

Metoda maximální věrohodnosti s omezenou informací
LIML (Limited Information Maximum Likelihood)
v soustavě simultánních regresních rovnic
[Anderson, Rubin 1949¹]

Metoda maximální věrohodnosti s omezenou informací je jednodušším ze dvou postupů založených na principu minimalizace věrohodnostní funkce užívaných v prostředí interdependentních soustav simultánních regresních rovnic. Poskytuje konzistentní a (v rámci metod s omezenou informací také vydatné) odhady strukturních parametrů.

Předpokladem pro oprávněné uplatnění této metody je (aspoň přibližná) normalita rozdělení náhodných odchylek jednotlivých regresních rovnic (uplatňuje se v ní sdružené normální rozdělení náhodných složek všech m rovnic ve všech T pozorováních). Získání odhadů parametrů je však zpravidla obtížné a pouze v případě samostatného odhadu parametrů jediné regresní rovnice se lze vyhnout nutnosti nasazení numerických iteračních metod (u metody FIML se tyto uplatňují vždy).

LIML je odhadová procedura, která poskytuje odhad parametrů individuální strukturní rovnice tak, že se bezprostředně využívají apriorní omezení kladená (jen) na tuto rovnici - restriktce vztahované k ostatním rovnicím soustavy se neuplatňují ve stejné míře. V průběhu LIML procedury se eliminují parametry ostatních rovnic tím, že se provádí maximalizace výchozí věrohodnostní funkce vzhledem k nim (u sdružené hustoty normálního rozdělení je to možné, u jiných rozdělení to obecně možné není). Takto se obdrží **věrohodnostní funkce v tzv. koncentrovaném tvaru** (v ní parametry ostatních rovnic již nevystupují jako neznámé). Následně se provádí **maximalizace koncentrované věrohodnostní funkce**. V případě, že odhadujeme parametry jen jediné rovnice, se zde již berou v úvahu pouze všechna apriorní omezení položená na parametry této rovnice.

Oproti LS-přístupu představují ML-techniky složitější postupy při kvantifikaci parametrů v simultánní soustavě regresních rovnic. Můžeme je přitom uplatnit jak na strukturní, tak na redukovaný tvar ekonometrického modelu. Zde se budeme nejdříve věnovat odhadu redukovaného tvaru. Úvodní část LIML-přístupu (též pro strukturní tvar) je přitom shodná s odvozením metody FIML (v podstatě až do fáze vyvození koncentrované věrohodnostní funkce). Teprve od okamžiku odděleného pohledu na parametry analyzované rovnice (popř. podsoustavy rovnic) a na parametry ostatních rovnic se uplatňuje specifický LIML-algoritmus.

Metody reprezentující přístup maximalizace věrohodnostní funkce přistupují k proměnným v rovnicích více „symetricky“ než LS-techniky. Se závisle proměnnou se zachází „téměř stejně“ jako s vysvětlujícími běžnými endogenními proměnnými, avšak důsledně se zachovává odlišení běžných endogenních a predeterminovaných proměnných. Proto se také – na rozdíl od častějšího vyjádření strukturního tvaru v zápisu

$$1) \quad Y = Y.B + X.C + E$$

- uplatňuje spíše zápis

$$2) \quad Y.B + X.C = E$$

Připomeňme, že zatímco v případě 1) má redukovaný tvar zápis

$$3) \quad Y = X.\Pi^* + V,$$

kde $\Pi^* = C(I - B)^{-1}$, $V = E(I - B)^{-1}$

má redukovaná forma pro model 2) podobu

¹ Anderson T.W., Rubin, H. : Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations. Annals of Math.Statistics 20/1949

$$4) \quad Y = X \cdot \Pi^* + V, \text{ kde ale } \Pi^* = -CB^{-1}, \quad V = EB^{-1}$$

Tomu odpovídá i jiné normování diagonálních prvků matice B : Zatímco pro strukturní tvar 1) je přirozené normování $\beta_{ii} = 0$, je ekvivalentní normalizace pro tvar 2) dána podmínkou

$\beta_{ii} = 1; i = 1, 2, \dots, m$. Z toho vyplývající rozdílnosti se přenášejí též na parametry redukováných tvarů 3), resp. 4).

Další (méně zřetelnou) rozdílností oproti LS-přístupu je zacházení s omezeními kladenými na parametry (strukturního) tvaru. Zatímco v LS-přístupu se omezení položená na strukturní parametry (tj. na vektory $\beta_{\cdot i}, \gamma_{\cdot i}$) berou v úvahu „od samého počátku“, tzn. respektujeme specifikace jednotlivých rovnic (s přítomností/nepřítomností vysvětlujících proměnných) na počátku vyvozování jednotlivých estimátorů (u 3SLS navíc i vztahy mezi náhodnými složkami rovnic), u ML-přístupů se tyto restriktce zavádějí až do výsledného tvaru (koncentrované) věrohodnostní funkce odvozeného estimátoru. Na samém počátku tedy do matic B, C nejsou zahrnuty žádné apriorní restriktce (ohledně nepřítomnosti některých proměnných v některých rovnicích).

Kromě standardních předpokladů a) - d) a doplňujících e), g) připojujeme předpoklad o normálním rozdělení náhodných složek

$$\varepsilon_t \approx N(0, \Sigma)$$

který zesiluje předpoklady f), h).

Zapišeme-li redukováný tvar modelu např. ve tvaru 3), pak se položené restriktce přenášejí z matic B, C na Π^* . V případě ML technik však vyvození estimátoru pro redukováný tvar probíhá na počátku opět bez uvažování těchto apriorních restriktcí.

Poznámka Matice redukováného tvaru (psaná s hvězdičkou) Π^* má zde rozměry $[q, m]$ a je takto transpozicí matice $\Pi = (I - B)^{-1} C$. (Zápis Π^* je nutný právě v tomto tvaru, poněvadž věrohodnostní funkce operuje s pozorováními modelových proměnných).

