na polopřímce spojující počátek souřadnic s bodem  $x$  nacházejícím se na izokvantě) a který by rovněž na této izokvantě ležel. Naproti tomu bod (tzn. kombinace výrobních faktorů)  $x$  účinné podmnožiny produkční množiny vstupů  $E(y^0)$  nemůže být "zmenšen" v žádném směru rovnoběžném s osami souřadnic (aby tímto zmenšením vzniklý jiný bod  $z$  ještě ležel na účinné podmnožině). Bod účinné podmnožiny musí být bodem izokvanty, zatímco opačně tomu tak být nemusí.

## Poznámka 1

Jednou z typických vlastností množiny  $L(y^0)$  je její konvexnost, která připouští technologie dělitelné v čase. Jestliže  $x, z$  náleží do  $L(y^0)$ , pak lze produkce  $y^0$  dosáhnout tak, že po dobu  $\lambda$  používáme faktory v kombinaci  $x$  a po zbývajícím časovém úseku  $(1-\lambda)$  v kombinaci  $z$ .

Stejně jako vymezuje produkční funkce  $F(x)$  soustavu produkčních množin vstupů, lze také obráceně pomocí posloupnosti produkčních množin vstupů  $L(y)$  s vhodnými vlastnostmi definovat produkční funkci  $F(x)$  vztahem

$$F(x) = \text{Max}\{y; x \in L(y)\}$$

**Produkční funkce je definována** - při vhodných vlastnostech produkčních množin vstupů jako je jejich uzavřenost a konvexnost pro každou úroveň produkce, prázdný průnik těchto množin při  $\lim y \rightarrow \infty$ , tj. při neomezeně rostoucí produkci - **jako maximální dosažitelný výstup, disponujeme-li danou množinou výrobních faktorů  $x$ .**

## 2 Vlastnosti obecné produkční funkce

Na základě podrobné teoretické analýzy provedené v 50. letech **Ronald W. Shephardem**, lze pro obecnou produkční funkci  $F(\mathbf{x})$  přijmout tuto (axiomatickou) soustavu vlastností:

**(P1)  $F(\mathbf{0}) = 0$** ; tj. hodnototvorný výrobní proces může být realizován pouze s kladnými hodnotami (aspoň některých) výrobních faktorů.

**(P2)  $F(\mathbf{x})$  je konečná reálná a nezáporná funkce proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$**  při jakýchkoliv konečných hodnotách výrobních faktorů vzatých z nezáporných definičních oborů  $X_j = \langle 0, +\infty \rangle$  pro všechna  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**(P3)  $F(\mathbf{x})$  je neklesající funkce v každé proměnné.** Přidáním množství kteréhokoliv výrobního faktoru nemůže dojít k poklesu produkce. Připouští se však, že mezní produktivita určitého faktoru v některé výrobní situaci může být nulová, tzn. že ne vždy vede zvýšení množství použitého výrobního faktoru k růstu produkce.

**(P4) Existuje-li taková kombinace výrobních faktorů  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  nebo  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , že  $F(\lambda\mathbf{x}) > 0$  pro nějaké skalární  $\lambda > 0$ , pak**

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda\mathbf{x}) = +\infty$$

Předpoklad charakterizuje vlastnost neomezeného růstu produkce, jestliže proporcionálně zvětšujeme množství faktorů v kombinaci, která poskytuje nenulový výnos. To např. vylučuje uplatnění (jako produkčních) funkcí, které se blíží k "asymptotě" rovnoběžné s některou ze souřadnicových os.

**(P5)  $F(\mathbf{x})$  je shora polospojité funkce** v celém definičním oboru.

Vzhledem k předpokladu (P3) lze ekvivalentně mluvit o polospojítosti zprava. Vlastnost přiblížíme definicí z matematické analýzy:

Funkce  $F(\mathbf{x})$  je polospojité shora (tj. je-li neklesající, zprava) v bodě  $\mathbf{x}^0 \in E_n$ , jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje okolí  $S\delta(\mathbf{x}^0)$  takové, že pro všechna  $\mathbf{x} \in S\delta(\mathbf{x}^0)$  platí  $F(\mathbf{x}) < F(\mathbf{x}^0) + \varepsilon$ .

Pro uvažované výrobní situace to znamená, že za určitých okolností může dojít ke skokům v růstu produkce (při přidání "nepatrně malého" množství některého z výrobních činitelů). Vlastnost koresponduje s připuštěním "kvalitativních změn v technologii" majících příčinu např. v technických inovacích (spíše půjde o změny na straně "kapitálu" či "technického pokroku" než v práci či surovinách).

