Statistická analýza dat

doc. PhDr. Tomáš Urbánek, Ph.D.
Psychologický ústav AV ČR
Veveří 97, 602 00 Brno
tour@psu.cas.cz

Osnova kurzu

- Základní pojmy
- Popisné statistiky
  - jednorozměrně indexy
  - vícerozměrné indexy (vztahy)
- Rozložení dat
- Testování hypotéz
  - hladina významnosti
  - síla testu

- Konkrétní postupy
  - testy rozložení
  - kontingenční tabulky
  - test chí-kvadrátu
  - t-testy
  - ANOVA
  - korelační analýzy
  - regresní analýza
  - atd.

Základní pojmy

- znak × proměnná
- typy proměnných (úrovně měření)
- základní × výběrový soubor
- popisná × induktivní statistika
- neparametrické × parametrické metody
- explorační × konfirmační postupy
- hypotéza – teorie - model
- nulová × alternativní hypotéza
- statistická významnost
- síla testu
- chyba I. a II. druhu

Znak a proměnná

- ZNAK
  - jakákoli rozlišitelná charakteristika zkoumaných objektů
- PROMĚNNÁ
  - znak nebo skupina znaků, tvořící logický celek, nabývající různých forem, které lze chápat jako možné hodnoty (× *konstanta*)

Operacionalizace a kvantifikace

- pojem × konstrukt
  - operacionální definice → testovací nebo měřicí kritéria, operace nebo postupy, pomocí kterých lze daný jev vyvolat

    ↓
  - proměnná (z hlediska měření):
    - diskrétní (zvláštní případ dichotomická)
    - spojitá

Typy proměnných (podle úrovně měření)

- NOMINÁLNÍ
  - čísla představující hodnoty proměnné pouze zastupují názvy
  - možnost použít pouze relace =/≠
  - např. pohlaví, diagnóza, terapie aj.
- ORDINÁLNÍ
  - pořadová (mezi hodnotami existuje přirozené uspořádání)
  - lze uvažovat o relacích ≤/≥
  - např. závažnost onemocnění, jakékoli pořadí

Typy proměnných (podle úrovně měření)

- INTERVALOVÁ
  - distance mezi dvojicemi hodnot jsou vzájemně srovnatelné
  - kromě předchozích relací lze používat operace +/–
  - např. teplota
- POMĚROVÁ
  - na rozdíl od předchozí úrovně není umístění nuly dáno dohodou
  - kromě relací a operací z předchozích úrovní lze používat ×/÷
  - např. hmotnost, délka a další fyzikální veličiny

Typy proměnných (podle role ve výzkumu)

- NEZÁVISLÉ × ZÁVISLÉ
  - nezávislá proměnná není ovlivňována žádnou jinou proměnnou, která je součástí výzkumu, a současně ovlivňuje ostatní zkoumané proměnné
  - závislá proměnná je ovlivňována nezávislými proměnnými
- VNĚJŠÍ
  - proměnná (proměnné), která(é) ve výzkumu nehraje žádnou roli

Typy proměnných (podle role ve výzkumu)

- MODERUJÍCÍ
  - modifikace vztah mezi nezávislou a závislou proměnnou (často např. pohlaví)

- INTERVENUJÍCÍ
  - neměřitelná, nepostižitelná, ale podle našich představ nějak ovlivňuje hypotetický řetězec proměnných „nezávislá-moderující-závislá“

Zdroje chyb měření

Zdroj chyb	Kritérium
• osobní	objektivita
• náhodný	reliabilita (spolehlivost)
• systematický	validita (platnost)

Základní × výběrový soubor

Základní soubor

- soubor všech možných měření daných veličin (lidí, předmětů, vzorků)
- v principu není možné všechna tato měření provést (nejsou peníze nebo čas)
- označuje se také jako *populace*

Výběrový soubor

- podmnožina základního souboru vybraná na základě určitých pravidel (reprezentativnost a velikost – viz dále)
- popis výběrového souboru se používá jako odhad popisu souboru základního

Požadavky na výběrový soubor

- jsou možné dva různé přístupy (někdy vnímané jako protikladné, spíše ale vzájemně se doplňující)
- *kvalitativní* × *kvantitativní*
- v medicíně *klinický* × *výzkumně/teoretický*
  - příklad kvalitativního – zpracování kazuistik
  - zde – kvantitativní

Kvantitativní × kvalitativní (odbočka)

- Kvantitativní
  - založené na matematicko-statistických metodách a na velkých souborech dat
  - cílem je zobecnění na nějaký základní soubor
- Kvalitativní
  - metody vycházející z klinického přístupu, jazykovědy, etnografie a podobných oborů
  - často spíše snaha o postižení zvláštních jevů

Požadavky na výběrový soubor

- výběrový soubor by měl být *reprezentativní* vzhledem k základnímu souboru (populaci)
- výběrový soubor by měl být dostatečně *rozsáhlý*
- postupy
  - často nějaká forma náhodného (*pravděpodobnostního*) výběru
  - ale i *nepravděpodobnostní* postupy

Typy výběrových plánů

- pravděpodobnostní výběr
  - většinou v případě kvantitativních výzkumů
  - použitelný u dostupných populací
- nepravděpodobnostní výběr
  - častější u kvalitativních výzkumů (ale ne výhradně)
  - nutný u výjimečných jevů a nedostupných populací

Pravděpodobnostní výběr

- všechny prvky základního souboru mají stejnou šanci dostat se do výběru

Příklady:

- prostý náhodný výběr
- stratifikovaný náhodný výběr

Nepravděpodobnostní výběr

- prvky základního souboru je nutné vybírat na základě definovaných kritérií a postupů

Příklady:

- kvótní výběr
- místní nebo časový výběr
- výběr typických případů
- výběr technikou sněhové koule

Popisná × induktivní statistika

- popisná
  - statistické indexy jsou považovány za popis výběrového souboru
- prostředky
  - grafické (grafy, diagramy)
  - numerické (indexy. koeficienty)

- induktivní
  - indexy popisující výběrový soubor jsou považovány za odhady hodnot v souboru základním (populaci)
  - testování statistických hypotéz

Parametrické × neparametrické metody

- 3 hlediska: *úroveň měření proměnných*
  rozsah výběrového souboru
  normalita rozložení

  - **parametrické**: použitelné v případě aspoň intervalové úrovně měření, dostatečného rozsahu výběru a normality rozložení proměnných
  - **neparametrické**: nutné použít pro nižší (nominální a pořadové) úrovně měření a menší rozsahy výběru

Parametrické × neparametrické metody (poznámky)

- dá se říci, že každá parametrická metoda má svůj neparametrický „ekvivalent“
- často se jedná o několik možností

  – např: parametrický Pearsonův korelační koeficient

  × neparametrický Spearmanův pořadový korelační koeficient nebo Čuprovův koeficient kontingence atd.

Explorační × konfirmační postupy

- exploračníí
  - „detektivní“ práce – cílem je objevit vztahy, pravidelnosti nebo zákonitosti
  - výsledkem takového postupu jsou často hypotézy, které je nutné dále ověřovat
- konfirmační
  - „rozsudek“ o platnosti nebo neplatnosti určité předem formulované hypotézy
  - předpokladem je existence nějaké teorie nebo modelu, aby bylo možné formulovat nějaká očekávání o výsledcích výzkumu

Explorační × konfirmační postupy (poznámky)

- většinu typů statistických analýz lze využít pro explorační i pro konfirmační účely
- Příklad:
  - regresní analýza může sloužit zjišťování statisticky významných *prediktorů* závislé proměnné (explorace) nebo ověření relativní důležitosti těchto proměnných v predikci (konfirmace)

Hypotéza – teorie – model

- *Teorie* – soubor vzájemně souvisejících hypotéz, které se doplňují a tvoří koherentní systém
- *Hypotéza* – tvrzení o vlastnosti konkrétního prvku nebo vztahu v rámci dané teorie
  - viz nulová × alternativní hypotéza
- *Model* – obvykle konkrétně kvantitativně vyjádřené vztahy mezi proměnnými umožňující predikci jejich chování

Typy hypotéz

- Deskriptivní
  - zastoupení nějakého typu chování v populaci
- Relační
  - vztahy mezi proměnnými
    - korelační: pouze konstatujeme vztah mezi proměnnými
    - kauzální: výskyt určitého jevu způsobuje výskyt jiného (statistickými metodami nelze prokázat)

Postup statistické indukce

1. Formulace nulové (H_0) a alternativní (H_A) hypotézy
2. Volba vhodného statistického testu
3. Volba hladiny významnosti (obvykle 5% nebo 1%)
4. Výpočet hodnoty testového kritéria

Obecný princip testu hypotézy

- H_0 – nulová hypotéza
- H_A – alternativní hypotéza

- postup: matematicko-statistická metoda vedoucí k rozhodnutí ve prospěch H_0 nebo H_A
- kritérium pro rozhodnutí: statistická významnost testu hypotézy (p-hodnota)

Nulová × alternativní hypotéza

- cílem analýzy je obvykle ověřit nějaké jednoduché tvrzení
  - např.: liší se mezi sebou 2 skupiny z hlediska množství nějaké látky v krvi?
- nulová hypotéza (H_0): jednoduché tvrzení o neexistenci nějakého vztahu, rozdílu, vlivu atd.
  - např.:
- alternativní hypotéza (H_A): prostá negace nulové hypotézy

Statistická významnost (p-hodnota, α)

- podmíněná pravděpodobnost výsledku, který bude prohlášen za nenáhodný (H_A), přestože ve skutečnosti je náhodný (H_0)
- tzn. riziko, že bude zamítnuta H_0 za předpokladu, že platí
- tzn. riziko *„planého poplachu“*

Síla testu
$(1 - \beta)$

- podmíněná pravděpodobnost výsledku, který bude prohlášen za nenáhodný a ve skutečnosti také je nenáhodný (H_A)
- tzn. výsledek, kdy bude zamítnuta H_0 za předpokladu, že neplatí
- tzn. výstup, kterého se při testování snažíme dosáhnout

Statistická významnost × síla testu

- **chyba I. druhu**
  - riziko zamítnutí H_0 za předpokladu, že platí
  - označuje se α
  - obvykle hodnoty 0,01 (1%) nebo 0,05 (5%)
- **chyba II. druhu**
  - riziko nezamítnutí H_0 za předpokladu, že neplatí
  - označuje se β
  - obvykle hodnoty 0,2 (20%) nebo 0,1 (10%)

Snahou je minimalizovat obě rizika!

