Identifikační problém

v soustavě simultánních regresních rovnic

Problém identifikace, který je povahou algebraického, nikoliv statistického charakteru, je okolnost, na kterou je třeba brát ohled při tvorbě ekonometrického modelu již ve fázi specifikace modelových rovnic - jeho případná přítomnost znamená pro kvantitativní analýzu modelu nesnáz, která není překonatelná nasazením ani sebelepší odhadové metody. Jinými slovy: Není-li model nebo jeho určitá část (rovnice) **identifikovaná, je zbytečné se o odhad parametrů tohoto modelu** (rovnice) **pokoušet statistickými prostředky vůbec. Ilustrujme situaci na příkladě :**

Původní nabídkově-poptávkový (dvourovnicový) model

Vezměme dvourovnicový model poptávky po určitém zboží déledobé spotřeby, např. po koupelnových vanách. Nechť první rovnice modelu představuje nabídkovou funkci ve tvaru

$$1) \qquad QS_v = a + bP_v + u$$

kde $b > 0$ (nabídka roste s cenou vany), **zatímco druhá rovnice poptávkovou funkci ve tvaru :**

$$2) \qquad QD_v = c + dP_v + v$$

kde $d < 0$ (poptávka klesá s cenou vany)

V rovnicí *1)* znamená QS_v **ukazatel počtu prodaných van,** P_v **cenový index van**
v rovnicí *2)* znamená QD_v **ukazatel počtu koupených van,** P_v **cenový index van**

Obě modelové rovnice jsou zapsány symbolicky bez uvažování indexu pozorování, neboť, jak níže uvidíme, výběr vzorku pozorovaných dat není z hlediska vyšetřovaného problému identifikace vůbec podstatný.

Předpokládejme, že prodej van je v rovnováze, tedy, že platí rovnost (identita)

$$3) \qquad QS_v = QD_v \ .$$

Nejdříve zapišme model ve strukturním tvaru. Dostaneme :

$$4) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 1 & -d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Qv \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} . (1) + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Model (po dosazení z identity $QS_v = QD_v = Q_v$ **) obsahuje dvě běžné endogenní proměnné** Q_v **,** P_v **, jedinou exogenní (predeterminovanou) proměnnou, kterou představuje jedničkový vektor a dvě náhodné složky** u_t, v_t **.**

Přistupme k určení redukované formy tohoto modelu :

$$\det(B) = b - d \qquad (>0)$$

Matici B^{-1} **obdržíme snadno jako**

$$B^{-1} = (b-d)^{-1} . \begin{pmatrix} -d & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a po vynásobení pravé strany *4)* dostaneme

$$\begin{pmatrix} Q_v \\ P_v \end{pmatrix} = (b-d)^{-1} . \begin{pmatrix} -d & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} . (1) + (b-d)^{-1} . \begin{pmatrix} -d & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Redukovaná forma modelu má tedy tvar

$$\textit{5)} \qquad \begin{pmatrix} Q_v \\ P_v \end{pmatrix} = (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} bc-ad \\ c-a \end{pmatrix} + (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} bv-du \\ v-u \end{pmatrix}$$

kde $(b-d)^{-1}.(bc-ad) = \Pi_{11}$ a $(b-d)^{-1}.(c-a) = \Pi_{21}$.

Odtud je patrné, že:

a) matice redukované formy sestává pouze ze dvou prvků Π_{11} , Π_{12} - jde tedy o (sloupcový) vektor.

b) výpočet strukturních parametrů a,b,c,d z (dvouprvkové) matice redukované formy nelze korektně provést, neboť kterákoliv dvojice parametrů bude moci být vyjádřena nejen pomocí Π_{11}, Π_{12}, ale (naneštěstí) též pomocí dvou zbývajících přebývajících (volných) strukturních parametrů.

c) náhodné složky redukovaného tvaru jsou lineární kombinací (obou) náhodných složek strukturního tvaru.

1.modifikace původního modelu:

Uvažujme nyní spolu s *1)* místo rovnice poptávky *2)* modifikovanou rovnici

$$\textit{2´)} \qquad QD_v = c + dP_v + hY + v$$

kde Y je velikost příjmů spotřebitele, vzatá např. jako veličina průměrná čistá mzda.

