LINEÁRNÍ PROSTOR
(neboli VEKTOROVÝ PROSTOR)

Př.: Připomenutí pojmu VOLNÝ VEKTOR

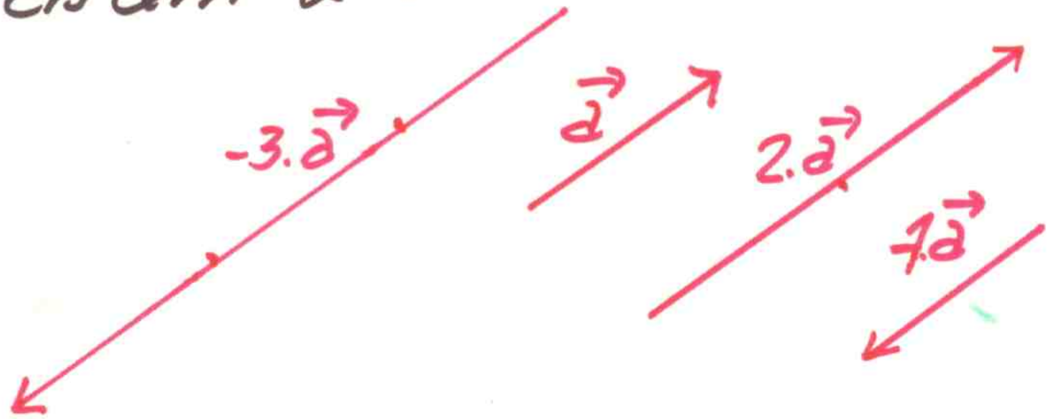
Volným vektorem nazveme množinu všech orientovaných úseček, které mají stejný směr a stejnou velikost. Značíme je malým písmenem se šipkou nahoře, např. $\vec{a}$

Znázornění:

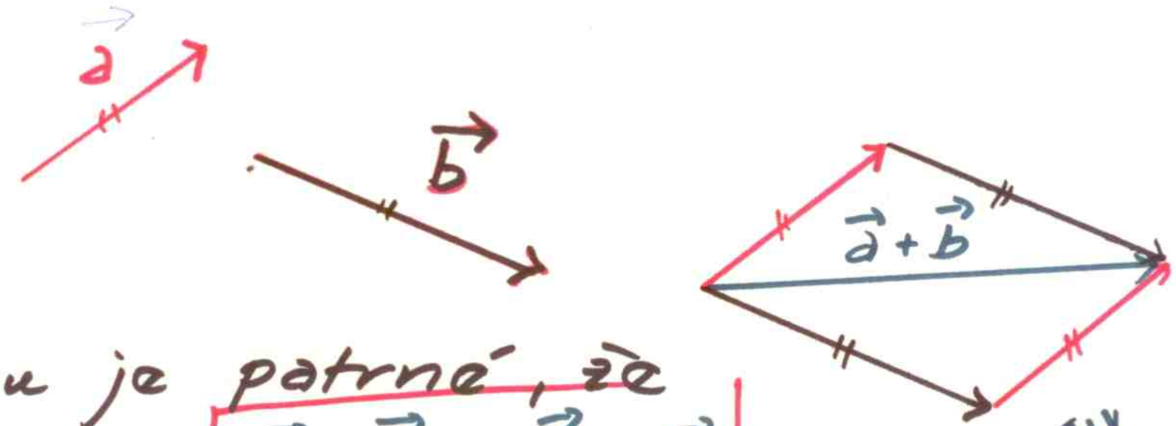
Tyto všechny orientované úsečky reprezentují tentýž volný vektor $\vec{a}$.

Délku každé orientované úsečky, která reprezentuje daný vektor $\vec{a}$ nazýváme velikostí volného vektoru a značíme ji $|\vec{a}|$. Orientované úsečky nulové délky reprezentují nulový vektor $\vec{o}$.