Rizika chybných rozhodnutí

- existují 4 možné kombinace přijatého rozhodnutí ve vztahu ke skutečnosti
  - 2 možnosti – správné rozhodnutí
    - zamítnutí H_0, která neplatí (správné přijetí H_A)
    - nezamítnutí H_0, která platí (správné nepřijetí H_A)
  - 2 možnosti – nesprávné rozhodnutí
    - zamítnutí H0, která platí (chybné přijetí H_A)
    - nezamítnutí H0, která neplatí (chybné nepřijetí H_A)

Rizika chybných rozhodnutí II

		Skutečnost	
		Skupiny stejné	Skupiny různé
Rozhodnutí	**Stejné**	správně	chyba II. druhu
	Různé	chyba I. druhu	správně

		Skutečnost	
		Jsem zdravý	Jsem nemocný
Rozhodnutí	**Zdravý**	zdravý	nemocný a neléčený
	Nemocný	zdravý a léčený	nemocný

Popisné statistiky

- jednorozměrné indexy
  - charakteristiky polohy
  - charakteristiky variability
  - další momenty (šikmost, špičatost)
- vícerozměrné indexy
  - různé typy kontingenčních a korelačních koeficientů
  - složitější multivariační techniky

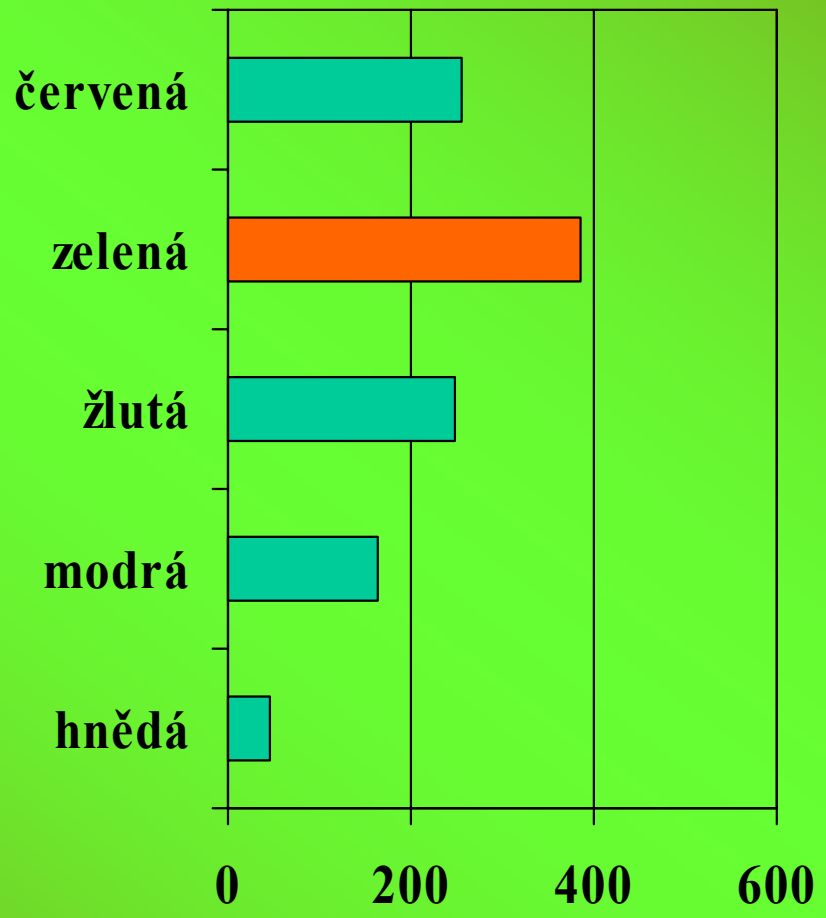
Charakteristiky polohy

- označují hodnotu, kolem které jsou umístěny ostatní hodnoty dané proměnné

- nejčastější:
  - *modus* (nejčastěji se vyskytující hodnota)
  - *medián* (hodnota dělící soubor na poloviny)
  - *průměr* (centrální tendence, těžiště)

Modus

Barva	**Četnost**
červená	256
zelená	385
žlutá	247
modrá	165
hnědá	46



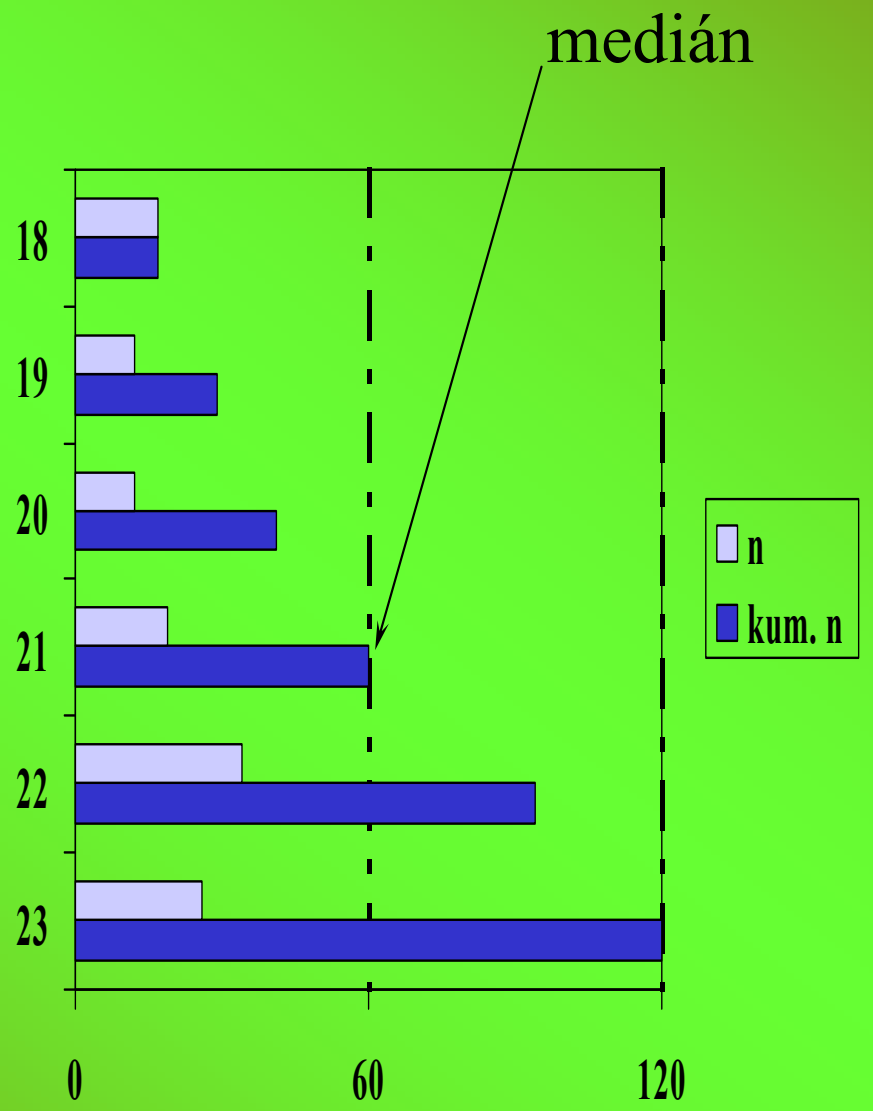
Modus (poznámky)

- existují data, kde se jako nejčastější vyskytuje více hodnot
  - 2 nejčastější hodnoty = *bimodální rozložení*
  - více nejčastějších = *polymodální rozložení*

- použití modu
  - i u nominálních proměnných

Medián

věk	n	%	kum. %
18	17	14,2	14,2
19	12	10,0	24,2
20	12	10,0	34,2
21	19	15,8	**50,0**
22	34	28,3	78,3
23	26	21,7	100,0



Medián (poznámky)

- medián = hodnota vyšší nebo rovná 50% hodnot dané proměnné a nižší než zbylých 50% hodnot
- v případě nejednoznačné polohy tohoto bodu se provádí interpolace

