9. FOURIEROVY ŘADY

9.1. **Fourierova řada (FŘ).**

<u>*Komplexní harmonické kmity:*</u>

$$E = \{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi k t}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\omega_k t} = \frac{1}{\sqrt{T}}(\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t),$$

kde pro $k \neq 0$ značí

$f_k = \frac{\lvert k\rvert}{T}$	...	frekvenci $\lvert k\rvert$-ho harmonického kmitu s periodou $\frac{T}{\lvert k\rvert}$,
$\omega_k = 2\pi f_k$	...	jeho úhlovou rychlost.

<u>*E je ortonormální systém v $L_2([0,T])$:*</u>

$$\langle e_j, e_k\rangle = \int_0^T e_j(t)\overline{e_k(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi(j-k)t}{T}}\,dt = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad j = k \\ 0 & \text{pro} \quad j \neq k \end{cases}$$

<u>*E je dokonce úplný (báze) v $L_2([0,T])$(bez důkazu):*</u>

$$x(t) \in L_2([0,T]) \text{ libovolná a } T\text{-periodická} \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e_k(t),$$

kde řada konverguje (bez ohledu na pořadí) dle normy $\|\,.\,\|_2$ v prostoru $L_2([0,T])$ a souřadnice x_k jsou jednoznačně určeny vztahem

$$\underline{\langle x, e_k\rangle} = \langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j e_j, e_k\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = \underline{x_k}.$$

<u>*Komplexní tvar rozvoje do Fourierovy řady:*</u>

$$\underline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_k\rangle \frac{1}{\sqrt{T}}}_{c_k(x)} e^{i\omega_k t} = \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{i\omega_k t}},$$

kde (9.1)

$$\underline{c_k := c_k(x)} = \frac{1}{\sqrt{T}}\langle x, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T x(t)\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-i\omega_k t}\,dt = \underline{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\omega_k t}\,dt}.$$

c_k	...	k-tý **komplexní Fourierův koeficient funkce** x,
c_0	...	**střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce** x,
$\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$	...	**komplexní fourierovské spektrum funkce** x,
$x_k(t)$	:=	$c_k e^{i\omega_k t} + c_{-k}e^{-i\omega_k t},\ k \geq 1$
	...	k-**tá harmonická komponenta funkce** x **o frekvenci** f_k.

Tvrzení 9.1 (Dirichletova věta). *Jestliže T-periodická funkce $x(t)$ má konečnou variaci na $[0,T]$, pak její FŘ konverguje bodově k $x(t)$ v každém bodě t, kde je $x(t)$ spojitá a k $\frac{1}{2}(\lim_{t\to 0^+} x(t) + \lim_{t\to 0^-} x(t))$ v každém bodě nespojitosti (u funkce s konečnou variací je to vždy pouze konečný skok).*

Důsledek 9.2 (viz [DoNo,Věta 8.4]).
Je-li T-periodická funkce $x(t)$ po částech spojitá a po částech monotonní na $[0,T]$, pak má konečnou variaci a její FŘ konverguje bodově k $x(t)$ v každém bodě t, kde je $x(t)$ spojitá a k $\frac{1}{2}(\lim_{t\to 0^+} x(t) + \lim_{t\to 0^-} x(t))$ v každém bodě nespojitosti (u funkce po částech spojité je to vždy pouze konečný skok).

Je-li $x(t)$ reálná funkce, lze (9.1) upravit na další dva ekvivalentní tvary:
Zřejmě $c_{-k} = \overline{c_k}$. Označíme-li

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k);\ a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

pak $c_0 = \frac{a_0}{2} \in \mathbb{R},\ b_0 = 0$ a dostáváme

Goniometrický tvar Fourierovy řady:

$$\begin{aligned}\underline{x(t)} &= c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(c_ke^{i\omega_kt}+\underbrace{c_{-k}e^{-i\omega_kt}}_{\overline{c_ke^{i\omega_kt}}})=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}2\mathrm{Re}(c_ke^{i\omega_kt})=\\ &= \underline{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\omega_kt+b_k\sin\omega_kt)},\end{aligned}$$

kde (9.2)

$$\begin{aligned}\underline{a_k} &= 2\mathrm{Re}(c_k) &= \underline{\tfrac{2}{T}\textstyle\int_0^T x(t)\cos\omega_kt\,dt},\\ \underline{b_k} &= -2\mathrm{Im}(c_k) &= \underline{\tfrac{2}{T}\textstyle\int_0^T x(t)\sin\omega_kt\,dt}.\end{aligned}$$