Volný vektor $\vec{a}$ můžeme násobit $\mathbb{R}$ číslem α:



Volné vektory $\vec{a}, \vec{b}$ můžeme sčítat:



Z obrázku je patrné, že

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}}$$

Lze ukázat, že sčítání volných vektorů a násobení volných vektorů $\mathbb{R}$ čísly splňuje i další podmínky, např.:

Pro každé tři volné vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ platí: $\boxed{\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}}$,

Pro každá dvě čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a volný vektor $\vec{a}$ platí:

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha.(\beta.\vec{a}) &= (\alpha.\beta).\vec{a}\\ (\alpha+\beta).\vec{a} &= \alpha.\vec{a}+\beta.\vec{a}\end{aligned}}$$

Dále např. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ a volné vektory $\vec{a}, \vec{b}$: $\boxed{\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha.\vec{a}+\alpha.\vec{b}}$

DEFINICE VEKTOROVÉHO PROSTORU

def. 4.1.:

Množinu P spolu s operacemi sčítání „+" a násobení reálným číslem „·" nazvame vektorovým (lineárním) prostorem, jsou-li splněny tyto podmínky:

(4.1.) $\forall a, b \in P: a + b = b + a$

(4.2.) $\forall a, b, c \in P: a + (b + c) = (a + b) + c$

(4.3.) Existuje prvek $0 \in P$ takový, že: $\forall a \in P: a + 0 = a$.

(4.4.) Pro $\forall a \in P$ existuje prvek $-a \in P$ tak, že $a + (-a) = 0$.

(4.5.) Pro $\forall a, b \in P$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $1 . a = a$.

(4.6.) —— " —— $\alpha.(\beta.a) = \alpha.(\beta a)$

(4.7.) —— " —— $(\alpha + \beta).a = \alpha a + \beta a$.

(4.8.) —— " —— $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Př.: Množina U všech volných vektorů spolu s operacemi sčítání volných vektorů a násobení volného vektoru $\mathbb{R}$číslem, které byly zavedeny v minulém příkladě, tvoří vektorový prostor. Označujeme jej U.

Další příklady vektorových prostorů:

Př.: Množina $M^{m,n}$ všech matic typu (m,n) s operacemi sčítání matic (zavedené v definici 3.2) a násobení matice číslem (zavedená v def. 3.3.) tvoří vektorový prostor $M^{m,n}$.
Vlastnosti vektorového prostoru (4.1.)–(4.8.) jsou skutečně splněny, jak bylo ukázáno ve větě 3.2.

Př.: Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic $\mathbb{R}$ čísel.
Položíme ~~...~~ pro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbb{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\mathbb{b} = (b_1, \dots, b_n)$:

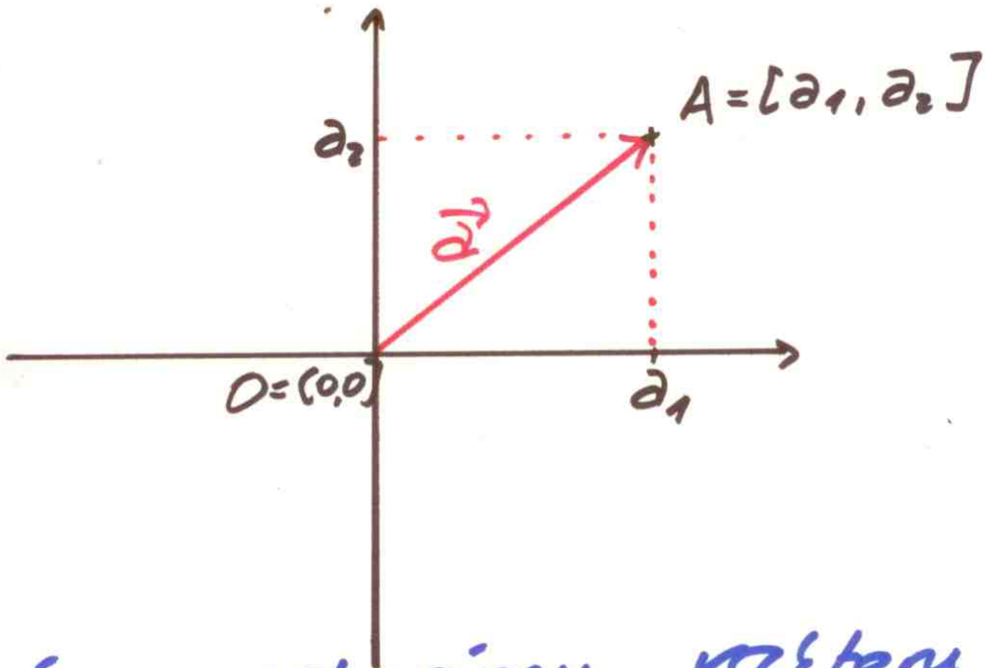
$$\mathbb{a} + \mathbb{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$\alpha . \mathbb{a} = (\alpha . a_1, \dots, \alpha . a_n).$$

Množina $\mathbb{R}^n$ s těmito operacemi tvoří vektorový prostor, který značíme V_n a nazýváme aritmetickým vektorovým prostorem.
(Vlastnosti (4.1.)–(4.8) nemusíme ověřovat – postup je analogický jako v prostoru sloupcových vektorů M^n, nebo v prostoru řádkových vektorů $M^{1,n}$.)