A) Nejprve odvodíme výraz pro odhad parametrů redukováného tvaru modelu

Odhad parametrů redukováného tvaru modelu metodou maximální věrohodnosti se odvodí na základě rozdělení vektorů v_t . (náhodných složek redukováného tvaru): Za přijatého předpokladu o rozdělení ε_t platí pro rozdělení náhodných složek redukováného tvaru v_t :

$$5) \quad v_t \approx N(0, \Omega)$$

$$\text{kde } \Omega = (I - B)^{-1} \Sigma (I - B)^{-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Sdružené rozdělení vektorů v_t . (všech prvků matice V realizací náhodných složek redukováného tvaru) má pak tvar:

$$6) \quad f(v_1, v_2, \dots, v_T) = \prod_{t=1}^T \left[(2\pi)^{-m/2} |\Omega|^{-1/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} v_t' \cdot \Omega^{-1} v_t \right\} \right]$$

Při maximalizaci této hustoty nejprve nahradíme prvky Π^* a v_t pozorovanými proměnnými obsaženými v maticích X, Y . Nejprve využijeme toho, že platí $v_t = y_t - x_t \Pi^*$

Formální tvar koncentrované věrohodnostní funkce (zapsané pro všech T pozorování všech m rovnic), kdy příslušný Jakobián transformace při přechodu od v_t k y_t je roven 1, bude sdružená hustota (věrohodnostní funkce) rozdělení (počtem m) vektorů v_t rovna výrazu

7)

$$L(\Pi^*, \Omega; Y, X) = (2\pi)^{-mT/2} |\Omega|^{-T/2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (y_t - x_t \cdot \Pi^*) \Omega^{-1} (y_t - x_t \cdot \Pi^*)' \right\}$$

Určit (metodou ML) parametry matice redukovaného tvaru Π^* znamená nalézt takové prvky této matice, při nichž sdružená hustota nabývá svého maxima (při pevně daných hodnotách matic pozorování X, Y a nějak odhadnuté kovarianční matici Ω). Sumaci v exponenciále lze zapsat jako stopu součinu tří matic

$$8) \quad \left\{ \sum_{t=1}^T (y_t - x_t \cdot \Pi^*) \Omega^{-1} (y_t - x_t \cdot \Pi^*)' \right\} = \text{tr} (Y - X\Pi^*) \Omega^{-1} (Y - X\Pi^*)'$$

Poznamenejme, že (při zavedených omezeních na rovnice) se odhaduje celkem m_q parametrů redukovaného tvaru z celkem $\sum m_i + q_i$ parametrů (omezeného) strukturního tvaru. Úpravami operujícími s vlastností komutativity stopy matice lze dospět k vyjádření²

$$9) \quad \Lambda(\Pi^*, \Omega; Y, X) = -\frac{mT}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln|\Omega| - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Omega^{-1} (Y - X\Pi^*) (Y - X\Pi^*)' \right\}$$

Odtud, parciálními derivacemi Λ podle všech prvků π^* (matice Π^*) získáme podmínky

$$10) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi^*} = -X' X \Pi^* \Omega^{-1} + X' Y \Omega^{-1} = 0.$$

a z nich vzhledem k regularitě matice Ω dále odhad Π^* jako $\hat{\Pi}^* = (X' X)^{-1} X' Y$ (tedy shodně jako o metody OLS).

Poznámka Všimněme si, že odhad Π^* nijak nezávisí na kovarianční matici Ω .

B) Nyní přistoupíme k podstatně obtížnější úloze, kterou je **odvození LIML-odhadové funkce strukturních parametrů modelu**.

Protože první úsek tohoto odvození je shodný též pro estimátor FIML, dostaneme v jisté fázi výraz i pro tuto odhadovou funkci (jak se s ní naloží dále, nebudeme zde blíže rozebírat). Logaritmovaná věrohodnostní funkce, která je mj. východiskem pro odvození LIML i FIML-estimátoru obsahující všechny neznámé parametry (strukturní obsažené v maticích B, C a stochastické obsažené v matici Σ) celého m -rovnicevého modelu má tvar

$$11) \quad \Lambda(B, C, \Sigma; Y, X) = -\frac{m \cdot T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln|\Sigma| + T \cdot \ln|I - B| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [y_t \cdot (I - B) - x_t \cdot C] \Sigma^{-1} [y_t \cdot (I - B) - x_t \cdot C]'$$

² Věrohodnostní funkci zde značíme L , logaritmovanou věrohodnostní funkci pak Λ .

Užijeme-li zkrácené notace, při níž sdružíme proměnné i parametry nerozlišující, zda jde o běžné endogenní nebo predeterminované veličiny, s označením

$$Z = (Y, X), A = \begin{pmatrix} I - B \\ -C \end{pmatrix}, M = \frac{Z'Z}{T} \quad \text{tj.} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{Y'Y}{T} & \frac{Y'X}{T} \\ \frac{X'Y}{T} & \frac{X'X}{T} \end{pmatrix}$$

můžeme zapsat 11) v jednodušší notaci

$$12) \quad \Lambda(B, C, \Sigma; Y, X) = -\frac{m \cdot T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln|\Sigma| + T \cdot \ln|I - B| - \frac{T}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1} A' M A)$$

Abychom maximalizovali tuto funkci ve vztahu k neznámým parametrům B, C a Σ , budeme postupovat ve dvou krocích: Nejdříve pořídíme estimátor pro Σ (třeba v závislosti na neznámých parametrech B, C) a poté takto získanou hodnotu Σ dosadíme do 12)³, abychom dále maximalizovali již jen ve vztahu k B, C . Věrohodnostní funkce, která již má **eliminováno** Σ (resp. hodnoty této matice jsou nějak vhodně odhadnuty) se nazývá **koncentrovaná (logaritmovaná) věrohodnostní funkce** (v ní jsou už hodnoty prvků dosazených v Σ vzaty jako známé a již jim dále pozornost nevěnujeme).

Naznačený první krok maximalizace⁴ vede k odhadu Σ tvaru

$$13) \quad \hat{\Sigma} = A' M A$$

Jeho dosazení do 12) vede ke koncentrované (logaritmované) věrohodnostní funkci

$$14) \quad \Lambda(B, C, Y, X) = -\frac{m \cdot T}{2} [\ln(2\pi) + 1] + T \cdot \ln|I - B| - \frac{T}{2} \ln|A' M A|$$

kteřá bude dále maximalizována (již jen) ve vztahu k neznámým parametrům B, C . Až sem je postup pro odvození LIML-estimátoru shodný s FIML- odhadovou funkcí. Z tvaru 14) je patrné, že parametry matic B, C obsažené ve druhém a třetím členu (v logaritmovaných determinantech) jsou přítomny v silně nelineárních tvarech. Výraz pro maximalizované hodnoty parametrů obsažených v B, C nemůže být zde uveden v explicitním tvaru. Jejich získání je tedy možné pouze pomocí algoritmu některé účinné numerické iterační techniky.