**(P6)  $F(\mathbf{x})$  je kvazikonkávní funkce** v celém definičním oboru. Formálně vyjádřeno platí nerovnost

$$F(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{z}) \geq \text{Min}[F(\mathbf{x}), F(\mathbf{z})]$$

pro libovolnou dvojici bodů  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z}$  z definičního oboru produkční funkce a libovolné  $\lambda$  z intervalu  $(0,1)$ . Vlastnost je přímým důsledkem konvexnosti produkčních množin vstupů a garantuje udržení produkce  $F(\mathbf{x})$  při přechodu mezi dvěma faktorovými kombinacemi aspoň v té výši, která odpovídá méně produktivní faktorové kombinaci.

Konečně poslední vlastností, která se váže nikoliv k produkční funkci, nýbrž k účinné podmnožině, je Shephardem formulovaný, tzv. "asymetrický" axiom:

**(P7\*) Účinná podmnožina  $E(y^0)$  produkční množiny vstupů  $L(y^0)$  je ohraničená** pro jakoukoliv hodnotu produkce  $y^0$ .

Znamená to, že množiny  $E(y)$  jako účinné části izokvant  $[E(y^0) \subset Q(y^0)]$  jsou ohraničené křivky.

Uvedený axiom se nazývá asymetrický mj. proto, že jeho platnost není vyžadována pro analogicky k  $L(y^0)$  zkonstruované produkční množiny výstupů  $P(x^0)$ .

Většina funkčních tvarů užívaných k popisu produkčních vztahů jako analytické vyjádření produkční funkce, však tento asymetrický axiom nespĺňuje.

## Poznámka 2

V obecném schématu *produkčních korespondencí*/produkčních relací se pracuje s  $n$  výrobními faktory a  $m$  výrobky.

**Produkční množina vstupů  $L(y^0)$**  obsahuje všechny možné vstupy (kombinace výrobních faktorů  $x$ ), s nimiž je dosažitelný výstup (hodnota produkce)  $y^0$ .

$$L(y^0) = \{x; (x, y^0) \in Z(x, y)\}^1$$

## Vybrané vlastnosti produkční množiny vstupů $L(y^0)$

(L1)  $L(y^0)$  je uzavřená množina.

Izokvanta je vždy součástí produkční množiny vstupů

(L2)  $L(y^0)$  je konvexní množina.

Úsečka spojující dvě faktorové kombinace je součástí produkční množiny vstupů

(L3) Jestliže  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y^t = +\infty$ , pak  $\bigcap_{t=1}^{\infty} L(y^t) = \emptyset$

Průnik produkčních množin vstupů je prázdná množina Neexistuje žádná konečná kombinace výrobních faktorů poskytujících nekonečně velkou hodnotu produkce.

(L4) Pro  $y^2 \geq y^1$  platí  $L(y^2) \subseteq L(y^1)$  vnořování

Dosáhneme-li s určitou kombinací výrobních faktorů určité úrovně produkce, dosáhneme s ní vždy i jakoukoli nižší hodnotu produkce.

(L5)  $0 \notin L(y)$  pro žádné  $y > 0$ .

S nulovou kombinací výrobních faktorů nelze dosáhnout kladnou velikost produkce.

**Produkční množina výstupů  $P(x^0)$**  obsahuje všechny možné výstupy (kombinace výrobků  $y$ ), které jsou dosažitelné (vyrobitelné) pomocí vektoru výrobních faktorů  $x^0$ .

$$P(x^0) = \{y; (x^0, y) \in Z(x, y)\}$$

<sup>1</sup> Zápisem  $Z(x, y)$  rozumíme množinu výrobních možností, tj. množinu dvojic (vektorů)  $x, y$ , kde výstupy  $x$  jsou dosažitelné s vstupy  $y$ .

## Vybrané vlastnosti produkční množiny výstupů $\mathbf{P}(\mathbf{x}^0)$

(L1)  $\mathbf{P}(\mathbf{x}^0)$  je uzavřená množina.

Izokvanta je vždy součástí produkční množiny výstupů.

(L2)  $\mathbf{P}(\mathbf{x}^0)$  je konvexní množina.

Úsečka spojující dvě faktorové kombinace je součástí produkční množiny výstupů.

(L3) Jestliže  $\lim \mathbf{x}^t = +\infty$ , potom  $\bigcup_{t=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{x}^t) = E_n^+$ . Sjednocením všech produkčních

množin vstupů je celý nezáporný orthant. Zvětšujeme-li bez omezení množství všech výrobních faktorů, není velikost produkce shora limitována žádnou hranicí.

(L4) Pro  $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1$  platí  $\mathbf{P}(\mathbf{x}^1) \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{x}^2)$  vnořování

Dosáhneme-li s určitou kombinací výrobních faktorů určité úrovně produkce, dosáhneme s většími hodnotami faktorů vždy aspoň stejnou hodnotu produkce.

(L5)  $0 \in \mathbf{P}(\mathbf{x})$  pro všechna  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ .

Triviální konstatování, že nulová produkce je součástí produkční množiny výstupů: K výrobě „ničeho“ mohou být uplatněny výrobní faktory v jakýchkoliv množstvích (i nulových)..