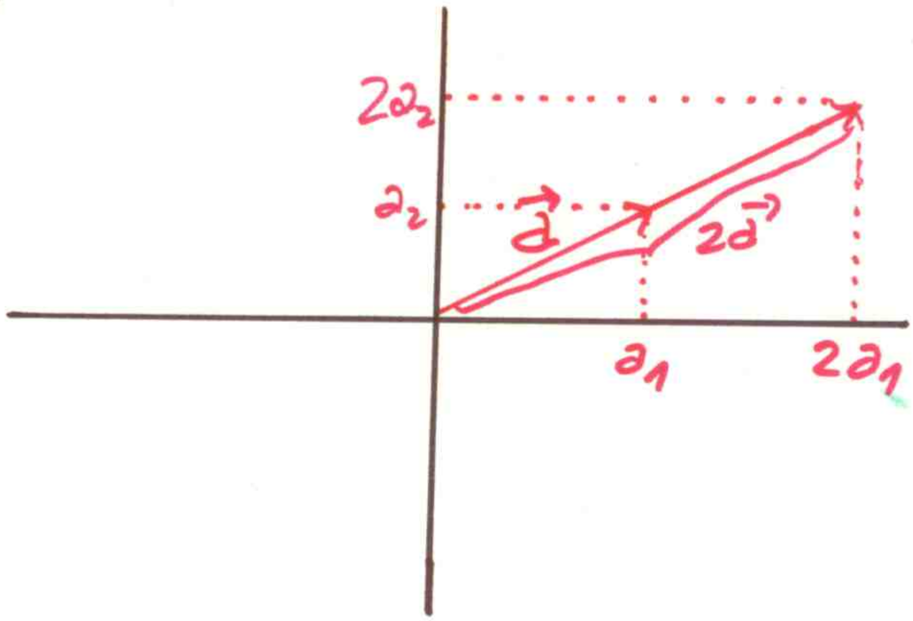
VZTAH MEZI PROSTOREM V_2 A PROSTOREM VOLNÝCH VEKTORŮ $\mathcal{V}_2$

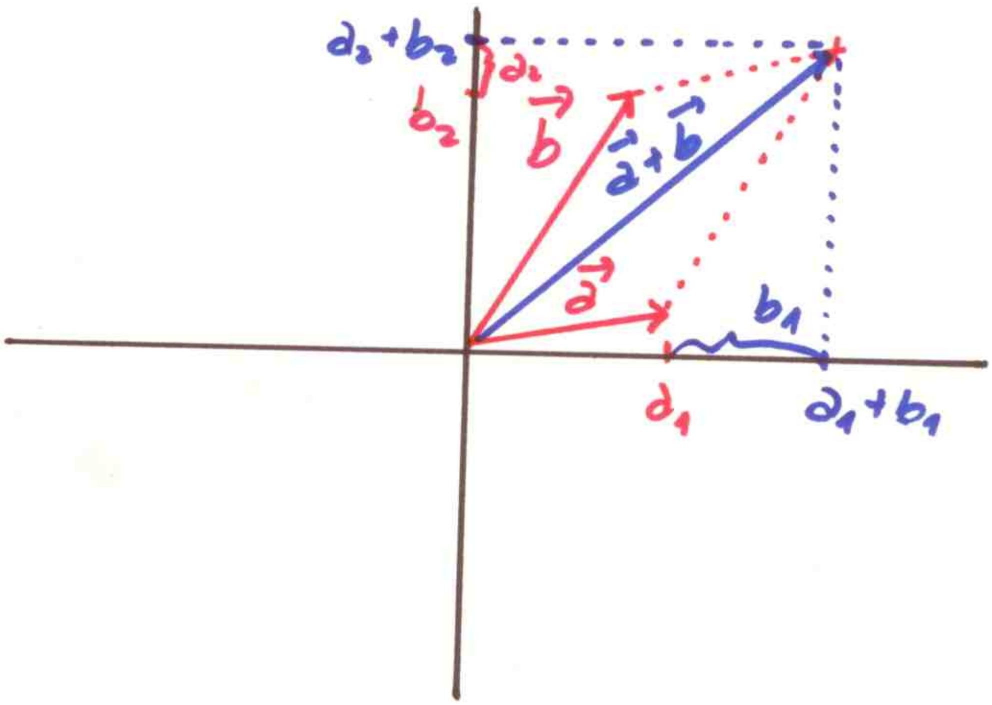
Uvažujme prostor $\mathcal{V}_2$ volných vektorů v rovině, kde je zavedán kartézský souřadný systém. Volný vektor $\vec{a}$ můžeme reprezentovat orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OA}$, kde $O = [0,0]$, $A = [a_1, a_2]$:



Každému volnému vektoru $\vec{a} \in \mathcal{V}_2$ můžeme jednoznačně přiřadit vektor $(a_1, a_2) \in V_2$. Toto přiřazení zachovává obě operace sčítání vektorů i násobení číslem.

Viz například:





Obdobná jednoznačná korespondance existuje i mezi U_n a V_n pro lib. $n \in \mathbb{N}$.

VEKTOROVÝ PODPROSTOR

Def. 4.3.: Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor definovaný na množině P s operacemi „+" a násobení $\mathbb{R}$ číslem „·". Nechť $M \subseteq P$ a nechť množina M spolu s těmito operacemi „+", „·" tvoří vektorový prostor $\mathbb{M}$. Pak $\mathbb{M}$ nazýváme vektorovým podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{P}$.

Př.: Uvažujme prostor V_4 a následující podmnožiny $\mathbb{R}^4$:

(1) $M_1 = \{(a_1, a_2, a_3, 0),\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

(2) $M_2 = \{(a_1, a_2, a_3, 1),\ \text{—"—}\}$

(3) $M_3 = \{(a_1, a_2, a_3, a_1 + a_2)\ \text{—"—}\}$

(4) $M_4 = \{(a_1, 2 \cdot a_1, 3 \cdot a_1, 4 \cdot a_1),\ a_1 \in \mathbb{R}\}$

Tvoří tyto množiny s operacemi „+", „·" vektorový podprostor $\mathbb{V}_4$?

Řešení: Není třeba ověřovat, zda jsou splněny všechny vlastnosti vektorového prostoru (4.1) – (4.8.). Stačí ověřit, že

$$\forall x, y \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad x + y \in M \quad \text{(Def 4.9)}$$
$$\alpha \cdot x \in M$$

$\Rightarrow$ (1) M_1 tvoří vektorový podprostor

(2) Netvoří, např. $(1,1,1,1)$ a $(0,0,0,1) \in M_2$, ale $(1,1,1,1) + (0,0,0,1) \notin M_2$.

$= (1,1,1,2) \notin M_2$

LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ

Definice 4.4.: Nechť $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{m}{x}$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbb{P}$ a nechť $c_1, \ldots, c_m$ jsou $\mathbb{R}$ čísla. Pak vektor $x = c_1 \overset{1}{x} + \ldots + c_m \overset{m}{x}$ nazveme lineární kombinací vektorů $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{m}{x}$.

Příklad: Vektor $x = (4, -1, 10, 12) \in \mathbb{V}_4$ je lineární kombinací vektorů $\overset{1}{x} = (1, 0, 5, 7)$ a $\overset{2}{x} = (2, -1, 0, -2)$, neboť

$$2 \cdot \overset{1}{x} + 1 \cdot \overset{2}{x} = (2+2, 0-1, 10+0, 14-2) =$$
$$= (4, -1, 10, 12) = x.$$

Definice 4.5: Nechť $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{m}{x}$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbb{P}$. Řekneme, že tyto vektory jsou lineárně NEZÁVISLÉ, jestliže:

$$c_1 \overset{1}{x} + \ldots + c_m \overset{m}{x} = \mathbb{O} \Leftrightarrow c_1 = \ldots = c_m = 0$$

V případě, že vektory $\overset{1}{x}, \ldots, \overset{m}{x}$ nejsou lin. nezávislé, řekneme, že jsou LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ.