- použití mediánu
  - nutné aspoň ordinální (pořadové) proměnné

Průměr

- v podstatě bod těžiště dat

$$m_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

  - X_i = individuální i-tá hodnota proměnné X
  - N = rozsah souboru
- Použití
  - minimálně intervalová úroveň měření

Charakteristiky variability

- vyjadřují míru kolísání hodnot proměnné kolem nějakého středu (polohy, průměru)

- nejpoužívanější:
  - *rozpětí* (rozdíl mezi maximem a minimem)
  - *kvartilová odchylka* ($X_{0,75} - X_{0,25}$)
  - *směrodatná odchylka* (odmocnina rozptylu)

Rozptyl → směrodatná odchylka

- rozptyl: $s_X^2 \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (X_i - m_X)^2$
  - X_i = individuální i-tá hodnota proměnné X
  - N = rozsah souboru
  - m_X = průměr proměnné X
- směrodatná odchylka: $s_X = \sqrt{s_X^2}$
  - tzn. odmocnina z rozptylu

Další momenty rozložení dat

- **šikmost**
  - zkosení rozložení dat doleva nebo doprava
- **špičatost**
  - příliš mnoho (nebo příliš málo) hodnot v bezprostředním okolí střední hodnoty

- **oba indexy**
  - jejich extrémní hodnoty zkreslují výsledky parametrických testů

Vícerozměrné indexy

- kontingence a korelace
  - nějakým způsobem kvantifikují míru společného výskytu hodnot dvojice proměnných
- multivariační metody
  - vztahy více (mnoha) proměnných
  - např. korelační analýza, regresní analýza, faktorová analýza, analýza rozptylu (ANOVA) atd.

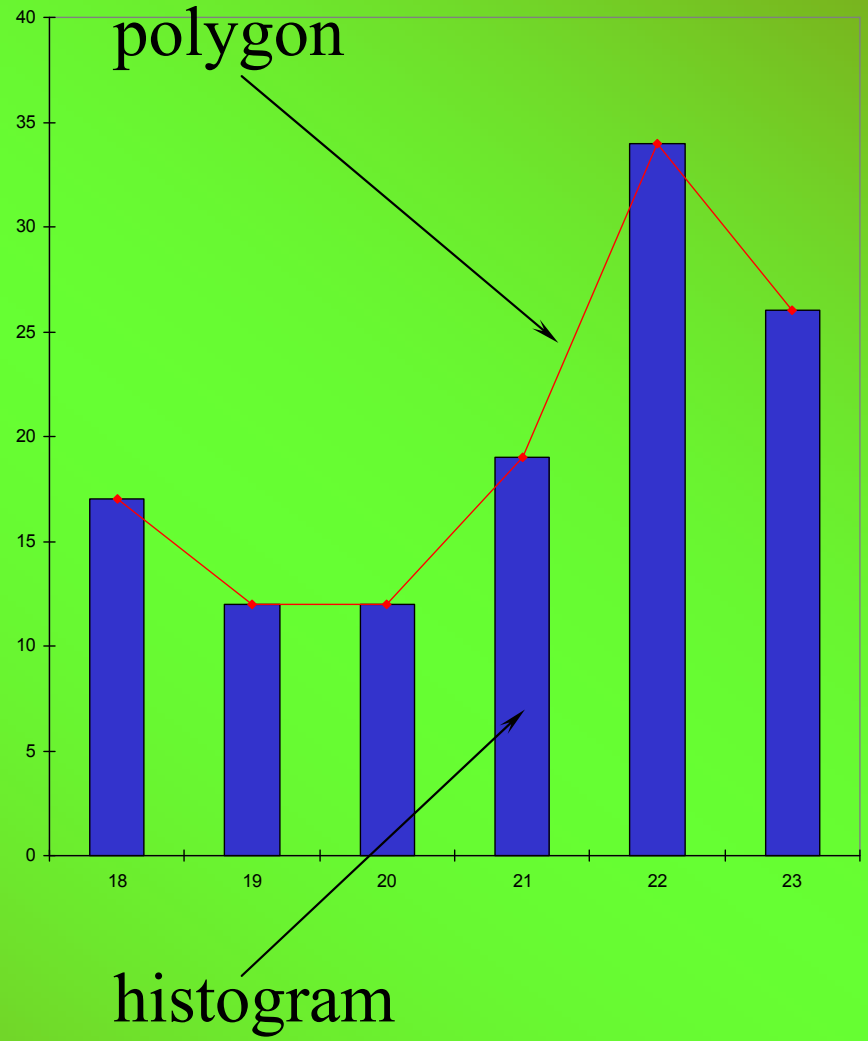
Rozložení hodnot

– s jakou četností se ve výběrovém souboru vyskytují jednotlivé hodnoty nebo skupiny hodnot?

– postupy:
  - grafické: názorné (např. histogram, polygon)
  - výpočetní: analytické, induktivní (testy rozložení)

Grafické metody

věk	n
18	17
19	12
20	12
21	19
22	34
23	26

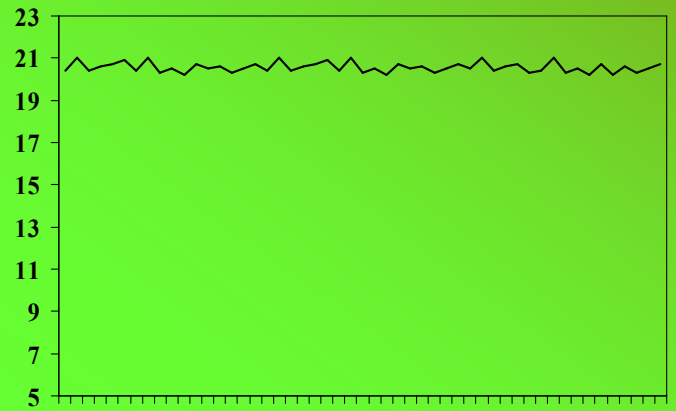


Analytické metody

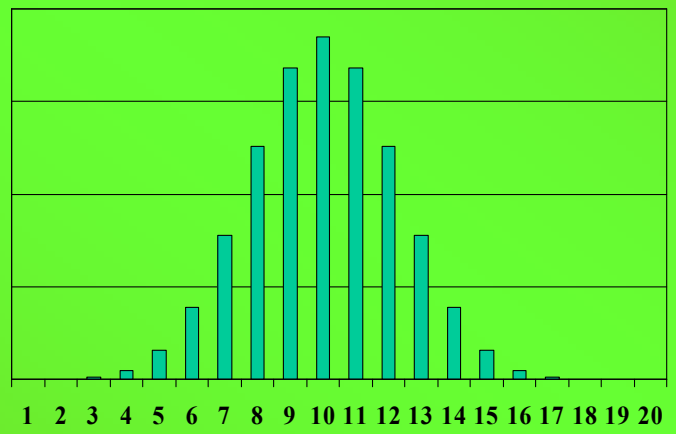
- test statistické hypotézy o rozložení dat
  - analogický postup jako v případě popsaného testování hypotéz
- postupy:
  - test chí-kvadrátu
  - Kolmogorovův-Smirnovův test
  - atd.

Příklady rozložení

- rovnoměrné rozložení
  - všechny hodnoty se vyskytují se stejnou četností

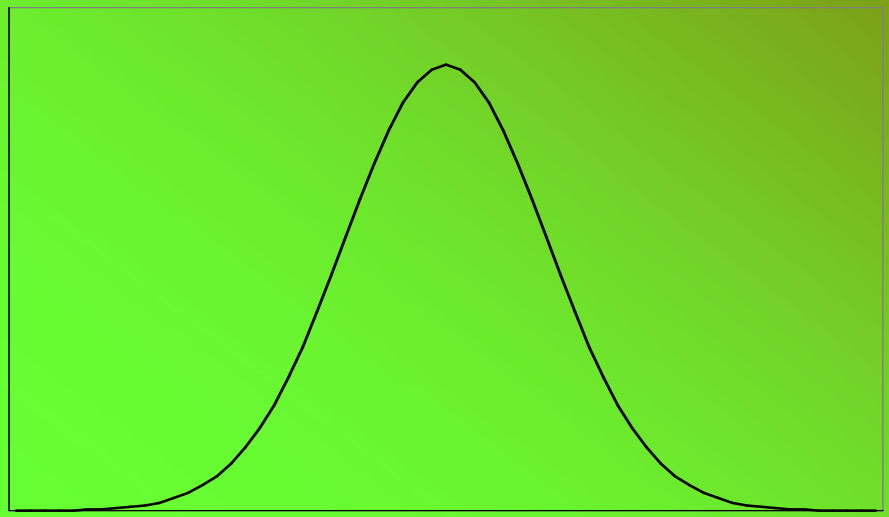


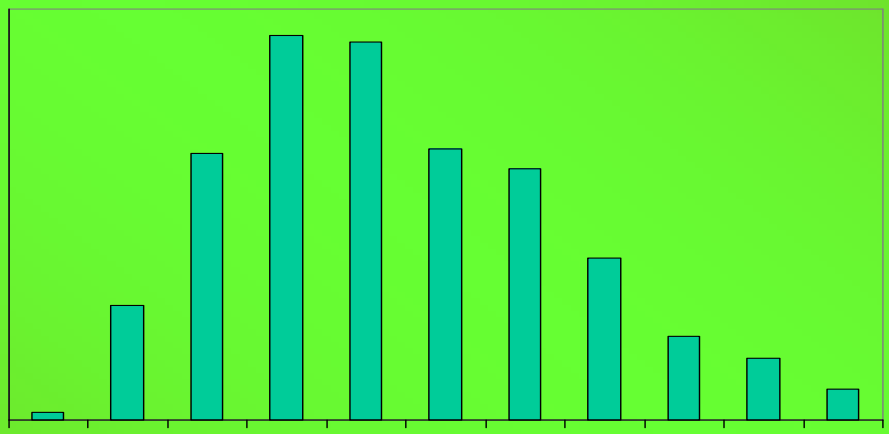
- binomické rozložení
  - výskyt kombinací z určitého počtu možností