Je zřejmé, že zařazení veličiny Y do rovnice *2)* má větší oprávnění než zařazení Y do rovnice *1)*. Strukturní tvar modelu nyní přejde do podoby :

$$\textit{6)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 1 & -d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Qv \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

redukovaný tvar nabude tvaru

$$\textit{7)} \qquad \begin{pmatrix} Q_v \\ P_v \end{pmatrix} = (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} bc-ad & bh \\ c-a & h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} + (b-d)^{-1}.\begin{pmatrix} bv-du \\ v-u \end{pmatrix}$$

kde píšeme $\Pi_{11} = (b-d)^{-1}(bc-ad)$, $\quad \Pi_{12} = (b-d)^{-1}bh$

$\Pi_{21} = (b-d)^{-1}(c-a)$, $\quad \Pi_{22} = (b-d)^{-1}.h$

Zde si - na rozdíl od *5)* - všimněme, že strukturní parametry nabídkové rovnice, tj. a,b můžeme jednoznačně odvodit ze (známých nebo odhadnutých) parametrů redukovaného tvaru:

- hodnota parametru b je přímo rovna podílu $b = \dfrac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}$
- hodnotu parametru a získáme jako $a = \Pi_{11} - \Pi_{12}.\Pi_{21}/\Pi_{22}$

což lze ověřit např. dosazením :

$$\Pi_{11} - \Pi_{12}.\Pi_{21}/\Pi_{22} = \frac{bc-ad}{b-d} - \frac{[bh(c-a)]/(b-d)^2}{h/(b-d)} = \frac{bc-ad-bc+ab}{b-d} = a$$

V případě poptávkové rovnice v ní příslušnou trojici parametrů c,d,h (bohužel) ze zmíněných čtyř parametrů redukovaného tvaru odvodit nelze.

Povšimněme si, že uvedeným rozšířením poptávkové rovnice o veličinu příjem *Y* došlo k tomu, že nabídková rovnice se stala identifikovanou, zatímco parametry (neidentifikované) **poptávkové rovnice nebylo možno z parametrů redukovaného tvaru odvodit. Intuitivně bychom z toho mohli vyvodit, že pokud jde o restrikce položené na parametry rovnic** (dosazením 0 u nepřítomných vysvětlujících veličin)**, právě zařazením restrikcí** (v tomto případě dosazením 0 za veličinu ***Y*** nepřítomnou v nabídkové rovnici) **činíme kroky k zajištění identifikovanosti** (parametrů) **rovnice.**

2.modifikace původního modelu:

Uvažujme dále spolu s *2a)* místo rovnice nabídky *1a)* modifikovanou rovnici

$$2´)\qquad QS_v = a + bP_v + gS + v$$

kde *S* je rozsah sortimentu vyjádřený např. jako rozsah prodejních ploch v m^2 **.**
V tomto případě bude mít strukturní tvar maticovou formu

$$8)\qquad \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 1 & -d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Qv \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & g & 0 \\ c & 0 & h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ S \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

a z ní vyplývající redukovaný tvar

$$9)\qquad \begin{pmatrix} Q_v \\ P_v \end{pmatrix} = (b-d)^{-1} . \begin{pmatrix} bc-ad & -dq & bh \\ c-a & -q & h \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ S \\ Y \end{pmatrix} + (b-d)^{-1} . \begin{pmatrix} bv-du \\ v-u \end{pmatrix}$$

kde máme $\Pi_{11} = (b-d)^{-1}(bc-ad)$, $\Pi_{12} = -(b-d)^{-1}dq$, $\Pi_{13} = (b-d)^{-1}bh$
$\Pi_{21} = (b-d)^{-1}(c-a)$, $\Pi_{22} = -(b-d)^{-1}.q$, $\Pi_{23} = (b-d)^{-1}.h$

Vyšetřeme nyní, kolik (případně zda všechny) **parametrů strukturního tvaru jsou odvoditelné z parametrů redukovaného tvaru ? Zřejmě můžeme ihned psát**

$$b = \frac{\Pi_{13}}{\Pi_{23}}, \qquad d = \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}$$

a tedy

$$b - d = \frac{\Pi_{13}.\Pi_{22} - \Pi_{12}.\Pi_{23}}{\Pi_{22}.\Pi_{23}}$$

odtud dále

$$q = -\Pi_{22}.(b-d) = \frac{\Pi_{12}.\Pi_{23} - \Pi_{13}.\Pi_{22}}{\Pi_{23}}, \qquad h = \Pi_{23}.(b-d) = \frac{\Pi_{13}.\Pi_{22} - \Pi_{12}.\Pi_{23}}{\Pi_{22}}$$

a konečně ze vztahu pro Π_{21} **dostaneme**

$$c = \Pi_{21}(b-d) + a$$

a následně dosazením do vztahu pro Π_{11} **získáme oba zbývající parametry strukturního vztahu** a, c **:**

$$a = \Pi_{11} - b.\Pi_{21} = \Pi_{11} - \frac{\Pi_{13}}{\Pi_{23}}.\Pi_{21}, \quad c = \Pi_{11} - d.\Pi_{21} = \Pi_{11} - \frac{\Pi_{12}}{\Pi_{22}}.\Pi_{21}$$

Při této druhé modifikaci tedy dojde k dosažení identifikovanosti u obou modelových rovnic.

