<u>Nepřímá metoda nejmenších čtverců</u>
<u>*ILS (Indirect Least Squares method)*</u>
v soustavě simultánních regresních rovnic

Nepřímá metoda nejmenších čtverců je další z okruhu metod, které poskytují (stejně jako 2SLS nebo IV) **vždy** (přinejmenším) **konzistentní odhady strukturních parametrů regresních rovnic v interdependentních ekonometrických modelech.**

Metoda se od obou předchozích liší tím, že se k odhadu strukturních parametrů nepřistupuje přímo, ale přes parametry redukované formy modelu. V jejím algoritmu se místo transformací pozorovaných proměnných uplatňují transformace strukturních parametrů.
Smyslem těchto transformací je převedení strukturních parametrů na zpravidla početnější množinu parametrů redukovaného tvaru (ty jsou jednodušeji a vždy odhadnutelné) **a následně** (lze-li to ovšem provést) **zpětné určení strukturních parametrů pomocí parametrů redukovaného tvaru.**
Hlavní nesnází při tomto postupu je obecná neproveditelnost zpětného převodu (tzn. z odhadnutých parametrů redukovaného tvaru nelze vždy získat parametry tvaru strukturního) **– příčinou nesnáze je tzv. identifikační problém.**

Formální popis metody pro i-tou strukturní rovnici :
V rovnici zapsané jako

$$\boldsymbol{y}_{.i} = \boldsymbol{Y}_i \beta_{.i} + \boldsymbol{X}_{.i} \gamma_{.i} + \varepsilon_{.i}$$

vyjádříme nejprve redukovanou formu Π (celého modelu) jako

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}.\Pi + \boldsymbol{V}$$

kde $\Pi = \boldsymbol{C}.(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}$ a $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}$

Všimněme si blíže vztahu mezi parametry strukturního a redukovaného tvaru :

- **počet parametrů strukturního tvaru je dán počtem prvků v maticích $\mathbf{B}, \mathbf{C}$, kterých je dohromady $\mathbf{m}.(\mathbf{m}-\mathbf{1}) + \mathbf{m}.\mathbf{q}$** (neuvažujeme-li jiná omezení než normovací pravidlo $\beta_{ii} = 0$ v matici $\boldsymbol{B}$) **. Zpravidla však je počet** (nenulových parametrů) **strukturního tvaru** (tzn. s respektováním omezení kladených na některé z nich) **výrazně menší, neboť v obou maticích $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ je přítomno mnoho nulových prvků v důsledku nepřítomnosti mnoha modelových proměnných v jednotlivých rovnicích** (nerovnosti $\mathbf{q_i} < \mathbf{q}, \mathbf{m_i} < \mathbf{m}$ platí u rozsáhlejších modelů u většiny rovnic)**. Vkládaná omezení jsou nutná i jako "prevence" proti výskytu problémů spojených s identifikací rovnic.**
- **počet parametrů redukovaného tvaru je dán rozměry** (obecné) **matice Π, tedy $\mathbf{q}.\mathbf{m}$. Na rozdíl od strukturního tvaru je počet parametrů omezeného redukovaného tvaru** (kdy bereme v úvahu omezení kladená na strukturní parametry) **zpravidla jen o málo menší než $\mathbf{q}.\mathbf{m}$.**

Parametry redukovaného tvaru obsažené v matici Π jsou vždy odhadnutelné (obyčejnou metodou nejmenších čtverců OLS). Odhadnutá matice Π je zřejmě

1) $$\hat{\Pi}_{[q,m]} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}{}_{[q,q]}.\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}_{[q,m]}$$

Důležitější otázkou je, zda a za jakých podmínek lze zpětně z odhadu Π odvodit původní parametry (obsažené v maticích $\mathbf{B}, \mathbf{C}$), tzn. parametry námi uvažované i-té rovnice $\beta_{.i}, \gamma_{.i}$.

Pro detailní analýzu uvažujme např. vztahy mezi parametry 1.regresní rovnice (uvažování 1.rovnice není újmou na obecnosti, pouze přispěje k přehlednému zápisu).

Zapišme nyní ze vztahu $\mathbf{\Pi.(I-B)=C}$ jen ty prvky, které se bezprostředně vztahují ke strukturním parametrům první rovnice. Dostaneme :

$$2)\qquad \Pi_{[\boldsymbol{q},\boldsymbol{m}]}\cdot\begin{pmatrix} 1_{[1,1]} \\ -\beta_{.1[\boldsymbol{m}_1,1]} \\ 0_{[\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_1-1,1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{.1[\boldsymbol{q}_1,1]} \\ 0_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,1]} \end{pmatrix}$$

(U vektorů a matic jsou uvedeny pro větší názornost dimenze.)

