# Obsah

# 1. ZÁKLADNÍ POJMY LINEÁRNÍ ALGEBRY

## 1.1. Úvod do maticového počtu

Nechť $M$ je množina nějakých objektů a $n$ je přirozené číslo. Každou skupinu $n$ objektů z množiny $M$, v níž se nějaké objekty mohou i opakovat, budeme zkráceně nazývat $n-$ticí objektů z množiny $M$. Jestliže v takovéto skupině objektů záleží na jejich pořadí, mluvíme o uspořádané skupině objeků z $M$. Uspořádané skupiny objektů budeme zapisovat většinou do řádků (a oddělovat navzájem čárkou nebo mezerou) nebo do sloupců. Při zápisu do řádku budeme na $i-$té místo zleva klást $i-$tý objekt a při zápisu do sloupců budeme $i-$tý objekt zapisovat do $i-$tého řádku shora. Jestliže množinou $M$ je množina reálných čísel, mluvíme o $n-$ticích reálných čísel, resp. o uspořádaných $n-$ticích reálných čísel. Zápis (1, 3, 7, 0) značí tutéž neuspořádanou skupinu čísel jako zápis (7, 1, 0, 3). Avšak oba tyto zápisy vyjadřují dvě navzájem různé uspořádané skupiny čtyř reálných čísel.

**Definice 1.1** *Maticí typu $(m, n)$ budeme rozumět každou uspořádanou skupinu $m \cdot n$ reálných čísel zapsaných do $m$ řádků a $n$ sloupců. Každé z těchto čísel budeme nazývat prvkem matice. Abychom vyznačili, že tato čísla vytvářejí matici, budeme tuto skupinu čísel dávat do závorek. Řádky jsou seřazeny shora dolu, sloupce zlava doprava.*

Jako příklad si uveďme matici typu $(2, 5)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

**Označování.** Matice budeme označovat většinou velkými tučně vytištěnými písmeny, např. $\boldsymbol{A}$. Prvek matice , umístěný v jejím $i$–tém řádku a v $j$–tém sloupci, budeme většinou označovat malým písmenem, které odpovídá označení matice, s indexy $i, j$, umístěnými u jeho pravého dolního rohu. Tedy $a_{i,j}$ bude značit prvek matice $\boldsymbol{A}$ v jejím $i$–tém řádku a v $j$–tém sloupci. Nemůže-li dojít k omylu, lze čárku mezi oběma indexy vynechat a nechat mezi nimi jenom mezeru, takže místo $a_{i,j}$ lze psát $a_{i\,j}$.

Označíme-li $\boldsymbol{A}$ uvedenou matici, můžeme psát:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

V této matici je tedy např. $a_{1,3} = 6$ prvek umístěný v prvém řádku a v třetím sloupci a prvek $a_{2,5} = 0$. je její prvek ve druhém řádku a v pátém sloupci.

Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, n)$, kde m, n jsou obecná čísla, zapíšeme ji takto:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, 1)$, to jest matice o jednom sloupci, a $\boldsymbol{B}$ je matice typu $(1, n)$, to jest matice o jednom řádku. Tedy nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = (b_{1,1}, \ldots, b_{1,j}, \ldots, b_{1,n}).$$

V této matici $\boldsymbol{A}$ je druhý index každého prvku roven „1“, lze jej vynechat (není potřebný k určení umístění prvku v této matici). Podobně v uvedené matici $\boldsymbol{B}$ je první index každého prvku roven „1“, lze jej vynechat (není potřebný k určení umístění prvku v této matici). Bývá zvykem tyto matice označovat malým, silně vytištěným písmenem a jednotlivé prvky stejným písmenem obyčejně psaným. Píšeme pak

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n).$$

Jako příklad matice o jednom sloupci uveďme následující matici $\boldsymbol{a}$ a jako matici o jednom řádku uveďme následující matici $\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (1\ 5\ 8\ 6)$$

Uveďme si dva příklady matic s praktickým významem.