Poznámka: Jsou-li vektory $\mathbb{x}_1, \dots, \mathbb{x}_m$ lineárně závislé, pak existuje mezi nimi alespoň jeden vektor, který lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Př.: Uvažujme vektory $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d} \in V_3$
$\mathbb{a} = (1,0,3)$, $\mathbb{b} = (-2,-3,0)$, $\mathbb{c} = (1,1,1)$
a $\mathbb{d} = (0,0,0)$.

(1) Jsou vektory $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ lin. nezávislé?
(2) — " — $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ — " — ?
(3) — " — $\mathbb{a}, \mathbb{d}$ — " — ?
(4) — " — $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d}$ — " — ?

řešení: hledám c_1, c_2, c_3 : $c_1(1,0,3) + c_2(-2,-3,0) + c_3(1,1,1) = (0,0,0)$

(1) Ne, např. $1.\mathbb{a} - 1.\mathbb{b} - 3.\mathbb{c} =$
$= (1,0,3) + (2,3,0) - (3,3,3) = \mathbb{0}$.

(4) Ne, např. $\mathbb{a} - \mathbb{b} - 3\mathbb{c} + 0.\mathbb{d} = \mathbb{0}$.

(2) Ano $c_1(1,0,3) + c_2 . (-2,-3,0) = (0,0,0)$
$\Rightarrow c_1 - 2c_2 = 0 \wedge -3c_2 = 0 \wedge 3c_1 = 0$
$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

(3) Ne, žádná skupina vektorů obsahující nulový vektor nemůže být lin. nezávislá, např.
$0.\mathbb{a} + 1.\mathbb{d} = (0,0,0)$

LINEÁRNÍ OBAL

Definice 4.10:
Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a nechť $M \subseteq \mathbb{P}$. Potom množinu Q všech lineárních kombinací vektorů z M nazýváme LINEÁRNÍM OBALEM množiny M.
Množina Q s operacemi „+" a „·" tvoří vektorový podprostor $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{P}$. Říkáme, že $\mathbb{Q}$ je $\boxed{\text{generován}}$ množinou M.

Pozn.: Je-li $\mathbb{U}$ nějaký vektorový podprostor $\mathbb{P}$ obsahující množinu M, pak nutně $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{U}$.

Př.: Uvažujme $M = \{(1,0,1), (0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Pak množina $Q = \{(x_1, x_2, x_3),\ x_1 = x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$
$Q = \{(x_1, x_2, x_1),\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$
tvoří spolu s operacemi „+" a „·" vektorový podprostor $\mathbb{V}_3$ generovaný množinou M.

Př.: Množiny $M_1 = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ a
$M_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\}$
generují tentýž podprostor ve $\mathbb{V}_3$.
Skutečně, každou lin. kombinaci vektorů z M_2 lze zapsat jako lin. kombinaci vektorů z M_1 a naopak ~~[illegible]~~.

Báze vektorového prostoru

Definice 4.8.: Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a nechť $\overset{1}{e}, \dots, \overset{n}{e}$ jsou vektory z $\mathbb{P}$ takové, že:

(1) $e_1, \dots, e_n$ jsou lineárně nezávislé

(2) každý vektor z $\mathbb{P}$ lze vyjádřit jako jejich kombinaci

Pak říkáme, že $\overset{1}{e}, \dots, \overset{n}{e}$ tvoří bázi v $\mathbb{P}$.

Př.: Jsou dány vektory $a, b, c, d \in \mathbb{V}_3$ $a = (1,0,3)$, $b = (0,1,2)$ a $c = (1,0,0)$, $d = (0,0,2)$.

(1) Tvoří vektory b, c bázi $\mathbb{V}_3$?

(2) Tvoří vektory b, c, d bázi $\mathbb{V}_3$?

(3) Tvoří vektory a, d bázi $\mathbb{V}_3$?

(4) Tvoří vektory a, c, d bázi $\mathbb{V}_3$?

(5) Tvoří vektory a, b, c, d bázi $\mathbb{V}_3$?

Řešení: (1) Ne, např. vektor $e = (0,1,3)$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci b a c.

(2) Nezávislost:

pokud $c_1 \cdot b + c_2 \cdot c + c_3 \cdot d = (0,0,0)$,

pak $(c_2, c_1, 2c_1 + 2c_3) = (0,0,0)$

tedy $\underline{c_2 = 0}$, $\underline{c_1 = 0}$ $\quad 2c_3 = 0 - 2 \cdot 0 \Rightarrow \underline{c_3 = 0}$

Navíc každý vektor $e = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{V}_3$ lze vyjádřit jako $e = e_1 \cdot c + e_2 \cdot b + \left(\frac{e_3}{2} - e_2\right) \cdot d$

ANO

50

(3) $\mathbb{a}, \mathbb{d}$ netvoří bázi $\mathbb{V}_3$ neboť
napři. vektor $\mathbb{f} = (0, 1, 0) \in \mathbb{V}_3$
nelze vyjádřit jako jejich kombi-
naci.