Obecně ***Abychom dosáhli identifikovanosti, je nutné, aby každá*** *(i-tá)* ***rovnice modelu splňovala podmínku***

$$\textit{10)} \qquad m_i + q_i \le q$$

neboli, aby počet vysvětlujících proměnných $m_i + q_i$ **i-té rovnice byl nanejvýš roven počtu všech predeterminovaných proměnných modelu** q. **Bude-li platit opačná nerovnost, budou** (přinejmenším některé) **parametry i-té rovnice neidentifikované. Rozlišíme přitom dva případy : pokud**

- **v *10)* platí rovnost, nazveme přesná identifikovanost**
- **v *10)* platí rovnost, nazveme přeidentifikovanost.** (Tento druhý případ je častější)

Poznámka **Někdy se vztah *8)* formuluje nikoliv v počtech vysvětlujících, ale v počtech všech v i-té rovnici přítomných proměnných. Pokud tedy** $m_i{}^*$ **označuje počet všech přítomných proměnných rovnice, modifikuje se vztah *10)* na**

$$\textit{10*)} \qquad m_i^* + q_i \le q + 1$$

Podmínky *10)* resp. *10*)* jsou ve vztahu k identifikovanosti podmínkami nutnými, nikoliv však postačujícími. Nazývají se tzv. řádové podmínky identifikace. Postačující podmínky, nazývané též *hodnostní podmínky identifikace,* jsou založeny na vyšetření hodnosti submatice Π **matice redukované formy** Π, **která musí nabývat maximální možné hodnosti, tedy** $m_i + q_i$, **nesmí tedy obsahovat lineárně závislé sloupce.**

Identifikace v rekursívním ekonometrickém modelu

A) V obecném interdependentním modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů (uvažujeme situaci, do které nevkládáme restrikce vyplývající z omezení položených na strukturní parametry) **:**

- **počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků (obecné) matice *B* (s normovanou diagonálou) tj.** $m.(m-1)$
- **počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků** (obecné) **matice** $C = m.q$
- **počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek strukturního tvaru = počet prvků** (symetrické) **pozitivně definitní matice** $\sum = (m+1) * m / 2$.

Dohromady má tedy strukturní tvar $m.[m + q + (m+1)/2]$ neznámých parametrů.

B) Naproti tomu redukovaný tvar modelu obsahuje tyto počty parametrů :

- **počet parametrů redukovaného tvaru = počet prvků (obecné) matice** Π **tj.** $m.q$
- **počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků** (symetrické) **pozitivně definitní matice** $\Omega = (m+1) * m / 2$

Dohromady má tedy redukovaný tvar $m.[q + (m+1)/2]$ neznámých parametrů.

Informace obsažené v parametrech neomezeného redukovaného tvaru je tedy méně (o $(m-1)$ parametrů) **než v parametrech neomezeného strukturního tvaru** (vždy platí, že $m > 1$ u vícerovnicového modelu).

Poznámka **Odtud je mj. vidět, že omezení vkládaná na parametry strukturního tvaru mohou tuto disproporci snížit, popř. ji úplně odstranit. Tím dosáhneme identifikovanosti modelu nebo** (aspoň) **identifikovanosti některé strukturní rovnice.**

C) V rekursívním ekonometrickém modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů :

- počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků matice B (s nulovými prvky v horním/dolním trojúhelníku a s normovanou diagonálou) **tj.** $\mathbf{m}.(\mathbf{m}-1)/2$

- počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (obecné) matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{m}.\boldsymbol{q}$

- počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní diagonální matice $\sum = \mathbf{m}$ **.**

Dohromady má tedy strukturní tvar rekursívního modelu tvar $\mathbf{m}.[\mathbf{q}+(\mathbf{m}+1)/2]$ neznámých parametrů**, tedy tolik, kolik je parametrů redukovaného tvaru.**
Počet parametrů redukovaného tvaru (i při respektování restrikcí přenesených z omezení na parametry strukturního tvaru) **je nezměněný, tj. je roven počtu**

$$\mathbf{m}.[\mathbf{q}+(\mathbf{m}+1)/2]$$

Poznámka **Počet parametrů** (neomezeného) **redukovaného tvaru je tedy u modelu rekursívního typu roven počtu parametrů** (neomezeného) **strukturního tvaru.**

Celkem tedy je předmětem odhadu $\mathbf{m}.(\mathbf{m}-1)+\mathbf{mq}+\mathbf{m}=\mathbf{m}(\mathbf{m}/2+\mathbf{q}+1/2)$ **strukturních parametrů rekursívního modelu. Tento počet je přesně shodný s počtem parametrů redukovaného tvaru modelu. Nejsou-li tedy mezi parametry modelu zavedena další omezení, lze zpětně každý parametr strukturního tvaru určit jednoznačně z** (odhadnutých) **parametrů redukovaného tvaru.**