**Příklad 1.1** *Označme $D_1, D_2$ místa, z nichž se provádí rozvoz zboží do míst $Z_1, Z_2, Z_3$. Označme $c_{i,j}$ náklady v Kč na dopravu 1 tuny zboží z místa $D_i$ do místa $Z_j$ pro $i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3$. Z čísel $c_{i,j}$ utvoříme matici, např.*

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2000 & 1500 & 1800 \\ 800 & 50000 & 1000 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

*Jde o matici typu $(2, 3)$. V této matici je např. $c_{1,3} = 1800$, to znamená, že náklady na dopravu jedné tuny zboží z místa $D_1$ do místa $Z_3$ jsou 1800 Kč.*

**Příklad 1.2** *Uveďme matici $\boldsymbol{C}$ popisující cenu v \$ tří druhů zboží $V_1, V_2, V_3$ ve čtyřech různých zemích $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$.*

$$C = \begin{pmatrix} 230 & 450 & 100 \\ 200 & 420 & 90 \\ 210 & 430 & 80 \\ 235 & 435 & 95 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

*Zde $c_{i,j}$ značí cenu v \$ zboží $V_j$ v zemi $Z_i$. Poněvadž např. $c_{2,3} = 90$, je cena zboží $V_3$ v zemi $Z_2$ rovna* 90 \$.

**Relace mezi maticemi.** Mezi maticemi téhož typu si zavedeme následující relace.
Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice téhož typu $(m, n)$. Potom

- řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je menší nebo rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{i,j} \leq b_{i,j}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

- řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je menší než matice $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} < \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{i,j} < b_{i,j}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

- řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je větší nebo rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{i,j} \geq b_{i,j}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

- řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je větší než matice $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{i,j} > b_{i,j}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

- řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je rovna matici $\boldsymbol{B}$, a píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, jestliže $a_{i,j} = b_{i,j}$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Uveďme si tyto příklady:

**Příklad 1.3** *Nechť*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Přesvědčte se, že* $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$.

**Příklad 1.4** *Přesvědčte se, že mezi maticemi* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *, kde*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*neplatí žádná z relací* $<, \leq, >, \geq, =$.

## 1.2. Základní operace s maticemi

Zaveďme si tyto operace s maticemi.

**Sečítání dvou matic.** Začněme s motivačním příkladem.

**Příklad 1.5** *Nechť podnik vyrábí výrobky $V_1, V_2, V_3$ ve dvou provozovnách. Plán výroby výrobků $V_1, V_2, V_3$ v první provozovně podniku je pro $i-$tý kvartál (kde $i = 1, 2, 3, 4$) charakterizován $i-$tým řádkem matice $\boldsymbol{A}$, prvek $a_{i\,j}$ značí plánovanou výrobu výrobku $V_j$ v $i-$tém kvartálu. Plán výroby výrobků $V_1, V_2, V_3$ ve druhé provozovně podniku je pro $i-$tý kvartál (kde $i = 1, 2, 3, 4$) charakterizován $i-$tým řádkem matice $\boldsymbol{B}$, prvek $b_{i\,j}$ značí plánovanou výrobu výrobku $V_j$ v $i-$tém kvartálu. Tedy*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} \end{pmatrix}.$$

Pokud závod vyrábí uvedené výrobky pouze v těchto dvou provozovnách, lze charakterizovat plán výroby výrobků $V_1, V_2, V_3$ celého podniku pro jednotlivé kvartály maticí $\boldsymbol{C}$, jejíž prvek $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ představuje plán výroby výrobku $V_j$ v $i$–tém kvartálu celého podniku. Tedy

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & a_{1,3} + b_{1,3} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & a_{2,3} + b_{2,3} \\ a_{3,1} + b_{3,1} & a_{3,2} + b_{3,2} & a_{3,3} + b_{3,3} \\ a_{4,1} + b_{4,1} & a_{4,2} + b_{4,2} & a_{4,3} + b_{4,3} \end{pmatrix}.$$

je matice, kterou je popsán plán výroby výrobků $V_1, V_2, V_3$ v celém pdniku v jedtlivých kvartálech.