(4) — " —

(5) Namohou tvořit bázi neboť
$\mathbb{b}, \mathbb{c}, \mathbb{d}$ tvoří bázi $\mathbb{V}_3$ a tudíž
je lib. vektor z $\mathbb{V}_3$, tedy i $\mathbb{a}$
jejich lineární kombinací.

Poznámka 1: Další báze $\mathbb{V}_3$ tvoří např.
vektory $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$, nebo vektory
$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{d}$. Ověřte si sami.

Poznámka 2: V prostoru $\mathbb{V}_n$ existuje
vždy báze, například tzv. kanonická
báze

$$\overset{1}{\mathbb{e}} = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$\overset{2}{\mathbb{e}} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$\overset{n}{\mathbb{e}} = (0, 0, \ldots 0, 1).$$

Opravdu: (1) Nezávislost zřejmá
(2) lib. vektor $\mathbb{a} \in \mathbb{V}_n$, $\mathbb{a} = (a_1, \ldots, a_n)$
můžu zapsat jako
$$\mathbb{a} = a_1 \cdot \overset{1}{\mathbb{e}} + a_2 \overset{2}{\mathbb{e}} + \ldots + a_n \cdot \overset{n}{\mathbb{e}}$$

Věta 4.8.: Nechť P je vektorový prostor a $\overset{1}{e}, \dots, \overset{n}{e}$ je nějaká jeho báze. Pak platí:

(i) každá skupina n lineárně nezávislých vektorů z P je jeho báze.

(ii) Je-li $m \geq n$ a $\overset{1}{f}, \dots, \overset{m}{f}$ skupina vektorů z P, pak je mezi nimi nejvýše n lineárně nezávislých.

Číslo n nazýváme DIMENZÍ prostoru P. Píšeme $\dim P = n$.

Př: Určete dimenzi podprostoru $Q \subset V_4$, který je tvořen všemi vektory, které:

a) mají první složku nulovou

b) mají třetí složku rovnu součinu první a druhé složky $(1,0,0,1)$

c) jsou kolmé k vektorům $(0,0,0,1)$.

řešení: a) $Q = \{(0, a_2, a_3, a_4), a_2, a_3, a_4 \in R\}$

$$a \in Q \Rightarrow a = a_2(0,1,0,0) + a_3(0,0,1,0) + a_4(0,0,0,1).$$

Vektory $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ a $(0,0,0,1)$ jsou lineárně nezávislé, takže tvoří bázi Q a $\dim Q = \underline{\underline{3}}$

b) $Q = \{(a_1, a_2, a_1 + a_2, a_4), a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{R}\}$

$$a \in Q \Rightarrow a = (a_1, 0, a_1, 0) + (0, a_2, a_2, 0) + (0, 0, 0, a_4),$$

tedy $a = a_1 \cdot (1, 0, 1, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 1, 0) + a_4 \cdot (0, 0, 0, 1)$. Vektory $(1,0,1,0)$, $(0,1,1,0)$ a $(0,0,0,1)$ jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi Q a $\dim Q = 3$

c) $Q = \{(a_1, a_2, a_3, a_4), a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$
$\wedge\ a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 1 = 0 \wedge$
$\wedge\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 1 = 0\}$

$$a \in Q \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a_4 = 0 \wedge \\ a_1 + a_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = a_4 = 0$$

$$a = (0, a_2, a_3, 0) = a_2 (0, 1, 0, 0) + a_3 \cdot (0, 0, 1, 0)$$

Tyto dva vektory jsou lineárně nezávislé, tedy tvoří bázi Q a $\dim Q = 2$

Definice 4.6:
Nechť $\mathbb{X} = (\overset{1}{\mathbb{x}}, \dots, \overset{m}{\mathbb{x}})$ je skupina vektorů z prostoru $\mathbb{P}$. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině $\mathbb{X}$ nazveme HODNOSTÍ $\mathbb{X}$ a budeme ji značit $h(\mathbb{X})$.

