

Zadání příkladů

Matice a determinanty, lineární prostory

Blok 1: Počítání s maticemi

Příklad 1: Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určete matice $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}^\top)$ a $\mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A}^\top$.

Příklad 2: Je dán vektor $\mathbf{b} = (1 \ 4 \ 2)^\top$ a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete řešení systému $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, víte-li, že

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 10 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Blok 2: Determinanty

Příklad 3: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Určete hodnotu determinantu $\det(\mathbf{A})$.

Příklad 4: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Najděte inverzní matici \mathbf{A}^{-1} .

Příklad 5: Pomocí Cramerova pravidla najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1 \\x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= -4 \\-2x_1 + 3x_3 &= 11\end{aligned}$$

Blok 3: Lineární prostory

Příklad 6: V prostoru \mathbb{V}_3 jsou dány vektory $\mathbf{a} = (1, 4, 5)$, $\mathbf{b} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (-1, 3, -2)$ a $\mathbf{d} = (1, 3, -3)$. Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé. Je vektor \mathbf{a} lineární kombinací ostatních?

Příklad 7: V prostoru \mathbb{V}_3 jsou dány vektory $\mathbf{a} = (2, p, q)$, $\mathbf{b} = (1, -1, -3)$ a $\mathbf{c} = (-3, 5, -2)$. Určete hodnotu parametrů $p, q \in \mathbb{R}$, pro něž je vektor \mathbf{a} kolmý k vektorům \mathbf{b} a \mathbf{c} .

Příklad 8: V prostoru \mathbb{V}_4 je dán podprostor \mathbb{Q} tvořený všemi vektory, které mají součet všech čtyř složek roven nule. Určete dimenzi a najděte nějakou bázi podprostoru \mathbb{Q} .

Příklad 9: V prostoru \mathbb{V}_5 jsou dány vektory $\mathbf{a} = (-3, 3, -4, 1, -1)$ a $\mathbf{b} = (1, -1, -3, 5, 0)$. Určete euklidovské normy vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ a ukažte, že pro ně platí rovnost

$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = \frac{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2}{2}.$$

Platí tato rovnost pro libovolné dva vektory z \mathbb{V}_5 ? Dokažte.

Nápověda: Rozepište normy vektorů $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ pomocí skalárního součinu.

Řešení příkladů

Matice a determinanty, lineární prostory

Blok 1: Počítání s maticemi

Příklad 10: Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Matice } \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}^\top) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 4 \\ -13 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} -15 & 7 & 26 \\ 6 & 0 & -16 \\ 3 & 5 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 27 \\ 11 & 0 & -15 \\ 3 & 3 & -19 \end{pmatrix}$$

Příklad 11: Je dán vektor $\mathbf{b} = (1 \ 4 \ 2)^\top$ a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení systému $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je dáno vztahem $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$, tedy

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 10 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Provedeme zkoušku:

$$L = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b} = P.$$

Blok 2: Determinanty

Příklad 12: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Určeme hodnotu determinantu $|\mathbf{A}|$ pomocí rozvoje podle druhého řádku:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -1 \cdot (21 - 10 + 0 - 0 - 0 - 140) - 2 \cdot (0 - 9 + 10 + 60 - 4 - 0) = 15. \end{aligned}$$

Příklad 13: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice \mathbf{A} je: $|\mathbf{A}| = 90 + 24 - 21 - (27 + 84 - 20) = 2$. Označme symbolem \mathbf{B} inverzní matici k matici \mathbf{A} . Prvky matice \mathbf{B} jsou:

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, \quad b_{2,1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad b_{3,1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \\ b_{1,2} &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}, \quad b_{2,2} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad b_{3,2} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \\ b_{1,3} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad b_{2,3} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad b_{3,3} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

takže

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{21}{2} & \frac{-15}{2} \\ -8 & -15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Příklad 14: Pomocí Cramerova pravidla najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= -4 \\ -2x_1 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Matice soustavy je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -8 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

vektor pravých stran je $\mathbf{b} = (1 \ -4 \ 11)^\top$. Determinant matice soustavy je

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -8 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 64 + 0 - (-20 + 0 + 12) = 60,$$

takže můžeme určit řešení $(x_1, x_2, x_3)^\top$ pomocí Cramerova pravidla:

$$x_1 = \frac{|\mathbf{B}_1|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{60} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -4 & -2 & -8 \\ 11 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{60} \cdot [-6 - 352 + 0 - (110 + 0 - 48)] = -7,$$

$$x_2 = \frac{|\mathbf{B}_2|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{60} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -8 \\ -2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{60} \cdot [-24 + 16 - 55 - (-40 - 176 + 3)] = 5/2,$$

$$x_3 = \frac{|\mathbf{B}_3|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{60} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{60} \cdot [-44 + 32 + 0 - (4 + 0 + 44)] = -1.$$

Blok 3: Lineární prostory

Příklad 15: V prostoru \mathbb{V}_3 jsou dány vektory $\mathbf{a} = (1, 4, 5)$, $\mathbf{b} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (-1, 3, -2)$ a $\mathbf{d} = (1, 3, -3)$. Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé. Je vektor \mathbf{a} lineární kombinací ostatních?