C) Získání odhadové funkce LIML pro nějaký subsystém ($m^* > 1$) rovnic je dosti složitá procedura, kterou dále popíšeme.

Jejím účelem je odhad parametrů libovolné podsoustavy m^* z původních m strukturních rovnic. K odhadům parametrů se zde nepřístupuje symetricky (jinak by se žádný rozdíl oproti FIML proceduře nemohl projevit). Předmětem úlohy je koncentrace na odhadované parametry m^* rovnic (jež jsou předmětem zájmu), aniž by se ovšem zcela ignorovala informace obsažená ve zbývajících $m - m^*$ rovnicích. Formálně vzato, z ostatních rovnic přebíráme kauzální vztahy které jsou obsaženy v jejich specifikacích, avšak ignorujeme všechna omezení na parametry na těchto $m - m^*$ rovnic (např. ta, že určitá rovnice neobsahuje určité proměnné a zejména informace o závislosti náhodných složek jednotlivých rovnic, které jinak pořizujeme ze souhrnné kovarianční matice Σ modelu). Abychom rozlišili, které parametry jsou vlastním předmětem zájmu (nazvěme je pracovně „**interesantní**“) a které jsou mimo vlastní předmět zájmu

³ Že je to možné, není obecně samozřejmé, ale umožňuje to tvar věrohodnostní funkce mj. právě pro normální rozdělení.

⁴ Pouze druhý a čtvrtý člen v 12) obsahují Σ , důkaz platnosti 13) vyžaduje derivace 12) podle σ^j .

(„neinteresantní“), musíme množinu těchto parametrů rozdělit na části. U strukturních parametrů proto vybereme podskupiny: z matic B, C (resp. z výše uvedené matice A) vybereme vždy části, které dovolí rozlišit **interesantní od neinteresantních parametrů**:

- **skupina interesantních parametrů** bude obsažena v maticích B_I, C_I , resp. v souhrnné matici A_I : v m^* sloupcích matice B_I budou parametry β_I , příslušné běžným endogenním proměnným prvních m^* rovnic, v m^* sloupcích matice C_I budou parametry γ_I příslušné predeterminovaným proměnným prvních m^* rovnic.

- **skupina neinteresantních parametrů** bude obsažena v maticích B_{II}, C_{II} , resp. v souhrnné matici A_{II} : v $m - m^*$ sloupcích matice B_{II} budou parametry β_{II} příslušné běžným endogenním proměnným zbývajících $m - m^*$ rovnic, v $m - m^*$ sloupcích matice C_{II} budou parametry γ_{II} příslušné predeterminovaným proměnným zbývajících $m - m^*$ rovnic.

Množinu všech strukturních parametrů A tedy rozdělíme na bloky v závislosti na příslušnosti k prvním m^* rovnicím, resp. ke zbývajícím $m - m^*$ rovnicím:

$$A = \begin{bmatrix} A_I & A_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_I & B_{II} \\ C_I & C_{II} \end{bmatrix}$$

Rozměry jednotlivých matic jsou:

$$B_I : [m, m^*], B_{II} : [m, m - m^*], C_I : [q, m^*], C_{II} : [q, m - m^*], \\ A_I : [m + q, m^*], A_{II} : [m + q, m - m^*]$$

u stochastických parametrů to provedeme rozdělením matice Σ na bloky

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Interesantní stochastické parametry jsou zde obsaženy v matici Σ_{11} prvního bloku matice Σ , která definuje kovarianční strukturu mezi náhodnými složkami prvních m^* modelových rovnic. Rozměry ostatních čtvercových (symetrických a pozitivně definitních matic) jsou u matice $\Sigma_{12} : [m^*, m - m^*]$ a u matice $\Sigma_{22} : [m - m^*, m - m^*]$.

Dalším krokem je **eliminace neinteresantních parametrů** obsažených v A_{II} částečnou maximalizací 14) ve vztahu k nim a následné dosazení hodnot nalezených maximalizujících neinteresantních parametrů do 14). Při této maximalizaci se zanedbávají všechna apriorní omezení kladená na množinu neinteresantních parametrů což (na rozdíl od FIMLu) musí snižovat účinnost (vydatnost) této procedury. Kompenzací této ztráty je však přínos, že nadále můžeme operovat s menším a možná jednodušším systémem rovnic, z nichž se odvodí⁵ estimátor pro prvky obsažené v A_I . Zjednodušení (i když ne na pohled) výrazu 14) je možné v důsledku výpočtů některých jeho členů, při nichž se separuje vliv interesantních a neinteresantních parametrů (již jsme řekli, že na každou skupinu pohlížíme odlišně).

⁵ podrobné odvození viz Dhrymes Ph.J.B. : Econometrics – Statistical Foundations and Applications str. 333 a násled.

Přitom se zavádí transformační matice (značená zde \mathbf{H}), která musí splňovat dvě podmínky:

a) obě skupiny parametrů (na jedné straně interesantních strukturních \mathbf{A}_I a stochastických v Σ_{11} , na druhé straně neinteresantních strukturních \mathbf{A}_{II} a stochastických v Σ_{22}) jsou vzájemně nezávislé

b) při transformaci se žádným způsobem neporuší hodnoty interesantních parametrů.

Požadavek a) zajišťuje, že informace ztracená ignorováním omezení položených na neinteresantní parametry je minimalizována. Požadavek b) zajišťuje, že estimátor bude formulován výlučně pro interesantní parametry.

Transformující matice \mathbf{H} , která má vyhovět a) i b), musí splňovat mj. toto :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{H} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_I & \mathbf{B}_{II} \\ \mathbf{C}_I & \mathbf{C}_{II} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}'\Sigma\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$$

\mathbf{P} libovolná (rozměry vhodná) matice

Podrobná analýza⁶ vyústí ve zkonkrétnění volby matice \mathbf{H} jako

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Sigma_{11}^{-1} \cdot \Sigma_{12} \mathbf{H}_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix}$$

kde \mathbf{H}_{22} musí splňovat, že $\mathbf{H}_{22}(\Sigma_{22} - \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})\mathbf{H}_{22} = \mathbf{I}_m$.