Příklady rozložení

- normální rozložení
  - vzniká působením mnoha drobných vzájemně se sčítajících vlivů
- rozložení chí-kvadrát
  - vzniká součtem čtverců určitého počtu normálně rozložených náhodných proměnných





Postup statistické indukce

1. Formulace nulové (H_0) a alternativní (H_A) hypotézy
2. Volba vhodného statistického testu
3. Volba hladiny významnosti (obvykle 5% nebo 1%)
4. Výpočet hodnoty testového kritéria

Příklady výzkumných otázek

- Liší se účinek dvou různých léků na sledované charakteristiky?
  - H_0: Účinek obou léků … se neliší.
  - H_A: Účinek obou léků …. se liší.
- Je úmrtnost na určitou diagnózu různá ve dvou nemocnicích?
  - H_0: Úmrtnost … se neliší.
  - H_A: Úmrtnost … se liší.

Nutnost použití statistiky

- při dostatečně přesném měření zjistíme nějaké rozdíly vždy

- **ale**:
  - Je rozdíl mezi dvěma podmínkami *významný*?
- **proto**:
  - Posuzování *statistické významnosti*.

Chyba I. a II. druhu

- chyba I. druhu: Zamítnutí H_0 (přijetí H_A), která platí
  - Příklad: Mezi účinky dvou různých léků není rozdíl, ale my budeme (chybně) tvrdit, že je
- chyba II. druhu: Nezamítnutí H_0 (zamítnutí H_A), která neplatí
  - Příklad: Existují rozdíly mezi dvěma terapiemi, ale my budeme (chybně) tvrdit, že ne

Pravděpodobnosti vzniku chyb

- chyba I. druhu: α
  - tzv. *statistická významnost*
- chyba II. druhu: β
  - $1 - \beta$ = tzv. *síla testu*
- riziko chyb obou typů se snažíme minimalizovat
- snížení rizika vzniku chyby I. druhu zvyšuje riziko vzniku chyby II. druhu (a naopak)

Způsoby eliminace chyb

- chyba I. druhu
  - hodnotu α volíme na základě toho, jak přísní chceme být (0,05 nebo přísnější 0,01)
- chyba II. druhu
  - obvykle se snažíme dosáhnout hodnoty β aspoň 0,2
  - je nutný dostatečně velký rozsah výběrového souboru (N)
- obě hodnoty (α i β) závisí na velikosti efektu (rozdílu, vztahu), který se snažíme detekovat
  - čím drobnější je efekt, tím větší N je nutné

Rizika chybných rozhodnutí II

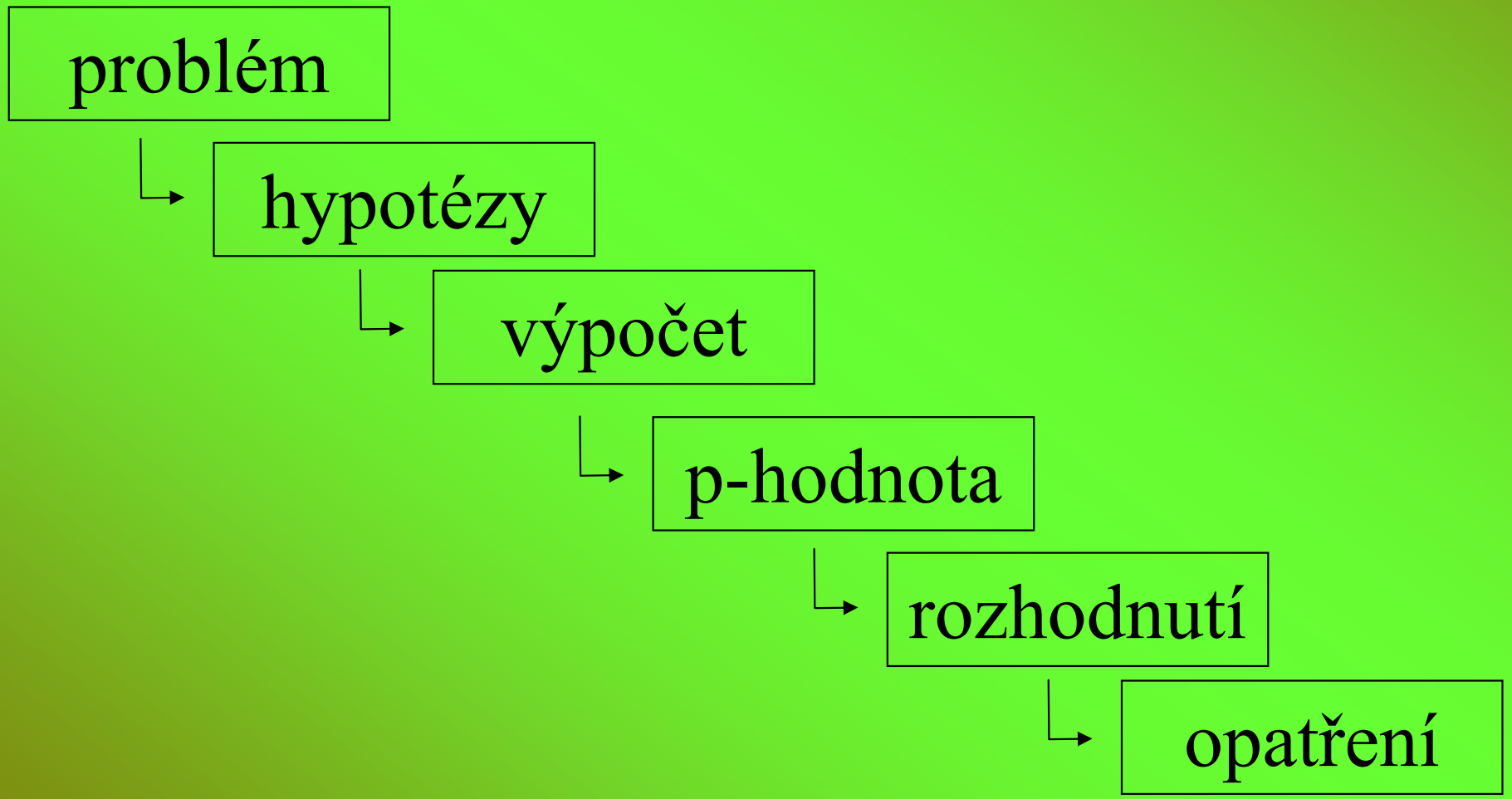
		Skutečnost	
		Skupiny stejné	Skupiny různé
Rozhodnutí	**Stejné**	<u>správně</u> (1 – α)	chyba II. druhu (β)
	Různé	chyba I. druhu (α)	<u>správně</u> (1 – β)

		Skutečnost	
		Jsem zdravý	Jsem nemocný
Rozhodnutí	**Zdravý**	<u>zdravý</u>	nemocný a neléčený
	Nemocný	zdravý a léčený	<u>nemocný</u>

Testy hypotéz

- chí-kvadrát
- t-test
- ANOVA (analýza rozptylu)
- korelace
- regresní analýza

Obecné schéma testu hypotézy



„Mapa“ pro několik běžných postupů

Typ dat	**Porovnávaný ukazatel**	**Příklad**
diskrétní	četnosti (procenta)	Liší se podíl úmrtí pro jednotlivé typy onemocnění?
spojitá	průměr	Je průměrná doba léčby ve dvou zařízeních stejná?
	rozptyl	Kolísá krevní tlak u dvou léčebných postupů stejně? Také porovnání více než 2 průměrů.
	vztah	Souvisí doba léčby např. s věkem?

Pokračování „mapy“

Typ dat	**Porovnávaný ukazatel**	**Test**
diskrétní	četnosti (procenta)	chí-kvadrát (a další neparametrické testy)
spojitá	průměr	t-testy
	rozptyl	ANOVA
	vztah	korelace regresní analýza

Nástroje na provádění testů

- specializovaný statistický software (např. SPSS, Statistica, BMDP, SAS, S-Plus atd.)

nebo

- znalost vzorců, tabulky příslušných rozložení + kalkulačka nebo spreadsheet

Test chí-kvadrátu

„Mapa“ pro několik běžných postupů

Typ dat	**Porovnávaný ukazatel**	**Příklad**
diskrétní	četnosti (procenta)	Liší se podíl úmrtí pro jednotlivé typy onemocnění?
spojitá	průměr	Je průměrná doba léčby ve dvou zařízeních stejná?
	rozptyl	Kolísá krevní tlak u dvou léčebných postupů stejně? Také porovnání více než 2 průměrů.
	vztah	Souvisí doba léčby např. s věkem?