K získání explicitnějších vztahů mezi uvažovanými parametry je třeba navíc rozdělit matici parametrů redukovaného tvaru Π tak, aby bylo patrné, které její submatice se vztahují k veličinám vystupujícím v 1. regresní rovnici [1]**:**

$$\Pi_{[\boldsymbol{q},\boldsymbol{m}]} = \begin{pmatrix} \pi_{[\boldsymbol{q}_1,1]} & \Pi_{[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]} & \Pi_{[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_1-1]} \\ \pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,1]} & \Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]} & \Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_1-1]} \end{pmatrix},$$

pro subvektory jsme použili značení $\pi_{[.,.]}$, pro submatice $\Pi_{[.,.]}$. Vztahy, které se přímo vztahují k parametrům první regresní rovnice, lze zapsat takto :

$$3A)\qquad \Pi_{[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]}.\beta_{.1[\boldsymbol{m}_1,1]} + \gamma_{.1[\boldsymbol{q}_1,1]} = \pi_{[\boldsymbol{q}_1,1]}$$

$$3B)\qquad \Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]}.\beta_{.1[\boldsymbol{m}_1,1]} = \pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,1]}$$

První "řádek" *3A)* představuje soustavu $\mathbf{m_1}$ rovnic o $\mathbf{m_1+q_1}$ neznámých $\boldsymbol{\beta}_{.1},\gamma_1$, druhý "řádek" *3B)* vyjadřuje soustavu $\mathbf{q-q_1}$ rovnic o $\mathbf{m_1}$ neznámých $\boldsymbol{\beta}_{.1}$ [2]**. Celá soustava $\mathbf{q}$ rovnic je jednoznačně řešitelná právě tehdy, jestliže existuje jednoznačné řešení části *3B)* pro strukturní parametry $\boldsymbol{\beta}_{.1}$.** (Část ***3A)*** má charakter rekursívní podsoustavy, která je vždy řešitelná).

Existence řešení podsoustavy *3B)* – které nemusí být nutně jediné - je klíčově závislé na tom, v jakém poměru jsou rozměry matice $\Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]}$ (nejsou-li jinak řádky nebo sloupce této matice lineárně závislé)**. V úvahu přicházejí tři možnosti:**

(A) **bude-li platit** $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1 < \mathrm{m}_1$

bude mít podsoustava *3B)* sice nekonečně mnoho algebraických řešení, ale nebude možno vyvodit žádné řešení statistického problému odhadu parametrů $\beta_{.1}$ (a následně ani $\gamma_{.1}$)**, protože nebude možné vyjádřit zbývající odhadované parametry jen pomocí známých veličin** (prvků $\Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]},\pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,1]}$)**. Zůstane totiž neurčených "přebytečných"** m_1 **parametrů $\delta_{\mathrm{q}_1+1}.....\delta_{\mathrm{q}_1+\boldsymbol{m}_1}$.**

Odhady parametrů (první) **strukturní rovnice není možné tedy statistickým způsobem nijak získat. Jde o případ podidentifikovanosti** (první) **regresní rovnice.**

---

[1] *Jak je patrné, dvě submatice, jmenovitě $\Pi_{[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_1-1]}$ a $\Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_{11},\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_1-1]}$ se nijak nepodílejí na vztazích mezi parametry 1.strukturní rovnice. (Mají však přirozeně vliv na vztahy mezi strukturními parametry ostatních rovnic).*

[2] *v předchozím i v dalším textu znamená vždy :*

$\mathbf{q_1}$ *počet vysvětlujících predeterminovaných proměnných i-té rovnice (včetně vektoru "1")*

$\mathbf{m_1}$ *počet vysvětlujících běž. endogenních proměnných i-té rovnice (pokud je v jiné literatuře uváděn pod m1 počet všech běžných endogenních proměnných i-té rovnice, je nutno podmínky identifikace formulovat jako $\boldsymbol{q}+1=\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{q}_1$).*

(B) **bude-li platit** $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1 = m_1$

je vidět, že soustava *3B)* bude mít právě jediné řešení za předpokladu, že submatice odhadů koeficientů redukovaného tvaru $\Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]}$ **je regulární, což nastane tehdy, bude-li navíc splněna hodnostní podmínka**