Dále se využije vlastnosti transformační matice \mathbf{H} k tomu, aby se získalo **vyjádření, které separuje (tam, kde je to možné) interesantní parametry od neinteresantních.**

Logaritmovaná věrohodnostní funkce běžných endogenních proměnných 14) má v kontextu provedené transformace tento tvar :

$$15) \quad \Lambda(\mathbf{A}, \mathbf{H}, \Sigma; \mathbf{Y}, \mathbf{X}) = -\frac{m \cdot T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln|\mathbf{H}'\Sigma\mathbf{H}| + T \cdot \ln|(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{H}| \\ - \frac{T}{2} \cdot \sum_{t=1}^T (\mathbf{z}_t' \mathbf{A}\mathbf{H}) (\mathbf{H}'\Sigma\mathbf{H})^{-1} (\mathbf{z}_t' \mathbf{A}\mathbf{H})' \quad \mathbf{z}_t = (\mathbf{y}_t, \mathbf{x}_t)$$

a protože lze dále ukázat, že ve vztahu k poslednímu výrazu v 15) platí, že

$$\text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{H})(\mathbf{H}'\Sigma\mathbf{H})^{-1}(\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{H})' = T \cdot \text{tr}(\Sigma_{11}^{-1} \mathbf{A}_I' \mathbf{M} \mathbf{A}_I) + T \cdot \text{tr}(\mathbf{A}_{II}' \mathbf{M} \mathbf{A}_{II})$$

lze 15) dekomponovat do tvaru

$$16) \quad \Lambda(\mathbf{A}_I, \Sigma_{11}, \mathbf{A}_{II}; \mathbf{Y}, \mathbf{X}) = -\frac{m \cdot T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln|\Sigma_{11}| + T \cdot \ln|\mathbf{B}_I, \mathbf{B}_{II}| \\ - \frac{T}{2} \text{tr}[\Sigma_{11}^{-1} \mathbf{A}_I' \mathbf{M} \mathbf{A}_I] - \frac{T}{2} \text{tr}\{\mathbf{A}_{II}' \mathbf{M} \mathbf{A}_{II}\}$$

Zde jsou již interesantní parametry skoro zcela odděleny od neinteresantních (platí to pro 2., 4. a 5. člen, není to však ještě plně pravda, protože ve třetím členu jsou v determinantu promíchány \mathbf{B}_I s \mathbf{B}_{II}). Dalším krokem tedy bude vyloučení překážejících neinteresantních parametrů \mathbf{B}_{II} tím, že se výraz 16) dílčím způsobem maximalizuje ve vztahu k nim (a pak se do něj nalezené

⁶ opět viz Dhrymes Ph.J.B. : Econometrics – Statistical Foundations and Applications str. 330-332.

maximalizující hodnoty opět dosadí). Apriorní restriktce případně položené na parametry v B_{II} zanedbáváme.

Maximalizace 16) proběhne standardním způsobem tak, že se podle těchto členů derivuje a získané vztahy se položí rovny nule. S ohledem na to, že neinteresantní parametry jsou obsaženy jen ve 3. a 5. členu 16), jsou derivace ostatních tří členů v 16) podle nich nulové.

Proto nabudou podmínky 1. řádu jednoduššího tvaru

$$17a) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial B_{II}} = T \cdot \frac{\partial \ln |B_I, B_{II}|}{\partial B_{II}} - \frac{T}{2} \cdot \frac{\partial \text{tr}(A_{II}' M A_I)}{\partial B_{II}} = 0.$$

Protože M je symetrická matice, platí

$$17b) \quad \frac{\partial \text{tr}(A_{II}' M A_I)}{\partial B_{II}} = 2 M B_{II}.$$

V průběhu derivování druhého členu a v následném nikoliv jednoduchém odvozování se využije skutečnosti, že hodnota výrazu $\text{tr}(A_{II}' M A_I)$ je rovna $m - m^*$, mj. protože platí

$$17c) \quad A_{II}' M A_I = \begin{pmatrix} 0 & I_{m-m^*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_I' \\ B_{II}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_I' \\ B_{II}' \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ I_{m-m^*} \end{pmatrix} = I_{m-m^*}$$

Hodnota výrazu $\ln |B_I, B_{II}|$ ve třetím členu 16) je zase rovna

$$17d) \quad \ln |B_I, B_{II}| = \frac{1}{2} \ln |B_I' W B_I| - \frac{1}{2} \ln |W|$$

Po těchto všech dosazeních do 16) dostaneme výraz pro maximalizovanou věrohodnostní funkci příslušnou LIML-estimátoru pro libovolný subsystém m^* rovnic ze soustavy všech m rovnic, ta má tvar :

$$18) \quad \Lambda(A_I, \Sigma_{II}; Y, X) = -\frac{m \cdot T}{2} [\ln(2\pi) + 1] + \frac{T}{2} m^* - \frac{T}{2} \ln |W| - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_{II}| + \frac{T}{2} \ln |B_I' W B_I| - \frac{T}{2} \cdot \text{tr} \left\{ \Sigma_{II}^{-1} \cdot A_I' \cdot M \cdot A_I \right\}$$

Zde, podobně jako u FIML procedury, maximalizujeme tento výraz při splnění všech apriorních omezení položených na (neznámé) parametry A_I a Σ_{II} . Stejně jako v předchozím případě však musíme užít některou z rejstříku numerických iteračních metod.

D) Výše uvedený postup v případě, že LIML-proceduru nasadíme k odhadu parametrů pouze jediné rovnice, lze zjednodušit následovně (zápis provedeme pro 1. modelovou rovnici)

Pokud je sledovaný subsystém tvořen pouze jedinou rovnicí tzn. když $m^* = 1$, je předmětem odhadu toliko m_1 a q_1 interesantních parametrů. V tomto případě sice nelze pro odhad těchto parametrů odvodit explicitní výraz, ale není třeba už při výpočtu užívat iterační metody jako tomu bylo v předchozí „vícerovnicové“ verzi LIML nebo v metodě FIML.

Předmětem problému je zde nalezení pouze $m_1 + q_1 + 1$ neznámých parametrů, totiž

$$\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1m_1}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1q_1}, \sigma_{11}$$

Jednodušší situace nám umožňuje zjednodušit značení: jako α_1 označíme $m_1 + q_1$ - členný vektor všech strukturních parametrů, matice Σ_{11} se redukuje na skalár zde označený σ_{11} .