Příklad

- Máme tři skupiny pacientů s určitou diagnózou – A, B a C, a podezření, že podíl komplikací se v jednotlivých skupinách liší

- Základní soubor: všichni pacienti s danou diagnózou (všech tří typů A, B a C)
- Výběrový soubor: náhodný výběr pacientů všech tří typů diagnóz

Hypotézy

- H_0: Podíl komplikací u jednotlivých typů diagnózy (A, B a C) se neliší

- H_A: Aspoň jeden typ diagnózy se od ostatních liší z hlediska podílu komplikací

Data

	Typ diagnózy			
	A	B	C	Celkem
Bez komplikace	1295	1396	1696	4387
Komplikace	147	203	119	469
Celkem	1442	1599	1815	4856

Vyčíslení nulové hypotézy

- Jak by data vypadala, kdyby mezi dodavateli nebyl žádný rozdíl?

$$\text{OČEKÁVANÁ ČETNOST} = \frac{\text{řádková suma} \times \text{sloupcová suma}}{\text{celková suma}}$$

Očekávané četnosti (H_0)

	Typ diagnózy			
	A	B	C	Celkem
Bez komplikace	$\frac{4387\times1442}{4856}=1302.73$	$\frac{4387\times1599}{4856}=1444.57$	$\frac{4387\times1815}{4856}=1639.70$	4387
Komplikace	$\frac{469\times1442}{4856}=139.27$	$\frac{469\times1599}{4856}=154.43$	$\frac{469\times1815}{4856}=175.30$	469
Celkem	1442	1599	1815	4856

Pozorované a očekávané četnosti

	Dodavatel			
	A	B	C	Celkem
Bez komplikace	1295 *1302.73*	1396 *1444.57*	1696 *1639.70*	4387
Komplikace	147 *139.27*	203 *154.43*	119 *175.30*	469
Celkem	1442	1599	1815	4856

Vzorec chí-kvadrátu

- Hodnota chí-kvadrátu

$$\sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij}^{(o)} - n_{ij}^{(e)}\right)^2}{n_{ij}^{(e)}}$$

- $n_{ij}^{(o)}$ - pozorovaná četnost v i-tém řádku a j-tém sloupci tabulky
- $n_{ij}^{(e)}$ - očekávaná četnost v i-tém řádku a j-tém sloupci tabulky

Počet stupňů volnosti

- zohledňuje velikost zpracovávané tabulky

- $df = (r - 1) \times (s - 1)$

  r = počet řádků tabulky (bez součtů)

  s = počet sloupců tabulky (bez součtů)

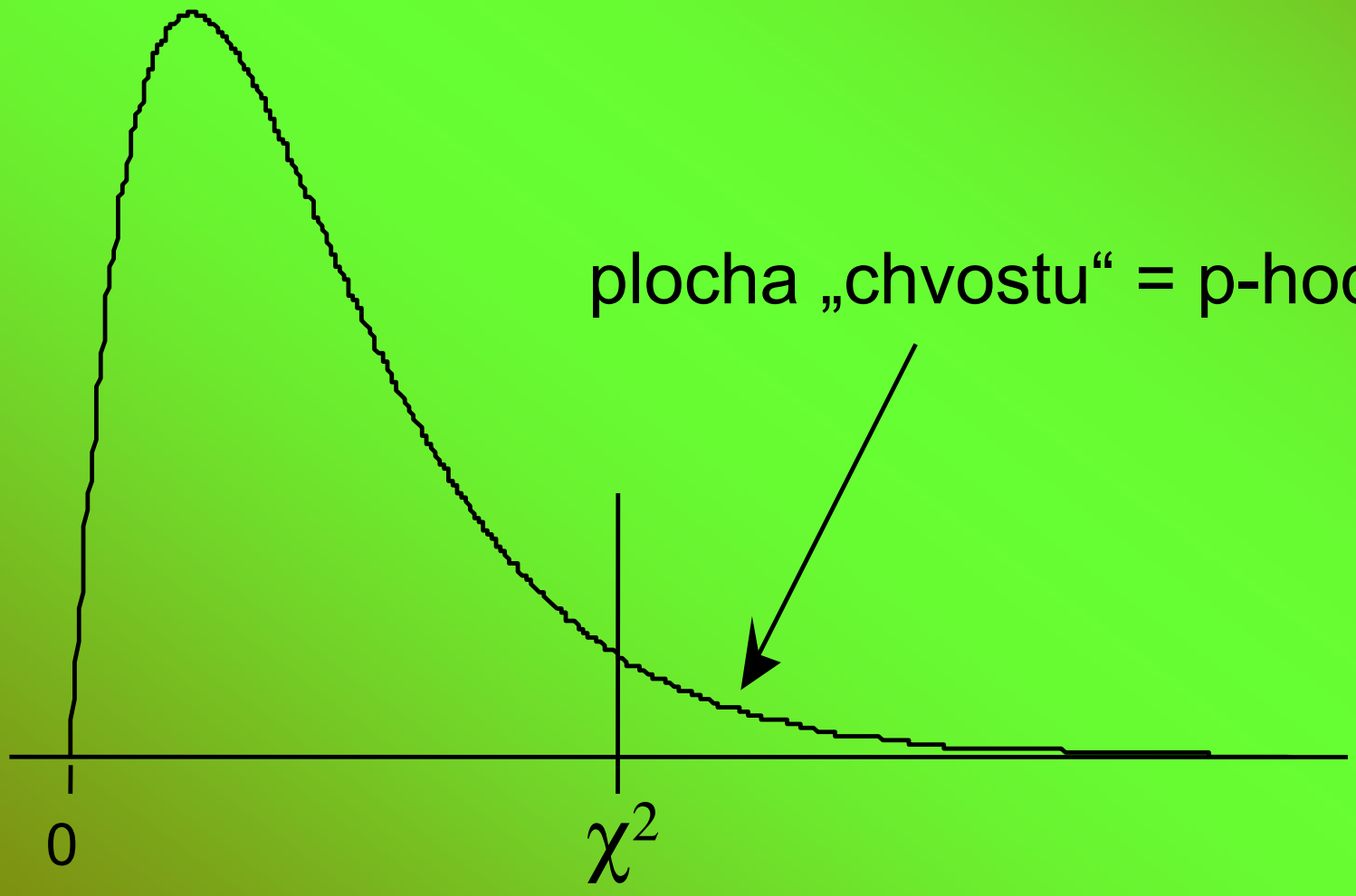
- v našem případě:

  – $(2 - 1) \times (3 - 1) = 2$

Výpočet chí-kvadrátu

	Dodavatel			
	A	B	C	Celkem
Bez komplikace	0.05	1.63	1.93	3.61
Komplikace	0.43	15.27	18.08	33.78
Celkem	0.47	16.91	20.01	**37.39**

Rozložení chí-kvadrát



Získání p-hodnoty

- porovnání získané hodnoty chí-kvadrátu s tabulkovou hodnotou pro příslušný počet stupňů volnosti a zvolenou hladinu významnosti (α)
- např.: použití funkce CHIDIST v Excelu

=CHIDIST(37,39;2) = 7.59×10^{-9} = 0.00000

Srovnání p-hodnoty se zvolenou α

- $0.00000 < 0.05$

- **<u>ZÁVĚR</u>**: výsledek je *statisticky významně* odlišný (na 5% hladině významnosti) od nulové hypotézy o neexistenci rozdílu mezi podílem komplikací v jednotlivých skupinách diagnóz

Závěry

- Typy diagnóz (A, B a C) se statisticky významně liší v podílu komplikací

- Skupina B se liší statisticky významně vyšším výskytem komplikací
- Skupina C se liší statisticky významně nižším výskytem komplikací

Předpoklady testu chí-kvadrát

- Výběr je reprezentativní vzhledem k základnímu souboru
- Rozložení diskrétních dat použitých v testu je binomické
- Očekávaná četnost v každé buňce tabulky musí být ≥ 5 (pokud není, je třeba větší výběr)

t-test

„Mapa“ pro několik běžných postupů

Typ dat	**Porovnávaný ukazatel**	**Příklad**
diskrétní	četnosti (procenta)	Liší se podíl úmrtí pro jednotlivé typy onemocnění?
spojitá	průměr	Je průměrná doba léčby ve dvou zařízeních stejná?
	rozptyl	Kolísá krevní tlak u dvou léčebných postupů stejně? Také porovnání více než 2 průměrů.
	vztah	Souvisí doba léčby např. s věkem?

Příklad

- Je průměrná doba léčby na dvou srovnatelných odděleních stejná?

- Základní soubor: všechny doby léčby všech pacientů jednoho a druhého oddělení
- Výběrový soubor: náhodný výběr pacientů obou oddělení a jejich doby léčby

3 typy t-testu

- jednovýběrový t-test
  - porovnání průměru s konkrétní hodnotou (např. porovnání doby léčby s hodnotou publikovanou v literatuře)
- t-test pro nezávislé výběry
  - porovnání doby léčby na dvou srovnatelných odděleních při nezávislém vybírání těchto objemů pro jednotlivá oddělení
- párový t-test
  - porovnání doby léčby na dvou odděleních tak, že se vybírají vždy dvojice pacientů z jednoho a druhého oddělení, aby si byli v relevantních charakteristikách co nejpodobnější

Příklad t-testu pro nezávislé výběry

Problém: Máme dvě oddělení, na kterých se léčí stejné choroby. Máme data od náhodně vybraných deseti pacientů trpících stejnými chorobami, představující dobu léčby. Liší se průměrná doba léčby na těchto odděleních?