Položíme-li $a_k=A_k\cos\varphi_k$ a $b_k=A_k\sin\varphi_k$, dostaneme

Amplitudově-fázový tvar Fourierovy řady:

$$\underline{x(t)} = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(\cos\varphi_k\cos\omega_kt+\sin\varphi_k\sin\omega_kt)=\underline{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{A_k\cos(\omega_kt-\varphi_k)}_{x_k(t)}}.$$

kde (9.3)

$$\begin{aligned}A_k &= 2|c_k|=\sqrt{a_k^2+b_k^2},\\ \varphi_k &= \arctan\frac{b_k}{a_k}.\end{aligned}$$

A_k	...	**amplituda k-té harmonické složky funkce x,**
φ_k	...	**fázový posuv k-té harmonické složky funkce x ($-\pi<\varphi_k\le\pi$),**
$c_0=\frac{a_0}{2}$	...	**střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce x,**
$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$	...	**amplitudové spektrum funkce x,**
$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$	...	**fázové spektrum funkce x.**

9.2. Parsevalova identita (PI).

Nechť $x\in L_2([0,T])$ (tj. s konečnou energií na intervalu $[0,T]$) je T-periodická, potom

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 &= \int_0^T|x(t)|^2\,dt=\langle x,x\rangle=\langle\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_j\sqrt{T}\underbrace{\frac{e^{i\omega_jt}}{\sqrt{T}}}_{e_j(t)},\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\sqrt{T}\underbrace{\frac{e^{i\omega_kt}}{\sqrt{T}}}_{e_k(t)}\rangle\\ &= T\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}c_j\overline{c_k}\underbrace{\langle e_j,e_k\rangle}_{\delta_{j,k}}=T\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2.\end{aligned}$$

Odtud pak dostáváme:

Komplexní tvar Parsevalovy identity:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2=\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2\,dt}_{\text{střední výkon na }[0,T]}<\infty\Rightarrow\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell_2. \tag{9.4}$$

Speciálně:

$\lvert c_0\rvert^2$	...	**střední výkon stejnosměrné složky,**
$\frac{1}{T}\int_0^T\lvert x_k(t)\rvert^2\,dt=\lvert c_{-k}\rvert^2+\lvert c_k\rvert^2$	...	**střední výkon k-té harmonické složky.**

Amplitudový tvar Parsevalovy identity (x reálná):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2=|c_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{(|c_{-k}|^2+|c_k|^2)}_{2|c_k|^2=A_k^2/2}=\underline{\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2}=\underline{\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2\,dt.} \tag{9.5}$$

Speciálně:

$\frac{a_0^2}{4}$ ... **střední výkon stejnosměrné složky**,

$\frac{A_k^2}{2}$ ... **střední výkon k-té harmonické složky**,

$$\{2|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\frac{A_k^2}{2}\}_{k=1}^{\infty} \tag{9.6}$$

... **výkonová spektrální hustota**,

$$\{2T|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\frac{TA_k^2}{2}\}_{k=1}^{\infty}$$

... **energetická spektrální hustota**.

9.3. Diskretizace Fourierovy řady.

Vypočteme hodnoty rozvoje $x(t)$ do její komplexní FŘ (9.1) pouze na rovnoměrné diskrétní síti N subintervalů: $T=N\Delta t,\ x_n=x(n\Delta t), n\in\mathbb{Z}$.

Obdržíme

$$\underline{x_n}\overset{(9.1)}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{2\pi k}{N\Delta t}n\Delta t}=\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\overbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_{k+mN}\right)}^{\widehat{c}_k}e^{i\frac{2\pi(k+mN)n}{N}}=\underline{\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}.} \tag{9.7}$$

kde $[\cdot]$ značí celou část hodnoty.

Platí

$\widehat{c}_k\approx c_k$, neboť $|c_k|\to 0$ pro $k\to\pm\infty$,
$\widehat{c}_k=c_k$, pokud $c_k=0$ pro $|k|\geq\frac{N}{2}$ (FŘ je konečná: $f_{max}\leq\frac{N}{2}\frac{1}{T}$ udává konečný frekvenční obsah $x(t)$),
$\{\widehat{c}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je N-periodická posloupnost ($\widehat{c}_k=\widehat{c}_{k+mN},\ m\in\mathbb{Z}$).