Již jsme zmínili, že na rozdíl od odhadových funkcí 2SLS, IV a 3SLS, u kterých se ukazuje jako vhodnější formulace strukturní formy ekonometrického modelu v zápisu

$$19) \quad y_{ti} = \sum_{j=1}^m \beta_{ji} y_{tj} + \sum_{s=1}^m \gamma_{si} x_{sj} + \varepsilon_{ti}$$

je v případě LIML a FIML estimátorů výhodnější zápis

$$20) \quad \sum_{j=1}^m \beta_{ji} y_{tj} = \sum_{s=1}^m \gamma_{si} x_{sj} + \varepsilon_{ti}$$

Jak dále zdůvodníme, nejsme zde ani striktně omezeni na normalizaci $\beta_{jj} = 1$, odpovídající normalizaci $\beta_{jj} = 0$ u prvé zápisu (jako by tomu bylo u 2SLS). Vzhledem k tomu, že v LIML-odhadové proceduře (mj. při výpočtu asymptotické kovarianční matice) se zachází místy odděleně se **strukturami proměnných přítomných a nepřítomných** v analyzované strukturní rovnici, rozdělíme v souladu s tímto momentové matice modelových proměnných.

Z toho důvodu rozdělíme momentové matice pozorovaných proměnných na bloky

$$M = \begin{pmatrix} M_{y_1 y_1} & M_{y_1 y_2} & M_{y_1 x_1} & M_{y_1 x_2} \\ M_{y_2 y_1} & M_{y_2 y_2} & M_{y_2 x_1} & M_{y_2 x_2} \\ M_{x_1 y_1} & M_{x_1 y_2} & M_{x_1 x_1} & M_{x_1 x_2} \\ M_{x_2 y_1} & M_{x_2 y_2} & M_{x_2 x_1} & M_{x_2 x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} Y_1' Y_1 & Y_1' Y_2 & Y_1' X_1 & Y_1' X_2 \\ Y_2' Y_1 & Y_2' Y_2 & Y_2' X_1 & Y_2' X_2 \\ X_1' Y_1 & X_1' Y_2 & X_1' X_1 & X_1' X_2 \\ X_2' Y_1 & X_2' Y_2 & X_2' X_1 & X_2' X_2 \end{pmatrix}$$

Obdobně rozdělíme i matici reziduí W na 4 bloky

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{y_1 y_1} - M_{y_1 x} M_{xx}^{-1} M_{xy_1} & M_{y_1 y_2} - M_{y_1 x} M_{xx}^{-1} M_{xy_2} \\ M_{y_2 y_1} - M_{y_2 x} M_{xx}^{-1} M_{xy_1} & M_{y_2 y_2} - M_{y_2 x} M_{xx}^{-1} M_{xy_2} \end{pmatrix}$$

V této notaci můžeme zapsat členy z předchozího zápisu 18) na

$$21a) \quad \alpha_0' M \alpha_0 = \beta_{.1}^0 M_{y_1 y_1} \beta_{.1}^0 - 2 \gamma_{.1}' M_{y_1 x_1} \beta_{.1}^0 + \gamma_{.1}' M_{x_1 x_1} \gamma_{.1}$$

$$21b) \quad B_1' W B_1 = \beta_{.1}^0' W_{11} \beta_{.1}^0$$

a celý výraz 18) přejde po příslušných dosazeních do tvaru

$$22) \quad \Lambda^*(\alpha_{.1}, \sigma_{11}; Y, X) = -\frac{m \cdot T}{2} [\ln(2\pi) + 1] - \frac{T}{2} \ln \sigma_{11} + \frac{T}{2} \text{tr} \left[\beta_{.1}^0' \cdot W_{11} \beta_{.1}^0 \right] + \frac{T}{2} \text{tr} [1 - \ln |W|] - \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}} \left\{ \beta_{.1}^0' M_{y_1 y_1} \beta_{.1}^0 - 2 \gamma_{.1}' M_{x_1 y_1} \beta_{.1}^0 + \gamma_{.1}' M_{x_1 x_1} \gamma_{.1} \right\}$$

Dospět k hodnotám parametrů, při kterých je tato (logaritmovaná) věrohodnostní funkce maximalizována, znamená derivovat (současně nebo postupně s dosazováním) 22) podle jednotlivých parametrů $\beta_{.1}^0$, $\gamma_{.1}$ a σ_{11} a takto vzniklé výrazy položit rovné 0 :

Derivováním 22) podle $\gamma_{.1}$ a následným anulováním dostaneme soustavu rovnic

$$23a) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{.1}} = -\frac{T}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}} \cdot \left(-2 \cdot M_{x_1 y_1} \beta_{.1}^0 + 2 M_{x_1 x_1} \gamma_{.1} \right) = 0$$

Podobně, položením parciálních derivací podle σ_{11} nule dostaneme soustavu rovnic

$$23b) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \sigma_{11}} = -\frac{T}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}} + \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}^2} \left[\beta_{.1}^0 \cdot M_{y_1 y_1} \beta_{.1}^0 - 2 \cdot \gamma_{.1} \cdot M_{x_1 y_1} \beta_{.1}^0 + \gamma_{.1} \cdot M_{x_1 x_1} \gamma_{.1} \right] = 0$$

Konečně, derivováním podle vektoru parametrů $\beta_{.1}^0$ máme

$$23c) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta_{.1}^0} = \frac{T}{2} \cdot \frac{2 \cdot W_{11} \beta_{.1}^0}{\beta_{.1}^0 \cdot W_{11} \beta_{.1}^0} - \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}} \left[2 M_{y_1 y_1} \beta_{.1}^0 - 2 M_{x_1 y_1} \gamma_{.1} \right] = 0$$

Jednoduchými úpravami 24) dostaneme z obsahu závorky vztah mezi vektory parametrů u předeterminovaných a běžných endogenních proměnných :

$$24) \quad \gamma_{.1} = M_{x_1 x_1}^{-1} M_{x_1 y_1} \beta_{.1}^0$$

a to nezávisle na hodnotách parametru σ_{11} . Máme-li tedy dáno σ_{11} a $\beta_{.1}^0$, pak z 24) obdržíme hodnotu $\gamma_{.1}$, která globálně maximalizuje 22). Všimněme si, že pokud takto nalezenou hodnotu 24) vložíme do 22), dostaneme pro ML- odhad σ_{11} vyjádření :

$$25) \quad \tilde{\sigma}_{11} = \beta_{.1}^0 \cdot \left(M_{y_1 y_1} - M_{y_1 x_1} M_{x_1 x_1}^{-1} M_{x_1 y_1} \right) \beta_{.1}^0$$

Že jde skutečně o maximum, se lze přesvědčit vypočtením druhé derivace

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \sigma_{11}^2} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}^2} - \frac{T}{2} \cdot \frac{2 \cdot \sigma_{11}}{\sigma_{11}^3} = -\frac{T}{2 \sigma_{11}^2} < 0$$