Z tohoto příkladů je patrno, že má smysl definovat součet dvou matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ téhož typu podle následující definice.

**Definice 1.2 Součet dvou matic.** *Nechť matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou téhož typu $(m,n)$. Součtem matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ budeme rozumět matici $\boldsymbol{C}$ typu $(m,n)$, pro jejíž prvky $c_{i,j}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, platí*

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

*Pro operaci sečítání matic budeme používat symbolu „+“. Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.*

**Příklad 1.6** *Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice typu $(3,3)$*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Potom matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ je*

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 9 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Násobení matice číslem.** Uveďme si motivační příklad pro zavedení násobení matice číslem.

**Příklad 1.7** *Nechť $\boldsymbol{C}$ je matice, která popisující cenu v \$ tří druhů zboží $V_1, V_2, V_3$ ve čtyřech různých zemích $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$.*

$$C = \begin{pmatrix} 230 & 450 & 100 \\ 200 & 420 & 90 \\ 210 & 430 & 80 \\ 235 & 435 & 95 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Zde $c_{i\,j}$ značí cenu zboží $V_j$ v \$ v zemi $Z_i$. Chceme-li vyjádřit cenu jednotlivých výrobků v uvažovaných zemích v Kč, stačí násobit každý prvek matice $\boldsymbol{C}$ stejným číslem, daným kurzem dolaru. Vzniklou matici označíme $\boldsymbol{D}$. Počítáme-li 20Kč za jeden \$, dostáváme matici

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4600 & 9000 & 20000 \\ 4000 & 8400 & 1800 \\ 4700 & 8700 & 1900 \\ 8225 & 15225 & 3325 \end{pmatrix} \tag{7}$$

udávající cenu jednotlivých výrobků v uvažovaných zemích v Kč.

To nás motivuje k zavedení definice součinu čísla a matice takto:

**Definice 1.3 Násobení matice číslem.** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, n)$ a $\alpha$ je reálné číslo. Potom součinem matice $\boldsymbol{A}$ a čísla $\alpha$ rozumíme matici $\boldsymbol{C}$, pro jejíž prvky $c_{i,j}$ platí*

$$c_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j} \quad \textit{pro} \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

*Pro násobení matice číslem budeme používat symbol „·“. Píšeme pak $\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A}$. Symbol „·“ lze vynechat, takže můžeme psát $\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{A}$.*

**Příklad 1.8** *Nechť* $\alpha = 3$ *a nechť* $\boldsymbol{A}$ *je matice typu* $(3,3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Potom*

$$\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -9 \\ 18 & 3 & 9 \\ -6 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

**Rozdíl dvou matic.** (Odečítání dvou matic). Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou matice téhož typu. Potom definujme $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ jako matici $\boldsymbol{A} + (-1) \cdot \boldsymbol{B}$.

**Součin dvou matic.** Začněme s motivační úlohou. Následující tabulka charakterizuje výrobu v čokoládovně při výrobě „5“ druhů výrobků, označených jako $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$. K výrobě „1kg“ jednotlivých výrobků jsou potřebné suroviny $S_1$ (*tuk*), $S_2$ (*kakao*), $S_3$ (*cukr*) v tabulce uvedených množstvích. Označme $a_{i,j}$ množství suroviny $S_i$ v kg potřebné na výroby „1kg“ výrobku $V_j$. Podle tabulky je tedy např. na výrobu „1kg“ výrobku $V_3$ zapotřebí $a_{2,3} = 0,1$ kg suroviny $S_2$, to jest kakaa.