- Základní soubor: doby léčby vybraných pacientů (stejné choroby) za celou dobu fungování obou oddělení
- Výběrový soubor: vybraných deset údajů pro každé oddělení

Hypotézy

- H_0: Průměrná doba léčby na obou odděleních se neliší ($m_1 = m_2$)

- H_A: Průměrná doba léčby na obou odděleních se liší ($m_1 \neq m_2$)

Data

Oddělení A	26	24	25	28	24	25	27	29	25	26
Oddělení B	24	25	26	24	26	30	23	26	27	22

	průměr (m)	rozptyl (s^2)
Oddělení A	25.9	2.77
Oddělení B	25.3	5.12

Výpočetní postup

- statistika t a počet stupňů volnosti (df)

$$t = \frac{m_1 - m_2}{s_0} \qquad df = n_1 + n_2 - 2$$

m_1 = průměr 1. oddělení n_1 = počet měření 1. oddělení

m_2 = průměr 2. oddělení n_2 = počet měření 2. oddělení

$$s_0 = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

s_1^2 = rozptyl 1. oddělení s_2^2 = rozptyl 2. oddělení

Zjištění p-hodnoty

- porovnání získané hodnoty t s tabulkovou hodnotou pro příslušný počet stupňů volnosti a zvolenou hladinu významnosti (α)
- např.: použití funkce TDIST v Excelu

- =TDIST(t;df;2)

Výsledky

$s_0 = 0.888$ $t = 0.676$

$df = 18$ p-hodnota = 0.508

- Závěr: Protože 0.508 > 0.05, nulovou hypotézu o rozdílu mezi průměrnými dobami léčení na 2 odděleních nezamítáme – tzn. nebyl prokázán statisticky významný rozdíl mezi nimi.

Předpoklady t-testu

- skupiny hodnot by měly být přibližně stejně rozsáhlé
- v obou skupinách by měl být počet měření dostatečný vzhledem k velikosti zjišťovaného rozdílu
- stejné rozptyly v obou skupinách hodnot (pokud neplatí, je třeba použít složitější postup)

Analýza rozptylu

„Mapa“ pro několik běžných postupů

Typ dat	**Porovnávaný ukazatel**	**Příklad**
diskrétní	četnosti (procenta)	Liší se podíl úmrtí pro jednotlivé typy onemocnění?
spojitá	průměr	Je průměrná doba léčby ve dvou zařízeních stejná?
	rozptyl	Kolísá krevní tlak u dvou léčebných postupů stejně? Také porovnání více než 2 průměrů.
	vztah	Souvisí doba léčby např. s věkem?

Modelový příklad

- Problém: Představte si, že neporovnáváme výkon 2 oddělení, ale 4 oddělení

- Možnost: Provedení t-testu pro každou dvojici oddělení (tzn. 6 t-testů)

  Nevýhoda: Prudké zvýšení pravděpodobnosti chyby I. druhu

  riziko chyby I. druhu = $1 - (0.95)^6 = 0.2649 =$

  $= 26.5\%$

Odlišný přístup

- současné porovnávání variability (rozptylů) uvnitř skupin a variability (rozptylu) mezi skupinami
- ANOVA (ANalysis Of VAriance) neboli *analýza rozptylu*
- statistika F (také se říká F-test)

Hypotézy

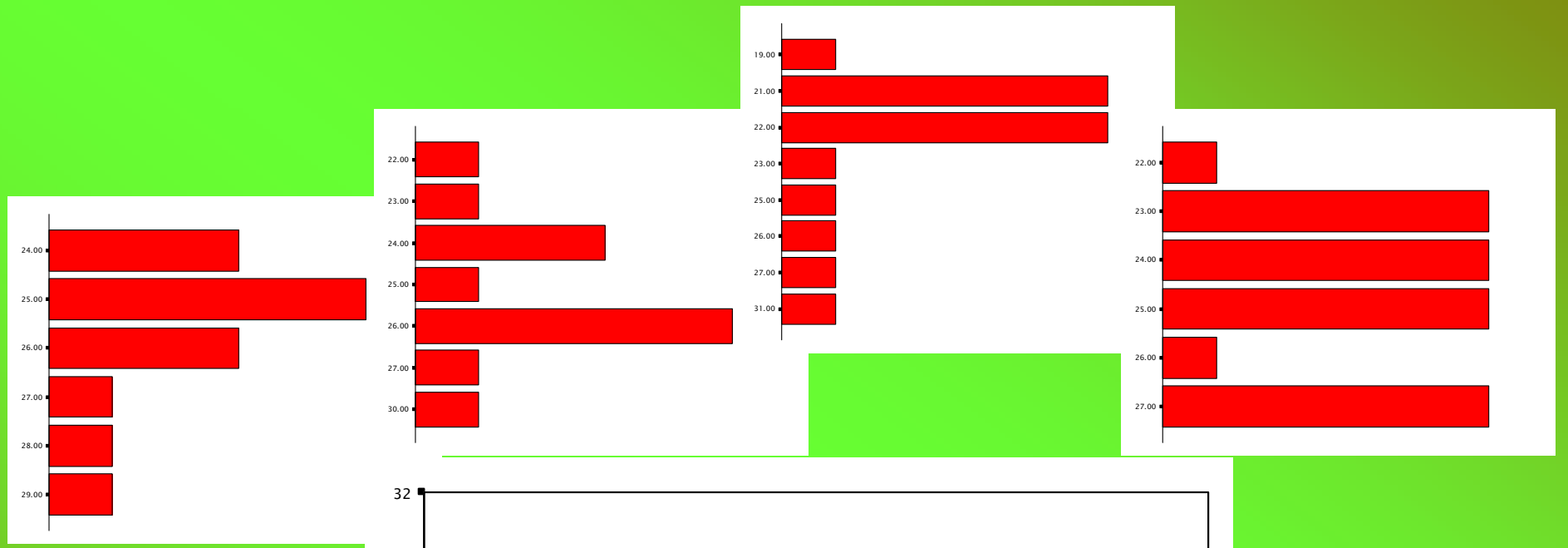
- H_0: Variabilita uvnitř skupin (oddělení) je stejná jako variabilita mezi skupinami

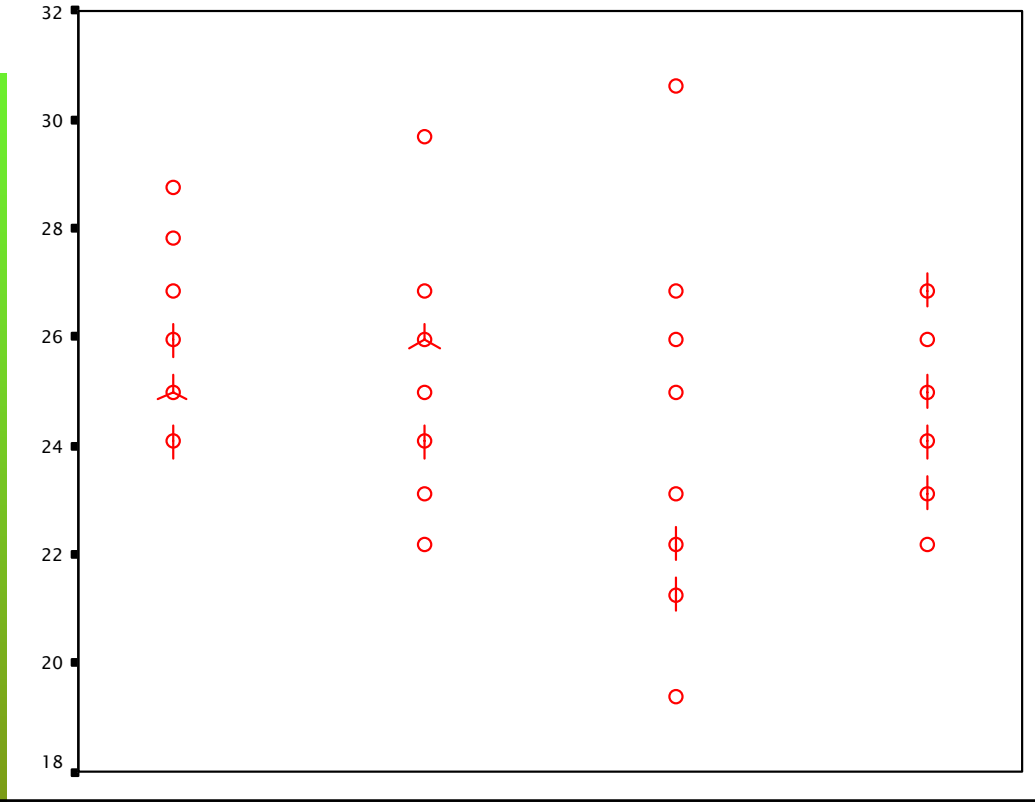
- H_A: Variabilita mezi skupinami (odděleními) je odlišná od variability uvnitř skupin