Nyní zbývá již jen dosadit předchozí výrazy 24) a 25) do 22) a provést závěrečnou maximalizaci k poslednímu vektoru, totiž $\beta_{.1}^0$. Dostaneme

$$26) \quad \Lambda^*(\beta_{.1}; Y, X) = c_0 - \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \ln \left[\frac{\beta_{.1}^0 \cdot W_{11} \cdot \beta_{.1}^0}{\beta_{.1}^0 \cdot W_{11} \beta_{.1}^0} \right]$$

$$\text{kde } c_0 = -\frac{mT}{2} [\ln(2\pi) + 1] + \frac{T}{2} \cdot (1 - \ln |W|)$$

Odtud je zřejmé, že řešení spočívá v nalezení takového vektoru $\beta_{.1}^0$, který minimalizuje skalární hodnotu

$$27) \quad \left[\frac{\beta_{.1}^{0'} W_{11}^* \beta_{.1}^0}{\beta_{.1}^{0'} W_{11} \beta_{.1}^0} \right]$$

Všimněme si, že tento výraz je homogenní stupně 0 v $\beta_{.1}^0$; *jinými slovy*: po násobení vektoru $\beta_{.1}^0$ jakýmkoliv kladným číslem se platnost výrazu 27) zachovává. Vektor $\beta_{.1}^0$ tedy nemůže být určen jednoznačně.

Jednoznačnosti lze ovšem dosáhnout, pokud nějakým způsobem složky $\beta_{.1}^0$ normujeme. Jedna možná cesta k této normalizaci, směřující k přiblížení k normování použitým u 2SLS odhadové procedury, by bylo normování $\beta_{11}^0 = 1$, jinou možností pak např. $\beta_{11}^{0'} \beta_{11}^0 = 1$ nebo obecněji $\beta_{11}^{0'} W_{11} \beta_{11}^0 = 1$.

Při snaze minimalizovat výraz 27) lze dekompozicí pozitivně definitních matic W_{11} a W_{11}^* na tvar $W_{11} = F'F$, $W_{11}^* = F' \Lambda F$, kde F je regulární matice a Λ je diagonální matice vlastních čísel W_{11}^* v mtrice matice W_{11} ukázat, že minimální hodnoty 27) bude dosaženo právě tehdy, jestliže zvolíme za $\beta_{.1}^0$ vlastní (charakteristický) vektor matice W_{11}^* v mtrice matice W_{11} tj. vektor, který splňuje rovnici

$$28) \quad W_{11}^* \cdot \beta_{.1}^0 = \lambda^* \cdot W_{11} \cdot \beta_{.1}^0$$

(Vynásobením obou stran 28) vektorem $\beta_{.1}^0$ zleva získáme totiž právě vyjádření

$$29) \quad \lambda = \frac{\beta_{.1}^{0'} W_{11}^* \beta_{.1}^0}{\beta_{.1}^{0'} W_{11} \beta_{.1}^0}$$

z něhož je zřejmé, že musí jít právě o nejmenší charakteristické číslo zmíněné matice)

E) Vyšetříme ještě situaci, jak se zjednoduší LIML-estimátor v případě, když analyzovaná rovnice neobsahuje žádné vysvětlující běžné endogenní proměnné, tj. když $m_1 = 1$.

Na rozdíl od metod 2SLS, ILS či IV, kde lze odpověď vyvodit prakticky okamžitě z výrazů definujících tyto estimátory (ve všech případech dojde ke ztotožnění s prostým OLS estimátorem), to nemusí být na první pohled zřejmé. Ukážeme, že i zde bude výslednou odhadovou funkcí **prostá OLS**:

Ukázali jsme výše, že v průběhu LIML procedury došlo k postupné eliminaci parametrů ostatních rovnic tím, že se provedla dílčí maximalizace výchozí věrohodnostní funkce 18) vzhledem k nim. Tímto jsme obdrželi koncentrovanou věrohodnostní funkci, ze které se již přímo vyvozují hledané parametry analyzované rovnice (s respektováním všech omezení na ně položených). Tvar této koncentrované věrohodnostní funkce pro LIML estimátor je tedy :

30)

$$\Lambda^*(\alpha_{.1}, \sigma_{11}; Y, X) = -\frac{m \cdot T}{2} [\ln(2\pi) + 1] - \frac{T}{2} \ln \sigma_{11} + \frac{T}{2} \text{tr} \left[\beta_{.1}^{0'} \cdot W_{11} \beta_{.1}^0 \right] + \frac{T}{2} \text{tr} [1 - \ln |W|] \\ - \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}} \left\{ \beta_{.1}^{0'} M_{y_1 y_1} \beta_{.1}^0 - 2 \cdot \gamma_{.1}' M_{x_1 y_1} \beta_{.1}^0 + \gamma_{.1}' M_{x_1 x_1} \gamma_{.1} \right\}$$

Připomeňme použitou symboliku :

$$W = \frac{Y'Y}{T} - \frac{Y'X}{T} \cdot \left(\frac{X'X}{T} \right)^{-1} \cdot \frac{X'Y}{T} \\ W_{11} = \frac{Y_1'Y_1}{T} - \frac{Y_1'X}{T} \cdot \left(\frac{X'X}{T} \right)^{-1} \cdot \frac{X'Y_1}{T}$$

Matici W lze interpretovat jako matici druhých momentů reziduí v regresi všech běžných endogenních proměnných Y na všechny predeterminované proměnné soustavy X .

Matice W_{11} naproti tomu představuje matici druhých momentů reziduí v regresi běžných endogenních proměnných přítomných v první rovnici soustavy Y_1 na všechny predeterminované proměnné soustavy X . Dále jsme již dříve označili jako

$$M_{y_1 y_1} = \frac{Y_1'Y_1}{T} \quad M_{x_1 y_1} = \frac{X_1'Y_1}{T} \quad M_{x_1 x_1} = \frac{X_1'X_1}{T}$$

Jde o momentové matice běžných endogenních a predeterminovaných proměnných obsažených v 1. strukturální rovnici (resp. o „křížovou“ momentovou matici). Vektory parametrů $\beta_{.1}^0$ délky $m_1 + 1$ a $\alpha_{.1}$ délky $m + q$ jsou sloupcové vektory s obsahem :

$$\beta_{.1} = \left(1 \quad -\beta_{.1}^0 \right)' \quad \text{a} \quad \alpha_{.1} = \left(\beta^0_{.1} \quad 0 \quad \gamma_{.1} \quad 0 \right)'$$

kde $\gamma_{.1}$ je vektor délky q_1 první 0 vektor délky $m - m_1 - 1$, druhý 0 vektor délky $q - q_1$

Nepřítomnost běžných endogenních proměnných v 1. rovnici znamená, že se vektor $\beta_{.1}$ redukuje pouze na jediný prvek (při zvoleném normování jde o 1 na prvním místě), tj. skalár.