Po úpravě:

$$\underline{x_n}=\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{-1}\widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}=\underline{\sum_{k=0}^{N-1}\widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}},} \tag{9.8}$$

kde první ze sum jsme upravili záměnou sčítacího indexu $r=k+N$ na tvar:

$$\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{-1}\widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}=\sum_{r=-\left[\frac{N-1}{2}\right]+N}^{N-1}\widehat{c}_{r-N}e^{i\frac{2\pi(r-N)n}{N}}=\sum_{r=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-1}\widehat{c}_r e^{i\frac{2\pi rn}{N}}$$

s využitím vztahů

$-\left[\frac{N-1}{2}\right]+N=\left[\frac{N}{2}\right]+1$ a $\widehat{c}_r=\widehat{c}_{r-N}$ pro $r=\left[\frac{N}{2}\right]+1,\dots,N-1$ (N-periodicita).

Označíme-li $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\dots,x_{N-1})^T$ vzorky $x(t)$ na její jedné periodě a $\widehat{\boldsymbol{c}}=(\widehat{c}_0,\widehat{c}_1,\dots,\widehat{c}_{N-1})^T$ odhady Fourierových koeficientů, pak (9.8) určuje tzv. **operátor diskrétní Fourierovy transformace ($\boldsymbol{x}=\mathrm{DFT}_N^{+}(\widehat{\boldsymbol{c}})$)** dle následující definice.

Definice 9.1 (Diskrétní Fourierova transformace (DFT))**.**
$\mathrm{DFT}_N^{\pm} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ je lineární operátor $\boldsymbol{X} = \mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x}$ určený maticí $N \times N$:
$\mathbb{W}_N^{\pm} = \left[W_N^{kn}\right]_{0\le k,n\le N-1}$, kde $W_N = e^{\pm i\frac{2\pi}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} \pm i\sin\frac{2\pi}{N}$ je N-tá primitivní odmocnina z 1, tj. $W_N^N = 1$, ale $W_N^k \neq 1$ pro $k = 1, \dots, N-1$. Tedy

$$\boldsymbol{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})^T, \quad \text{kde } X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm i\frac{2\pi kn}{N}} x_n \text{ pro } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Zřejmě $\mathbb{W}_N^{\pm}$ je symetrická matice a $(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = \mathbb{W}_N^{\mp}$.

Věta 9.2 (Věta o inverzi)**.**
Platí $\mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp} = \mathbb{W}_N^{\pm}(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = NI_N$ *a tedy* $(\mathbb{W}_N^{\pm})^{-1} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}$ *a* $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{W}_N^{\pm}$ *je unitární matice.*

Důkaz. Označme $A := [a_{r,s}] = \mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp}$, pak

$$a_{r,s} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{rn}W_N^{-ns} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(r-s)} = \sum_{n=0}^{N-1} q^n,\ q = W_N^{r-s}.$$

Odtud

$$a_{r,s} = \begin{cases} N & \text{pro} \quad r = s \\ \frac{q^N-1}{q-1} = 0 & \text{pro} \quad r \neq s \end{cases},$$

neboť $q^N = W_N^{N(r-s)} = 1$ a $q \neq 1$ pro $r \neq s$ v důsledku $0 < |r-s| \le N-1$. $\square$

<u>*Poznámka*</u> 9.3. V systému MATLAB jsou operátory $\mathrm{DFT}_N^{\pm}$ realizovány pomocí algoritmu tzv. **rychlé Fourierovy transformace** implementovaných v procedurách `fft` a `ifft` takto:

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \mathbb{W}_N^{-}\boldsymbol{x} = \mathrm{DFT}_N^{-}(\boldsymbol{x}) = \underline{\mathtt{fft}(\boldsymbol{x})}$$

a

$$\underline{\boldsymbol{x}} = (\mathbb{W}_N^{-})^{-1}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{+}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^{+}(\boldsymbol{X}) = \underline{\mathtt{ifft}(\boldsymbol{X})}.$$

Důsledek 9.4. *Podle (9.8), věty 9.2 a poznámky 9.3 platí*

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{W}_N^{+}\widehat{\boldsymbol{c}} = \mathrm{DFT}_N^{+}(\widehat{\boldsymbol{c}}) = \underline{N\mathtt{ifft}(\widehat{\boldsymbol{c}})},$$

$$\underline{\widehat{\boldsymbol{c}}} = (\mathbb{W}_N^{+})^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{-}\boldsymbol{x} = \underline{\frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^{-}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\mathtt{fft}(\boldsymbol{x})}.$$