Vynecháme-li záhlaví v tabulce, jedná se o uspořádanou skupinu 15 čísel, zapsaných do tří řádků a pěti sloupců. Jde tedy o matici typu (3, 5). Označíme ji $\boldsymbol{A}$. Jak bylo již řečeno, $a_{i,j}$ značí množství suroviny $S_i$ v kg potřebné na výroby „1kg“ výrobku $V_j$.

| | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| tuk | $0,00$ | $0,4$ | $0,3$ | $0,6$ | $0,6$ |
| kakao | $0,05$ | $0,2$ | $0,1$ | $0,1$ | $0,0$ |
| cukr | $0,10$ | $0,2$ | $0,2$ | $0,1$ | $0,2$ |

Tabulka 1: Tabulka pro výrobu v čokoládovně

Je tedy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Označme nyní $\boldsymbol{X}$ následující matici typu $(5,4)$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & x_{4,4} \\ x_{5,1} & x_{5,2} & x_{5,3} & x_{5,4} \end{pmatrix}$$

V $p-$tém sloupci matice $\boldsymbol{X}$, $p = 1,2,3,4$, je uveden $p-$tý plán výroby. To znamená, že se uvažuje výroba výrobků $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ v množstvích $x_{1,p}, x_{2,p}, x_{3,p}, x_{4,p}, x_{5,p}$.

Vypočítejme nyní spotřebu $i-$té suroviny $S_i$ v $p-$tém plánu výroby. Při tomto plánu výroby se spotřebuje na výrobu $x_{j,p}$ výrobků $V_j$ množství $a_{i,j} \cdot x_{j,p} kg$ suroviny $S_i$. Tedy na výrobu všech výrobků $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ se spotřebuje v $p-$tém plánu výroby surovina $S_i$ v množství

$$y_{i,p} = a_{i,1} \cdot x_{1,p} + a_{i,2} \cdot x_{2,p} + a_{i,3} \cdot x_{3,p} + a_{i,4} \cdot x_{4,p} + a_{i,5} \cdot x_{5,p}.$$

Z těchto hodnot $y_{i,p}$ utvořme dále matici $\boldsymbol{Y}$ typu (3,4), v nímž $y_{i,p}$ značí množství suroviny $S_i$ v kg potřebné k výrobě všech výrobků $V_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$ v požadovaných množstvích $x_{j,p}$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ v $p-$tém plánu výroby.

**Poznámka.** V našem případě jsme uvažovali matici $\boldsymbol{X}$ typu $(5, 4)$ a matice $\boldsymbol{A}$ typu $(3, 5)$,matice $\boldsymbol{Y}$ je pak typu $(3, 4)$. Lehce nahlédneme, že úvahy lze rozšířit na případ, kdy matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(m, k)$, kde $m$ je počet surovin a $k$ je počet výrobků. Matice $\boldsymbol{Y}$ je typu $(m, n)$, kde $n$ je počet plánů výroby. Tento příklad nás vede k zavedení sočinu dvou matic. Matici $\boldsymbol{Y}$ nazýváme součinem matice $\boldsymbol{A}$ maticí $\boldsymbol{X}$ v tomto pořadí.

**Příklad.** Pro plán výroby, daný maticí

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 250 \\ 120 \\ 150 \\ 85 \\ 80 \end{pmatrix}$$

a maticí

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,40 & 0,3 & 0,6 & 0,60 \\ 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,10 & 0,00 \\ 0,10 & 0,20 & 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix},$$

dostáváme

$$
\begin{aligned}
y_{1,1} &= 0,00 \cdot 250 + 0,4 \cdot 120 + 0,3 \cdot 150 + 0,6 \cdot 85 + 0,6 \cdot 80,\\
y_{2,1} &= 0,05 \cdot 250 + 0,2 \cdot 120 + 0,1 \cdot 150 + 0,1 \cdot 85 + 0,0 \cdot 80,\\
y_{3,1} &= 0,10 \cdot 250 + 0,2 \cdot 120 + 0,2 \cdot 150 + 0,1 \cdot 85 + 0,2 \cdot 80.
\end{aligned}
$$

Vyčíslením obdržíme $y_{1,1} = 192,\ y_{2,1} = 60,\ y_{3,1} = 103$. Tedy

$$
\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 192.0 \\ 60.0 \\ 103.5 \end{pmatrix}.
$$

Tento příklad nás inspiruje k zavedení pojmu součinu dvou matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ touto definicí.