Data

Oddělení A	26	24	25	28	24	25	27	29	25	26
Oddělení B	24	25	26	24	26	30	23	26	27	22
Oddělení C	22	21	19	27	23	26	22	31	21	25
Oddělení D	23	25	24	27	24	26	23	27	25	22

Grafy hodnot





Výpočty

- hodnota F + dvě hodnoty stupňů volnosti

$$F = \frac{MS_b}{MS_w} \qquad df_b = n_g - 1 \qquad df_w = N - n_g$$

- MS_b = průměrná suma čtverců mezi skupinami
- MS_w = průměrná suma čtverců uvnitř skupin
- n_g = počet skupin
- N = celkový počet hodnot

Výpočty II

$$MS_b = \frac{SS_b}{df_b} \qquad MS_w = \frac{SS_w}{df_w}$$

- SS_b = suma čtverců mezi skupinami
- SS_w = suma čtverců uvnitř skupin

$$SS_b = n^{(i)} \sum_{i=1}^{n_g} \left(m_i - m_T \right)^2$$

$$SS_w = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \left(x_j^{(i)} - m_i \right)^2$$

Výsledky

Oddělení	$\mathbf{m_i}$	$\mathbf{n^{(i)}}$
A	25.9	10
B	25.3	10
C	23.7	10
D	24.6	10
Celkem	24.875 ($=m_T$)	40

Výsledky II

	SS	df	MS	F
Mezi skupinami (b)	26.875	3	8.958	1.525
Uvnitř skupin (w)	211.5	36	5.875	

Zjištění p-hodnoty

- porovnání získané hodnoty F s tabulkovou hodnotou pro příslušné počty stupňů volnosti a zvolenou hladinu významnosti (α)
- např.: použití funkce v Excelu

- $=FDIST(F;df_b;df_w) = 0.225$

Závěry

- 0.225 > 0.05, což znamená, že nejsme schopni zamítnout H0 o stejnosti variability uvnitř skupin a mezi skupinami
- mezi průměrnými dobami léčení na jednotlivých odděleních A, B, C a D není statisticky významný rozdíl

Předpoklady ANOVY

- reprezentativnost výběrových souborů
- normální rozložení dat
- přibližně stejné velikosti jednotlivých skupin
- rovnost rozptylů v jednotlivých skupinách

Korelační a regresní analýza

„Mapa“ pro několik běžných postupů

Typ dat	**Porovnávaný ukazatel**	**Příklad**
diskrétní	četnosti (procenta)	Liší se podíl úmrtí pro jednotlivé typy onemocnění?
spojitá	průměr	Je průměrná doba léčby ve dvou zařízeních stejná?
	rozptyl	Kolísá krevní tlak u dvou léčebných postupů stejně? Také porovnání více než 2 průměrů.
	vztah	Souvisí doba léčby např. s věkem?

Korelace a regrese

- kvantitativní hodnocení vztahu mezi dvěma a více proměnnými
- předpoklad: hypotetický vztah je *lineární*
- možnost predikce (předpovědi) hodnot závislé proměnné na základě znalosti hodnot proměnné nezávislé

Korelační graf (*scatterplot*)

- vyjadřuje graficky závislost mezi dvěma kvantitativními proměnnými
- hodnoty dvojice proměnných se používají jako souřadnice pro umístění bodu představujícího daný objekt
- neumožňuje snadné porovnání míry těsnosti vztahu u různých dvojic proměnných → *korelační koeficient*

Korelační koeficient

$$r_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i - m_x)(y_i - m_y)}{s_x s_y}$$

- m_x (m_y) = průměr proměnné x (y)
- s_x (s_y) = směrodatná odchylka x (y)
- N = počet dvojic hodnot (např. osob)
- x_i (y_i) = hodnota proměnné x (y) osoby i

- Pozn.: postihuje *lineární* vztah mezi proměnnými

Hodnoty korelačního koeficientu

- $r \in \langle -1; 1 \rangle$
- $r = -1$ – dokonalý záporný lineární vztah
- $r = 0$ – nepřítomnost lineárního vztahu
- $r = 1$ – dokonalý kladný lineární vztah

- r^2 = *koeficient determinace* – vyjadřuje podíl kolísání (rozptylu) společného oběma proměnným

Test významnosti r

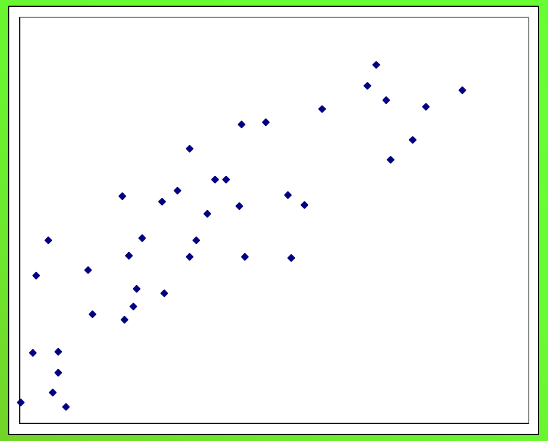
- $H_0: r = 0$ $H_A: r \neq 0$
- t-test jako v případě porovnávání 2 průměrů

$$t = \frac{r_{XY}\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad df = N-2$$

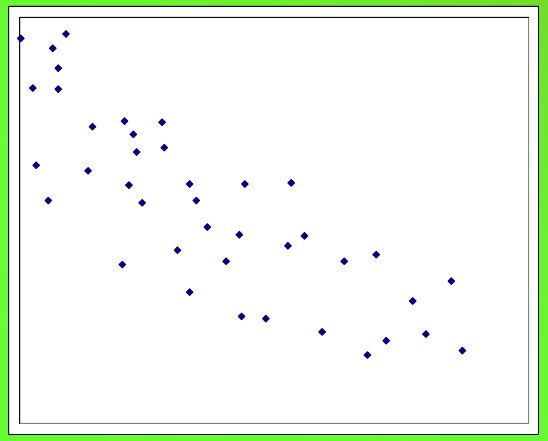
- získání p-hodnoty pro t – opět jako u t-testu

- např.: funkce v Excelu
- =TDIST(t;df;2)

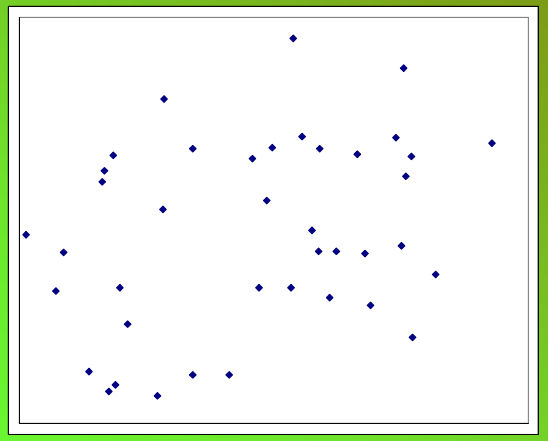
Korelační grafy a koeficienty



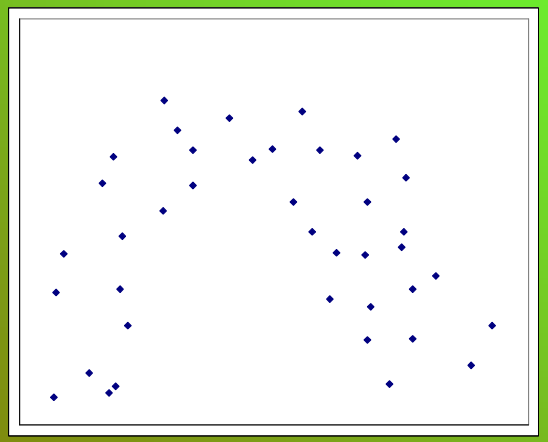
r = 0.84



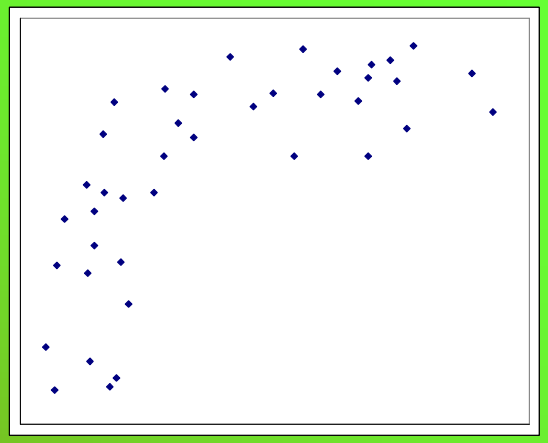
r = –0.82



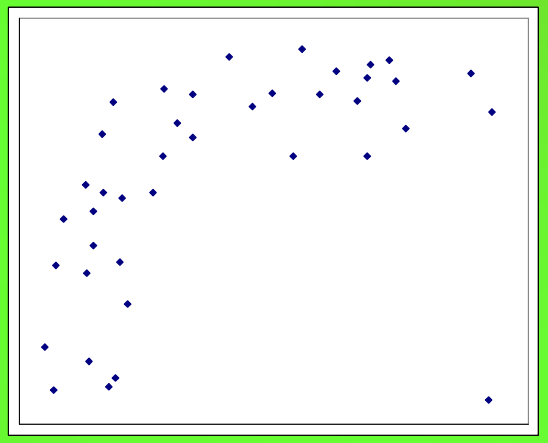
r = 0.31



r = 0.00



r = 0.72



r = 0.52

Lineární regrese

- nejjednodušší případ: regrese dvou proměnných
- vyjádření vztahu mezi proměnnými v podobě regresní rovnice:

$$Y = a + bX$$

- a = regresní konstanta
- b = regresní koeficient

Lineární regrese - vzorce

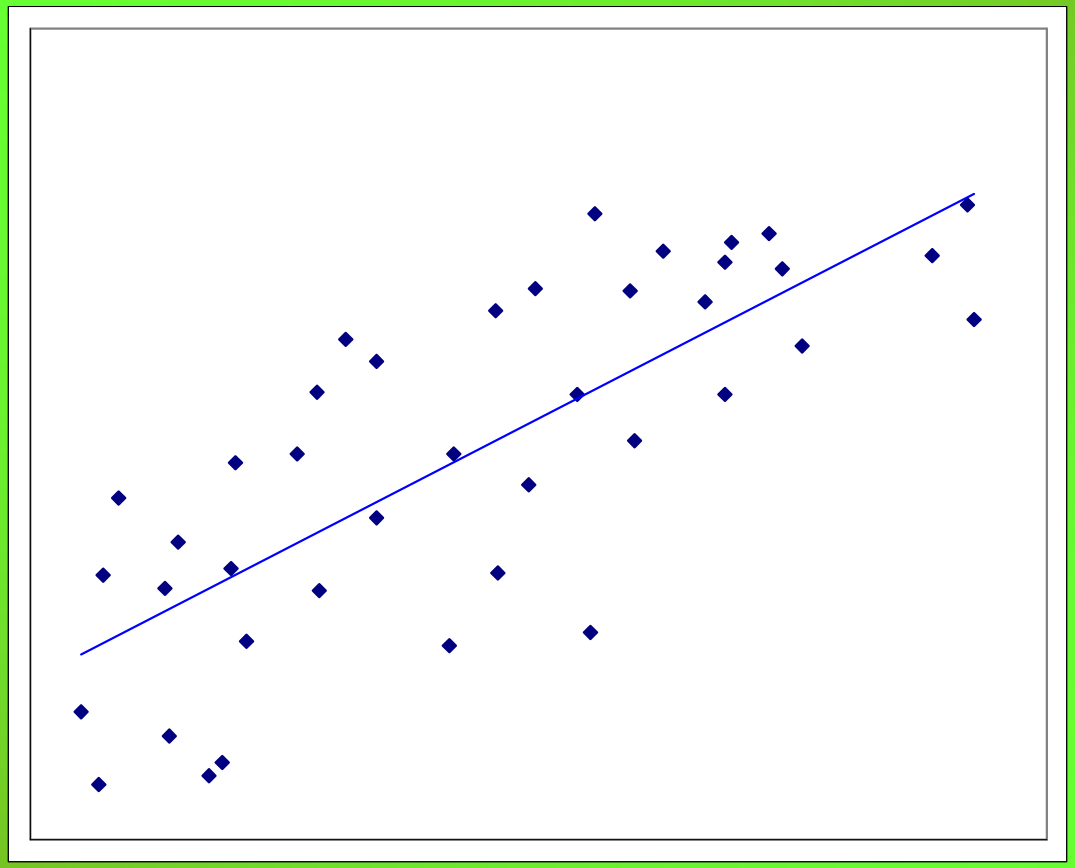
$$b = \frac{s_y}{s_x} r_{xy} \qquad a = m_y - b m_x$$

- regrese 2 proměnných (*jednoduchá regrese*): lze vypočítat na základě uvedených vzorců
- regrese 3 a více proměnných (*mnohonásobná regrese* – jedna závislá a 2 a více nezávislých proměnných): nutnost použít numerický postup

Lineární regrese - p-hodnota

- p-hodnota pro regresní koeficient (b)
- *naprosto stejná* jako pro r_{XY}
- u jednoduché lineární regrese jsou hodnoty korelace (r) a regresního koeficientu (b) zcela ekvivalentní (určují se navzájem)

Regrese



$$Y = -0.0058 + 0.9192\ X$$

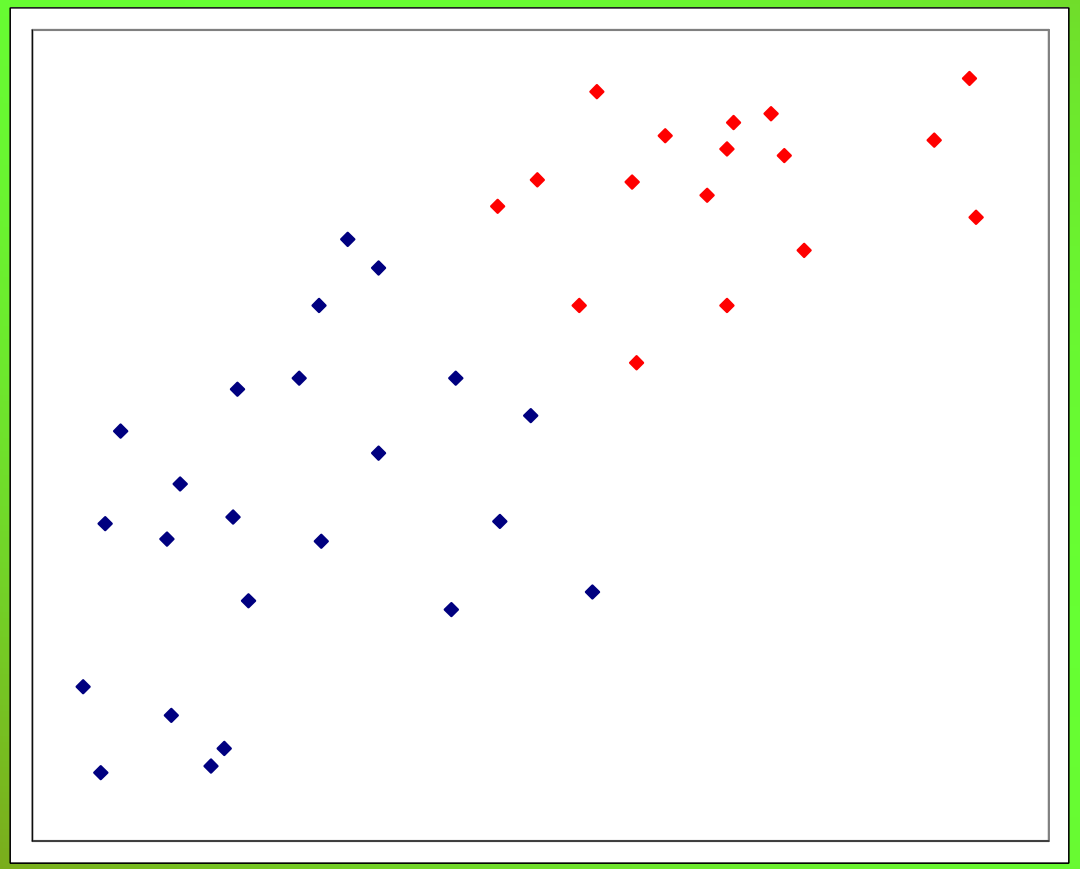
Varování

- Korelace nemusí znamenat nutně kauzální vztah.
- Absence korelace nemusí znamenat nutně neexistenci kauzálního vztahu.

Klamná korelace

- Existuje kladná statisticky významná korelace mezi počtem hasičských vozů u požáru a velikostí škody.
- Co z toho vyplývá?
- Součástí analýzy by měla být také proměnná vyjadřující velikost požáru.

Klamná korelace – sloučení 2 skupin



Příklad: Jednoduchá regrese

- Máme 10 hodnot pro dvě proměnné, X a Y. Vypočtěte regresní rovnici s X jako nezávislou a Y jako závislou proměnnou.

Jednoduchá regrese: Data

X	22	24	22	24	23	24	25	26	23	25
Y	152	162	153	161	156	165	172	178	154	167

	korelace	průměr (m)	směrodatná odchylka (s)
X	$r_{XY} = 0.967$	23.8	1.3166
Y		162	8.6410

Jednoduchá regrese: Výsledky

- b = 6.3462
- a = 10.9615
- p-hodnota = 0.000005

- Závěr: regresní rovnice je

$$Y = 10.9615 + 6.3462\ X$$

- směrnice rovnice je statisticky významně odlišná od nuly

Předpoklady lineární regrese

- reprezentativnost výběru
- normalita rozložení proměnných
- linearita vztahu proměnných

Cvičení

Příklad 1

- Určete, jaký typ testu se hodí na následující problém a proveďte ho.

- Existuje podezření, že různé nemocnice se liší v množství určitého typu infekce.

Příklad 1: Data

	Nem. A	**Nem. B**	**Nem. C**	**Celkem**
Infekce	156	327	153	636
Bez infekce	2857	4265	3624	10746
Celkem	3013	4592	3777	11382

Příklad 2

- Určete, jaký typ testu se hodí na následující problém a proveďte ho.

- Pro tutéž chorobu lze použít 3 různé postupy léčby. Otestujte, zda se neliší průměrná doba léčby pro jednotlivé léčebné postupy.

Příklad 2: Data

Postup 1	26	27	22	21	27	28	23	25
Postup 2	26	30	26	29	29	30	32	25
Postup 3	25	22	25	27	26	26	28	24