Poznámka: Uvažujme matici $\mathbb{A}$ typu (m,n). Položíme-li za $\mathbb{X}$ řádky matice $\mathbb{A}$, pak $h(\mathbb{X})$ nazýváme řádkovou hodností matice $\mathbb{A}$. (Analogicky pro sloupce matice $\mathbb{A}$ dostaneme sloupcovou hodnost.)

Př.: Určete řádkovou a sloupcovou hodnost matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Oba dva řádky matice $\mathbb{A}$ jsou lineárně nezávislé, tedy řádková hodnost $= 2$.
K určení sloupcové hodnosti stačí uvažovat poslední dva sloupce matice $\mathbb{A}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Jsou nezávislé a všechny ostatní jsou jejich komb., tedy $h = 2$.

Definice: Nechť A je matice typu (m,n). Řekneme, že A je horní SCHODOVITÁ matice, jestliže pro $\forall\, p,q \in \{1,..,m\}$ platí:

(i) je-li p-tý řádek A nenulový a q-tý — " — nulový, pak $p < q$

Neboli: Nulové řádky jsou naspod matice

(ii) Jsou-li p-tý a q-tý řádek A nenulové a jsou-li a_{p,s_p} a a_{q,s_q} první nenulové prvky v p-tém, respektive q-tém řádku, pak

Pokud to jde, $p < q \Rightarrow s_p < s_q$

Neboli: „Každý řádek musí začínat více nulami než předchozí"

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ není schodovitá

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ není schodovitá

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je schodovitá

Věta: Horní schodovitá matice má řádkovou hodnost rovnu počtu jejích nenulových řádků.

Př.: Určete řádkovou hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Pokud

$$c_1 \cdot (2,0,3,7,5) + c_2 \cdot (0,1,4,1,2) + c_3 \cdot (0,0,0,3,7) + \cancel{c_4 (0,0,0,0,0)} = (0,0,0,0,0),$$

pak nutně

$$\left.\begin{aligned} 2 . c_1 &= 0 \\ 1 . c_2 &= 0 \\ 3 c_1 + 4 c_2 &= 0 \\ 7 c_1 + 1 . c_2 + 3 c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

~~c_4 může být libovolné~~. Tedy $(2,0,3,7,5)$, $(0,1,4,1,2)$ a $(0,0,0,3,7)$ jsou lin. nezávislé a řádková $h(A) = 3$.

ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY

Nechť A je matice typu (m,n). Vytvoříme-li z matice A matici B tak, že:

a) vyměníme mezi sebou libovolné dva řádky matice A a ostatní necháme, nebo

b) jeden z řádků A vynásobíme nenulovým číslem α a ostatní necháme, nebo

c) k j-tému řádku přičteme i-tý řádek A a ostatní ponecháme beze změny, pak řekneme, že B vznikla z A pomocí <u>ZÁKLADNÍCH ELEMENTÁRNÍCH TRANSFORMACÍ</u>.

Pokud B vznikne z A postupným aplikováním lib. počtu těchto základních úprav, řekneme, že B vznikne z A pomocí elementární transformace a píšeme $A \sim B$

Použití: 1, určení hodnosti matice
2, výpočet determinantu —"—
3, řešení systému lineárních algebraických rovnic

Věta 4.7.:
Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu (m,n) a nechť $\mathbb{B}$ je matice, která vznikla z $\mathbb{A}$ pomocí elementární transformace. Pak řádková hodnost $\mathbb{A}$, $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$ řádkové hodnosti $\mathbb{B}$.

Při řešení úlohy určení hodnosti matice $\mathbb{A}$ nejprve převedeme tuto matici pomocí elementárních úprav do schodovitého tvaru a pak určíme hodnost jako počet nenulových řádků této schodovité matice.

Pozn.: Později se ukáže, že řádková hodnost matice $\mathbb{A}$ typu (m,n) je rovna její sloupcové hodnosti, takže nutně platí $\boxed{h(\mathbb{A}) \leq \min(m,n)}$!

Příklad: Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ \\ + \end{array}$$

řešení:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-2) \\ + \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (-3) \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{h(A) = 3}}$$

Věta: (5.22.) Nechť A je matice (m,n). Potom její sloupcová hodnost je rovna řádkové hodnosti. $\boxed{h(A)=h(A^T)}$

Věta (5.20): Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak A je regulární ($\boxed{|A|\neq 0}$) právě když $\boxed{h(A)=n}$.