4) $$\mathbf{h}\left(\mathbf{\Pi}_{[\mathbf{q}-\mathbf{q}_1,\mathbf{m}_1]}\right) = \mathbf{m}_1$$

Pokud hodnostní podmínka splněna nabude, nastane obdobný problém jako v situaci (A). Pokud tedy současně s (B) nastane *4)*, lze odhady parametrů získat jednoznačně jako

5) $$\hat{\beta}_{.1[\boldsymbol{m}_1,1]} = (\hat{\Pi}_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]})^{-1}.\hat{\pi}_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,1]}$$
$$\hat{\gamma}_{.1[\boldsymbol{q}_1,1]} = \hat{\pi}_{[\boldsymbol{q}_1,1]} - \hat{\Pi}_{[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]}(\hat{\Pi}_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]})^{-1}.\hat{\pi}_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,1]}$$

Tato situace odpovídá případu přesné identifikovanosti (první) **regresní rovnice.**

(C) **bude-li platit** $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1 > m_1$

submatice $\Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]}$ **je nyní singulární. K tomu, aby existovalo nějaké řešení statistického problému odhadu, je nutné, aby zůstala v platnosti podmínka *3)*. Jinak by nastal stejný problém jako v situaci (B): při hodnosti** $m_1 - 1$ **by existovala regulární submatice** $\Pi_{[\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{m}_1]}$ **řádu i hodnosti** $m_1 - 1$**, z které bychom mohli odvodit nanejvýš** $m_1 - 1$ **parametrů** (avšak v závislosti na 1 neurčitelném (přebytečném) parametru). **Statisticky bychom tedy** (všechny) **parametry odvodit nemohli.**

Pokud zůstane v platnosti podmínka (C), je však patrné, že odhadované strukturní parametry $\beta_{.1}$ **nebudou vyhovovat všem rovnicím soustavy *3B)* – rovnic je jen** $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_1$**. Zatímco v algebraickém smyslu nebude soustava řešitelná** (počet neznámých parametrů $\beta_{.1}$ je menší než počet rovnic), **lze se při řešení statistického problému omezit pouze na** (libovolných) m_1 **těchto rovnic** (jsou-li lineárně nezávislé). **Dostaneme tak až** $\begin{pmatrix} \mathbf{q}-\mathbf{q}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix}$ **různých statistických řešení, tedy různých odhadů, které se uplatní ve druhém kroku -řešení podsoustavy *3A)*.**

Tento poslední případ odpovídá přeidentifikovanosti (první) **regresní rovnice, kdy lze odhady strukturních parametrů nalézt, ale ty nejsou určeny jednoznačně.**

Formální odvození ILS-odhadové funkce

Abychom získali tvar *ILS-odhadové funkce*, musíme vyjít z (úplné) odhadnuté matice parametrů redukovaného tvaru *1)*

$$\hat{\Pi}_{[q,m]} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}{}_{[q,q]}.\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}_{[q,m]}$$

Podotkněme, že pouze prvních m_1+1 sloupců matice $\hat{\Pi}$ vyjadřuje vztahy mezi parametry první strukturní rovnice. Je to nejlépe vidět z rozpisu (odhadnutých) prvků této matice, které získáme jako[3]

$$\text{6)} \qquad \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{[q,m]} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{y}_{1[q_1,1]} & \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_{1[q_1,m_1]} & \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}^{(1)}{}_{[q_1,m-m_1-1]} \\ \mathbf{X}^{(1)}{}'\mathbf{y}_{1[q-q_1,1]} & \mathbf{X}^{(1)}{}'\mathbf{Y}_{1[q-q_1,m_1]} & \mathbf{X}^{(1)}{}'\mathbf{Y}^{(1)}{}_{[q-q_1,m-m_1-1]} \end{pmatrix}$$

neboli - sloučíme-li v zápisu ***6)*** horních $\mathbf{q}_1$ a dolních $\mathbf{q}-\mathbf{q}_1$ řádků jedním vyjádřením[4] **-**

$$\hat{\Pi}_{[q,m]} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}_{1[q,1]} \quad \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}_{1[q,m_1]} \quad \mathbf{X}'\mathbf{Y}^{(1)}{}_{[q,m-m_1-1]}$$