Řešení: Z věty 4.8. a poznámky za touto větou víme, že dimenze prostoru \mathbb{V}_3 je rovna 3, tedy v každé skupině vektorů z \mathbb{V}_3 jsou maximálně 3 lineárně nezávislé vektory. Vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} jsou čtyři, a tudíž jsou lineárně závislé.

Můžeme vektor \mathbf{a} vyjádřit jako kombinaci ostatních? Hledáme koeficienty c_1, c_2, c_3 , takové že: $c_1 \cdot \mathbf{b} + c_2 \cdot \mathbf{c} + c_3 \cdot \mathbf{d} = \mathbf{a}$, neboli

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 + c_3 &= 1 \\ 3c_2 + 3c_3 &= 4 \\ -c_1 - 2c_2 - 3c_3 &= 5 \end{aligned}$$

Vyjádříme-li ze třetí rovnice c_1 a dosadíme do první rovnice, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -5c_2 - 5c_3 &= 21 \\ 3c_2 + 3c_3 &= 4, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= -21/5 \\ c_2 + c_3 &= 4/3. \end{aligned}$$

Tato soustava nemá řešení, takže vektor \mathbf{a} není kombinací ostatních.

Příklad 16: V prostoru \mathbb{V}_3 jsou dány vektory $\mathbf{a} = (2, p, q)$, $\mathbf{b} = (1, -1, -3)$ a $\mathbf{c} = (-3, 5, -2)$. Určete hodnotu parametrů $p, q \in \mathbb{R}$, pro něž je vektor \mathbf{a} kolmý k vektorům \mathbf{b} a \mathbf{c} .

Řešení: Zapišme podmínky kolmosti:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 \cdot 1 + p \cdot (-1) + q \cdot (-3) = 0,$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 2 \cdot (-3) + p \cdot 5 + q \cdot (-2) = 0.$$

Jde o systém dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, z první rovnice můžeme vyjádřit $p = 2 - 3q$ a dosadit do druhé rovnice:

$$-6 + 5 \cdot (2 - 3q) - 2q = 0,$$

tedy $q = 4/17$ a $p = 2 - 3 \cdot (4/17) = 22/17$.

Příklad 17: V prostoru \mathbb{V}_4 je dán podprostor \mathbb{Q} tvořený všemi vektory, které mají součet všech čtyř složek roven nule. Určete dimenzi a najděte nějakou bázi podprostoru \mathbb{Q} .

Řešení: Libovolný vektor \mathbf{q} z podprostoru \mathbb{Q} lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, -q_1 - q_2 - q_3)$$

pro nějaká čísla $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$. Vektor \mathbf{q} můžeme rozepsat jako součet tří vektorů

$$\mathbf{q} = (q_1, 0, 0, -q_1) + (0, q_2, 0, -q_2) + (0, 0, q_3, -q_3),$$

takže \mathbf{q} je lineární kombinací vektorů $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, -1)$:

$$\mathbf{q} = q_1 \cdot (1, 0, 0, -1) + q_2 \cdot (0, 1, 0, -1) + q_3 \cdot (0, 0, 1, -1).$$

Abychom ukázali, že tyto tři vektory tvoří bázi podprostoru \mathbb{Q} , stačí ověřit, že jsou lineárně nezávislé:

$$c_1 \cdot (1, 0, 0, -1) + c_2 \cdot (0, 1, 0, -1) + c_3 \cdot (0, 0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Příklad 18: V prostoru \mathbb{V}_5 jsou dány vektory $\mathbf{a} = (-3, 3, -4, 1, -1)$ a $\mathbf{b} = (1, -1, -3, 5, 0)$. Určete euklidovské normy vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ a ukažte, že pro ně platí rovnost

$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = \frac{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2}{2}.$$

Platí tato rovnost pro libovolné dva vektory z \mathbb{V}_5 ? Dokažte.

Řešení:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-4)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-1)^2 + (-4-3)^2 + (1+5)^2 + (-1+0)^2} = \sqrt{94},$$

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(-3-1)^2 + (3+1)^2 + (-4+3)^2 + (1-5)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{50},$$

$$L = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = 72 = \frac{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2}{2} = P.$$

Rovnost platí pro libovolné dva vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}_5$:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2}{2} = \\ &= \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})}{2} = \\ &= \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})}{2} = \\ &= \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b})}{2} = \\ &= \frac{2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{b})}{2} = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = L. \end{aligned}$$