Maximalizace výrazu 30) se při nepřítomnosti běžných endogenních proměnných podstatně zjednoduší, což je patrné, vyšetříme-li postupně jeho jednotlivé členy.

Poznámky K výrazu 30) ve vztahu k jeho minimalizaci již jen podle $\gamma_{.1}$:

1) Člen $-\frac{m \cdot T}{2} [\ln(2\pi) + 1]$ neobsahuje žádné parametry (ani pozorované veličiny)

2) Člen $-\frac{T}{2} \ln \sigma_{11}$ obsahuje jen parametr σ_{11} neovlivňující odhad $\beta_{.1}$ ani $\gamma_{.1}$

3) Člen $-\frac{T}{2} \cdot \left[\beta_{.1}^0 W_{11} \beta_{.1}^0 \right]$ obsahuje jen parametry u běžných endogenních proměnných

4) Člen $\frac{T}{2} \ln(1 - \ln |W|)$ neobsahuje parametry (jen pozorovaná data v maticích X, Y)

Znamená to tedy, že maximalizace věrohodnostní funkce vzhledem k parametrům vektoru $\gamma_{.1}$ u predeterminovaných proměnných se týká toliko posledního výrazu

$$31) \quad Z(\gamma_{.1}, X_1, y_1) = -\frac{T}{2\sigma_{11}} \left[\frac{y_1' y_1}{T} - 2 \cdot \gamma_{.1}' \frac{X_1' y_1}{T} + \gamma_{.1}' \frac{X_1' X_1}{T} \gamma_{.1} \right]$$

který bude maximální, jestliže obsah hranaté závorky, před níž je záporné znaménko, kladná T a σ_{11} , bude minimální. Minimalizaci provedeme derivacemi podle prvků vektoru $\gamma_{.1}$.

$$\frac{\partial Z(\gamma_{.1}, X_1, y_1)}{\partial \gamma_{.1}} = \left[0 - 2 \cdot \frac{X_1' y_1}{T} + 2 \cdot \frac{X_1' X_1}{T} \cdot \gamma_{.1} \right] = 0.$$

Odtud tedy

$$-\frac{X_1' y_1}{T} + \frac{X_1' X_1}{T} \cdot \gamma_{.1} = 0$$

neboli po vynásobení T a osamostatnění $\gamma_{.1}$ máme

$$32) \quad \tilde{\gamma}_{.1} = (X_1' X_1)^{-1} (X_1' y_1)$$

což znamená, že odhad vektoru parametrů $\gamma_{.1}$ metodou *LIML* je totožný s odhadem pomocí *OLS*. (Lze v tom vidět obdobu shody ML a LS u parametrů jednorovnicového regresního modelu)

F) Výpočetní postup pro určení strukturních parametrů metodou LIML

Nyní shrneme výpočetní postup, kterým se naleznou odhady parametrů jediné regresní rovnice zasazené do simultánní soustavy rovnic. Opět se omezíme na zápis pro 1. strukturní rovnici modelu.

F1) Výpočet parametrů $\tilde{\beta}_{.1}$ příslušných běžným endogenním proměnným se uskuteční na základě vzorce 28)

$$W_{11}^* \cdot \tilde{\beta}_{.1}^0 = \lambda^* \cdot W_{11} \cdot \tilde{\beta}_{.1}^0$$

v němž $\tilde{\beta}_{.1}^0$ je **charakteristický vektor příslušný nejmenšímu charakteristickému číslu λ^*** matice W_{11}^* v matici matice W_{11} , přičemž obě tyto matice jsou určeny jako

$$W_{11}^* = \frac{Y_1' Y_1}{T} - \frac{Y_1' X_1}{T} \cdot \left(\frac{X_1' X_1}{T} \right)^{-1} \cdot \frac{X_1' Y_1}{T}$$

$$W_{11} = \frac{Y_1' Y_1}{T} - \frac{Y_1' X}{T} \cdot \left(\frac{X' X}{T} \right)^{-1} \cdot \frac{X' Y_1}{T}$$

Pro konkrétní vyčíslení k tomu užijeme některou z procedur určených k výpočtům vlastních čísel a vlastních vektorů v matematických softwarových produktech (obvykle pojmenované *EIGEN* nebo *EIG*). V prostředí MATLAB k tomu např. slouží procedura **eig**, pomocí které lze určit vlastní čísla a vlastní vektory čtvercové symetrické matice (u symetrické matice jsou všechna vlastní čísla reálná). V našem případě je nevhodnější volba

$$[V, D] = \text{eig}(A, B)$$

kde za **A** dosadíme matici W_{11}^* a za **B** dosadíme matici W_{11} .

Hledaný vektor vlastních čísel bude obsažen v 1. sloupci matice V , k němu příslušné vlastní číslo pak je prvním prvkem (levým, horním) diagonální matice D . Řazení je „od nejmenšího k největšímu“ (ve starších verzích MATLABu tomu však bylo naopak).

Vlastní vektory nejsou určeny jednoznačně (hodnoty jejich složek jsou určeny pouze ve vzájemných poměrech): rovnici 28) vyhovuje též jakýkoliv vektor $c \cdot \beta_{.1}^0$, kde $c > 0$. Proto není odhad parametrů metodou LIML stanoven jednoznačně. Jednoznačnosti lze však dosáhnout např. normováním $\beta_{.1}^0 = 1$, tzn. tak, aby jeho první složka (příslušná vysvětlované proměnné) byla rovna 1. Po tomto normování dostaneme hledaný vektor $\tilde{\beta}_{.1}$ jako

$$33) \quad \tilde{\beta}_{.1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\tilde{\beta}_{.1}^0}{\tilde{\beta}_{.11}^0} \end{pmatrix}$$

F2) Máme-li určen vektor parametrů $\tilde{\beta}_{.1}$, pak již snadno **určíme vektor parametrů $\tilde{\gamma}_{.1}$ příslušných predeterminovaným proměnným**. Příslušný výraz je dán ve shodě s 24) jako

$$34) \quad \tilde{\gamma}_{.1} = \left(\frac{X_1' X_1}{T} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{X_1' Y_1}{T} \right) \cdot \tilde{\beta}_{.1}$$

Poznámka Někdy bývá uváděn výraz 34) pro $\tilde{\gamma}_{.1}$ se záporným znaménkem. Nejde o chybu, nýbrž to pramení z rozdílného normování první složky vektoru $\tilde{\beta}_{.1}$: pokud deklarujeme $\beta_{.1} = -1$, tedy opačně, než v 33), pak je nutné vzít 34) se znaménkem „-“.