Soustavy *3A)*, *3B)* lze zapsat (při takovém vyjádření, kde parametry redukovaného tvaru, resp. jejich odhady považujeme za známé) **ve tvaru**

$$\text{7)} \qquad \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{[q_1,m_1]} & \boldsymbol{I}_{[q_1,q_1]} \\ \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{[q-q_1,m_1]} & 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1[m_1,1]} \\ \hat{\gamma}_{1[q_1,1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix}$$

Přitom matici levé strany *7)* lze zapsat (*v pozorovaných v proměnných*) **jako**¨

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{[q_1,m_1]} & \boldsymbol{I}_{[q_1,q_1]} \\ \hat{\boldsymbol{\Pi}}_{[q-q_1,m_1]} & 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} = \left[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}_1;\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix}\right] = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\left[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}_1;\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}_1\right]$$

Všimněme si zde, že skutečně platí

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}_1. = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}.\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{[q_1,q_1]} \\ 0_{[q-q_1,q_1]} \end{pmatrix}$$

pokud je $\mathbf{q}_1$ predeterminovaných proměnných tvořících (po sloupcích) matici $\mathbf{X}_1$ posazeno právě v prvních $\mathbf{q}_1$ sloupcích matice $\mathbf{X}$.
Vektor na pravé straně *7)* lze podobně zapsat (v pozorovaných proměnných) **jako**

$$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}_{.1}$$

Pokud obě strany *7)* zapíšeme s vyjádřením vektoru parametrů $\delta_{.1}$, dostaneme

$$\text{8)} \qquad (X'X)^{-1}\left[X'Y_1, X'X_1\right].\delta_{.1} = (X'X)^{-1}X'y_{.1}$$

3 ***Veličiny $\mathbf{X}^{(1)}, \boldsymbol{Y}^{(1)}$ vyjadřují pozorování těch proměnných, které nejsou obsaženy v první regresní rovnici*** *(u $\mathbf{X}^{(1)}$ jde o predeterminované proměnné nepřítomné v $\mathbf{X}_1$, u $\boldsymbol{Y}^{(1)}$ jde o běžné endogenní proměnné nepřítomné v $\boldsymbol{Y}_1$).*

4 ***Uváděné dimenze se zde vztahuji vždy k součinům matic v závorce.***

S ohledem na to, že momentová matice $\mathbf{X'X}$ je regulární, lze vztah *8)* zjednodušit na

$$\textbf{\textit{9)}} \qquad [X'Y_1, X'X_1].\delta_{.1} = X'y_{.1}$$

Odtud je zřejmé, že odhad parametrů nepřímou metodou nejmenších čtverců bude založen na řešení rovnice tvaru

$$\textbf{\textit{10)}} \qquad [\mathbf{X'W_1}].\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1} = \mathbf{X'y}_{.1} \quad \text{čili} \quad [\mathbf{X'(Y_1, X_1)}].\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1} = \mathbf{X'y}_{.1}$$

kde $\mathbf{W_1 = (Y_1, X_1)}$. (zapsáno v dimenzích: $[\mathbf{X'}_{[q,T]}\mathbf{W}_{1[T,m_1+q_1]}].\hat{\boldsymbol{\delta}}_{.1[m_1+q_1,1]} = \mathbf{X'}_{[q,T]}\mathbf{y}_{.1[T,1]}$)

Je ale také zřejmé, že s ohledem na výše řečené není zajištěno, že matice $\mathbf{X'W_1}$ bude čtvercová, regulární a že tedy bude existovat matice k ní inverzní. Pokud tomu tak bude (k čemuž je nutné, aby platilo $\mathbf{m_1 + q_1 = q}$), pak lze odhad psát jako

$$\textbf{\textit{11)}} \qquad {}_{ILS}\hat{\delta}_{.1} = [\mathbf{X'}(\boldsymbol{Y}_1; \boldsymbol{X}_1)]^{-1}.\mathbf{X'y}_{.1}$$

Pokud bude platit $m_1 + q_1 < q$, pak bude vyjádření odhadnutých parametry neurčitější

$$\textbf{\textit{12)}} \qquad {}_{ILS}\hat{\delta}_{.1} = [\mathbf{X'}(\boldsymbol{Y}_1; \boldsymbol{X}_1)]^{-}.\mathbf{X'y}_{.1}$$

kde symbol „-“ znamená označení pseudoinverzní matice. Jak známo, pseudoinverzní matice není určena jednoznačně a tedy také odhad parametrů nebude jednoznačný.

Vlastnosti ILS-odhadové funkce

Lze ukázat, že ILS-estimátor strukturních parametrů modelu má tyto vlastnosti (v obecném zápise pro i-tou rovnici soustavy)

A) Odhady parametrů $\boldsymbol{\beta}_{.i},\boldsymbol{\gamma}_{.i}$ jsou konzistentní, neboť platí

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}{}_{ILS}\hat{\delta}_{.i}-\delta_{.i}=\underset{T\to\infty}{p\lim}\left[(X'W_i)^{-}X'(W_i\delta_{.i}+\varepsilon_{.i})\right]-\delta_{.i}=$$
$$=\underset{T\to\infty}{p\lim}'(X'W_i)^{-}X'W_i\delta_{.i}+\underset{T\to\infty}{p\lim}(X'W_i)^{-}X'\varepsilon_{.i})-\delta_{.i}=$$
$$=\delta_{.i}+\underset{T\to\infty}{p\lim}X'(Y_i;X_i)^{-}\underset{T\to\infty}{p\lim}X'\varepsilon_{.i}-\delta_{.i}=\underset{T\to\infty}{p\lim}X'(Y_i;X_i)^{-}\underset{T\to\infty}{p\lim}X'\varepsilon_{.i}=0$$

B) Odhady parametrů $\boldsymbol{\beta}_{.i},\boldsymbol{\gamma}_{.i}$ nejsou nestranné, protože

$$E_{ILS}\hat{\delta}_{.i}=E\left[(X'(Y_i;X_i))^{-}.X'y_{.1}\right]\neq E\left[(X'(Y_i;X_i))^{-}.E(X'y_{.1})\right]=\delta_{.i}$$

vzhledem k možné korelovanosti proměnných v $\mathbf{Y}_i$ a $\mathbf{y}_{.i}$ (přes $\varepsilon_{.i}$).

C) Odhady parametrů $\boldsymbol{\beta}_{.i},\boldsymbol{\gamma}_{.i}$ nejsou vydatné
(a to ani v rámci metod s omezenou informací).

D) Odhady parametrů $\boldsymbol{\beta}_{.i},\boldsymbol{\gamma}_{.i}$ jsou (za stejných předpokladů (e), (f), (g), (h) jako u *2SLS*) **asymptoticky normální, tedy platí**

$$\sqrt{T}.({}_{ILS}\hat{\delta}_{.i}-\delta_{.i})\approx N\left(0,\sigma_{ii}.\underset{T\to\infty}{p\lim}\left[\left(\frac{X_i'W_i}{T}\right)^{-}\left(\frac{X_i'X_i}{T}\right)\left(\frac{W_i'X_i}{T}\right)^{-}\right]\right.$$

Konzistentní odhad kovariancí ${}_{ILS}\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ pro jednotlivé rovnice získáme standardně:

$${}_{ILS}\hat{\sigma}_{ij}=\frac{{}_{ILS}e_{.i}'\,{}_{ILS}e_{.j}}{T}=\frac{\sum_{t=1}^{T}e_{ti}e_{tj}}{T}$$

kde za rezidua $e_{.i},e_{.j}$ vezmeme odhady náhodných složek $\varepsilon_{.i},\varepsilon_{.j}$ získané metodou *ILS*.

Ukážeme dále , že **odhadová funkce *ILS* je speciálním případem *IV*-odhadové funkce pro volbu matice instrumentálních proměnných $\mathbf{P}=\mathbf{X}$** (neboli jinak $\mathbf{A}=\mathbf{I}$)

Ověření *(v zápise pro první strukturní rovnici)*
Již víme, že soustavy *3A), 3B)* lze zapsat jako:

7) $$\begin{pmatrix}\hat{\Pi}_{[q_1,m_1]} & I_{[q_1,q_1]}\\ \hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & 0_{[q-q_1,q_1]}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\hat{\beta}_{1[m_1,1]}\\ \hat{\gamma}_{1[q_1,1]}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\pi}_{[q_1,1]}\\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]}\end{pmatrix}$$