F3) Aby bylo možno testovat statistickou významnost regresních parametrů (a posuzovat jejich případné vzájemné závislosti), je nutno znát **tvar (asymptotické) kovarianční matice LIML estimátoru**. Uvedeme (bez jinak složitějšího odvození) její tvar v zápisu

$$35) \quad \text{Cov}_{(\text{LIML})}(\tilde{\delta}_{.i}) = \sigma_{ii} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix}$$

kde matice v jednotlivých blocích mají tento význam :

$$P_{11} = [\Pi'_{q^*i} (X_2' X_2 - X_2 X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \Pi_{q^*i})]^{-1}$$

$$P_{12} = -P_{11} [\Pi'_{q^*i} + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \Pi_{q^*i}] \quad P_{22} = P_{12}'$$

$$P_{22} = [\Pi_{q_i} + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \Pi_{q^*i}] P_{11} [\Pi_{q_i} + (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_2 \Pi_{q^*i}] + (X_1' X_1)^{-1}$$

V těchto vzorcích vystupující matice X_1, X_2 představují submatice matice všech predeterminovaných proměnných X , přičemž X_1 přísluší proměnným, které se skutečně vyskytují (jako vysvětlující) v i -té strukturní rovnici a X_2 je tvořena zbývajících predeterminovaných proměnnými (nepřítomnými v i -té rovnici), tj. rozložíme $X = (X_1, X_2)$. Symboly Π_{q_i} , resp. Π_{q^*i} jsou označeny submatice Π redukované formy modelu ($\hat{\Pi} = (X' X)^{-1} X Y$) rozměrů $[q_i; m_i]$, resp. $[q - q_i; m_i]$, které lze odvodit z rozkladu Π ve tvaru

$$\Pi = \begin{pmatrix} & \Pi_{q_i, i} & \\ \pi_{\cdot i} & & \Pi^* \\ & \Pi_{q^*, i} & \end{pmatrix}$$

kde $\pi_{\cdot i}$ tvoří první sloupec matice Π , Π^* posledních $m - m_i - 1$ sloupců Π (vektor $\pi_{\cdot i}$ a submatice Π^* se pro výpočet asymptotické kovarianční matice bezprostředně nevyužívají). Předpokládá se přitom takové seřazení endogenních a predeterminovaných proměnných, že ty, které jsou přítomny v i -té strukturní rovnici (v počtu $m_i + 1$ endogenních a q_i predeterminovaných), jsou obsaženy v prvních $m_i + 1$ sloupcích matice Y (s vysvětlovanou proměnnou na prvním místě) a v prvních q_i sloupcích matice X .

Vlastnosti LIML-odhadové funkce

Lze ukázat, že LIML -estimátor strukturních parametrů modelu má tyto vlastnosti :

1) Odhady parametrů $\tilde{\delta}_{\cdot i}$ (tj. $\tilde{\beta}_{\cdot i}, \tilde{\gamma}_{\cdot i}$) jsou konzistentní, neboť platí

$$p \lim_{\tau \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{\cdot i} \\ \tilde{\gamma}_{\cdot i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{\cdot i} \\ \gamma_{\cdot i} \end{pmatrix}$$

2) Odhady parametrů $\tilde{\beta}_{\cdot i}, \tilde{\gamma}_{\cdot i}$ nejsou obecně nestranné, protože

$$E \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{\cdot i} \\ \tilde{\gamma}_{\cdot i} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \beta_{\cdot i} \\ \gamma_{\cdot i} \end{pmatrix}$$

3) Odhady parametrů $\tilde{\delta}_{\cdot i}$ (tj. $\tilde{\beta}_{\cdot i}, \tilde{\gamma}_{\cdot i}$) jsou obecně vydatné (v rámci metod s omezenou informací). Často se dosáhne dokonce dolní Rao-Cramérový dolní hranice pro asymptotický rozptyl, resp. asymptotickou kovarianční matici.

$$m_i + q_i \leq q$$

4) Odhady parametrů $\tilde{\beta}_{.i}, \tilde{\gamma}_{.i}$ jsou (za stejných předpokladů $e), f), g), h)$ jako u 2SLS) **vždy asymptoticky normální**, výraz pro asymptotickou kovarianční matici je dán výrazem 35). Konzistentní odhad prvků σ_{ij} pro jednotlivé rovnice získáme tentokrát z výrazu:

$$\text{LIML } \tilde{\sigma}_{ij} = \beta_{.i}^0 \cdot W_{11}^* \cdot \beta_{.i}^0$$

kde $\beta_{.i}^0$ je vektor definovaný v 28) a W_{11}^* je matice definovaná na str.8 nahoře.

Poznámka 1 Jestliže se zvolí normalizace $\beta_{ii}^0 = 1$, dá se ukázat, že při této normalizaci existuje – ve vztahu k metodě 2SLS - totožnost asymptotických rozdělení obou těchto estimátorů. Odpovídající vlastnosti (konzistence) se tedy přenášejí též na LIML-estimátor. Znamená to aplikovatelnost testů (původně navržených pro 2SLS) též pro LIML-estimátor.

Poznámka 2 Přístup uplatněný v metodě LIML se dá rozšířit rovněž na určení ML-odhadů strukturních parametrů libovolné podsoustavy původní soustavy rovnic. Respektují se přitom veškerá omezení na parametry vybrané podsoustavy, nikoliv však omezení kladená na parametry ostatních rovnic. Nelze však již dosáhnout přímého výpočtu odhadovaných parametrů, nýbrž je nutno uplatnit vhodný

Konzistentní odhad prvků σ_{ij} pro jednotlivé rovnice získáme obvyklým způsobem :

$$s_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{e_{.i} \cdot e_{.j}}{T}$$

kde za rezidua $e_{.i}, e_{.j}$ vezmeme odhady náhodných složek $\varepsilon_{.i}, \varepsilon_{.j}$ získané dvoustupňovou metodou nejmenších čtverců 2SLS. Testy statistických rozdělení budou tedy založeny na normálním $N(0,1)$ - rozdělení.