Při vyjádření levé strany *7)* jako

$$\begin{pmatrix}\hat{\Pi}_{[q_1,m_1]} & I_{[q_1,q_1]}\\ \hat{\Pi}_{[q-q_1,m_1]} & 0_{[q-q_1,q_1]}\end{pmatrix}=\left[(X'X)^{-1}X'Y_1;\begin{pmatrix}I_{[q_1,q_1]}\\ 0_{[q-q_1,q_1]}\end{pmatrix}\right]=(X'X)^{-1}\left[X'Y_1;X'X_1\right]$$

a pravé strany *7)* pomocí výrazu $\begin{pmatrix} \hat{\pi}_{[q_1,1]} \\ \hat{\pi}_{[q-q_1,1]} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}_{.1}$

je **ILS- odhadová funkce** dána vztahy

$$11) \qquad {}_{ILS}\hat{\delta}_{.1} = [\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{Y}_1;\boldsymbol{X}_1)]^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}_{.1}$$

pokud je první rovnice přesně identifikovaná, resp.

$$12) \qquad {}_{ILS}\hat{\delta}_{.1} = [\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{Y}_1;\boldsymbol{X}_1)]^{-}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}_{.1} \, ,$$

pokud je první rovnice přeidentifikovaná.
IV- odhadová funkce (téže rovnice) je naproti tomu určena jako

$$13) \qquad {}_{IV}\hat{\delta}_{.1} = (\boldsymbol{P}'\boldsymbol{W}_1)^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{y}_{.1}$$

kde $\mathbf{P} = \mathbf{X}'\mathbf{A}$
Odtud je patrné, že volbou $\mathbf{P} = \mathbf{X}$ (rovnocenně definováním matice instrumentů $\mathbf{A} = \mathbf{I}_q$) dostaneme ${}_{IV}\hat{\delta}_{.1} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}_1)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}_{.1}$, čili výraz *11)*, pokud $\mathbf{m}_1 + \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$ případně ${}_{IV}\hat{\delta}_{.1} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}_1)^{-}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}_{.1}$ čili výraz *12)*, pokud $\mathbf{m}_1 + \mathbf{q}_1 < \mathbf{q}$.

V těchto případech tedy můžeme psát $\quad {}_{IV}\hat{\delta}_{.1} = (\boldsymbol{P}'\boldsymbol{W}_1)^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{y}_{.1} = {}_{ILS}\hat{\delta}_{.1}$

Znamená to tedy, že:

1) **ILS-odhadová funkce je speciálním případem IV-odhadové funkce při volbě matice instrumentů jako $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.**

2) **ILS-odhadová funkce není** na rozdíl od jiných estimátorů **určena jednoznačně a její existence resp. počet získaných řešení závisí na řešitelnosti soustavy *3B)*.**

Poznámka Jestliže je i-tá rovnice přesně identifikovaná, tzn.platí-li $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_i = \mathrm{m}_i$, potom je matice $\boldsymbol{A}_i$ definující v *13)* instrumentální proměnné jako prostý výběr z predeterminovaných proměnných jednotková řádu $\boldsymbol{q} = \mathrm{m}_i + \boldsymbol{q}_i$, tj. $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{I}_q$.

K odhadu uplatníme tedy všech $\boldsymbol{q}$ predeterminovaných proměnných.>

Jestliže je i-tá rovnice přeidentifikovaná, tzn.platí-li $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_i > \mathrm{m}_i$, **potom je matice** $\boldsymbol{A}_i$ definující v *13)* instrumentální proměnné jako prostý výběr z predeterminovaných proměnných **tvaru**

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{[m_i+q_i]} \\ 0_{[q, m_i+q_i]} \end{pmatrix} \qquad \text{tj.} \qquad \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{J}$$

Uplatníme tedy jen $\boldsymbol{m}_i + \boldsymbol{q}_i$ predeterminovaných proměnných ze všech $\boldsymbol{q}$, ostatní ignorujeme. Volba není jednoznačná, někdy máme vodítka, které tyto proměnné vzít.

Vztah mezi **nepřímou metodou nejmenších čtverců** (jako užší třídou) a **metodou instrumentálních proměnných** (jako obecnější třídou) lze charakterizovat asi tak, že v ILS se omezujeme jen na **instrumentální proměnné představované prostým výběrem z predeterminovaných proměnných**. Výběr těchto proměnných musí být dostatečný (počtem aspoň $\mathbf{m}_i + \mathbf{q}_i$), přičemž pokud je příslušná rovnice přeidentifikovaná, musíme se rozhodnout pro vzetí určitých $\mathbf{m}_i + \mathbf{q}_i$ predeterminovaných proměnných ze všech $\boldsymbol{q}$ disponibilních.