**Definice 1.4 (Součin matic).** *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je matice typu* $(m, k)$ *a* $\boldsymbol{B}$ *je matice typu* $(k, n)$. *Potom součinem matic* $\boldsymbol{A}$ *a* $\boldsymbol{B}$ *v tomto pořadí je matice* $\boldsymbol{C}$ *typu* $(m, n)$, *pro jejíž prvky* $c_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ , *platí*

$$
c_{ij} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + \ldots + a_{i,k} \cdot b_{k,j} + \ldots + a_{i,n} \cdot b_{n,j}. \tag{8}
$$

*Píšeme pak*

$$
\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.
$$

*Říkame, že matice* $\boldsymbol{C}$ *vznikla z matice* $\boldsymbol{A}$ *násobením maticí* $\boldsymbol{B}$ *zprava, resp. násobením matice* $\boldsymbol{B}$ *maticí* $\boldsymbol{A}$ *zleva.*

**Poznámka 1.** Ze vztahu (8) je patrno, že pro výpočet prvku $c_{i,j}$ matice $\boldsymbol{C}$ (tj. prvku v $i$–tém řádku a v $j$–tém sloupci matice $\boldsymbol{C}$ používáme $i$–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$, t.j. řádek

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,k} \end{pmatrix} \tag{9}$$

a $j$–tý sloupec matice $\boldsymbol{B}$, t.j. sloupec

$$\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \dots \\ b_{k,j} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

**Poznámka 2.** Vztah (8) lze zapsat takto

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{k} a_{i,r} \cdot b_{r,j}.$$

Zde symbol $\sum_{r=1}^{k}$ znamená, že se provádí sečítání členů, které dostaneme tak, že do výrazu za symbolem $\sum$ dosazujeme postupně $r = 1, \dots, k$.

**Poznámka 3.** Pro součin dvou matic budeme používat opět symbolu „·“. To není na závadu, neboť ze souvislostí je vždy patrno o jaké násobení se jedná. Budeme tedy psát

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

**Poznámka 4.** Všimněme si, že počet sloupců v matici $\boldsymbol{A}$ je stejný jako je počet řádků v matici $\boldsymbol{B}$. Kdyby tomu tak nebylo, nebylo by možno aplikovat vzorec (8).

**Poznámka 5.** Zápis

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

můžeme číst buďto jako „matice $\boldsymbol{A}$“ je násobena maticí $\boldsymbol{B}$ **zprava**, anebo jako matice $\boldsymbol{B}$ je násobena matci $\boldsymbol{A}$ **zleva.**

Na následující stránce ještě jednou osvětlíme podrobněji zavedení součinu dvou matic.

Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, k)$ a matice B je typu $(k, n)$.(Všimněmě si, že počet sloupců matice $\boldsymbol{A}$ je roven počtu řádků matice $\boldsymbol{B}$. Vypočítejme matici $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\ .\ \boldsymbol{B}$ typu $(m, n)$.

| $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{B}$ | $\boldsymbol{C}$ |
|---|---|---|
| (m, k) | (k, n) | (m,n) |

Rozepsáním dostáváme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,k} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,k} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{j,1} & \dots & b_{j,j} & \dots & b_{j,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,j} & \dots & b_{k,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,j} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i,1} & \dots & c_{i,j} & \dots & c_{i,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,j} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

Prvek $c_{i,j}$ matice $\boldsymbol{C}$ počítáme pro všechna $i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots n$ takto

$$c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + \dots + a_{i,s} \cdot b_{s,j} + \dots + a_{i,k} \cdot b_{k,j}. \tag{11}$$

Tento vztah lze zapsat jako

$$c_{i,j} = \Sigma_{s=1}^{k} a_{i,s} \cdot b_{s,j}.$$

**Příklad 1.9** *Určete matici $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, jestliže*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ 8 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Poněvadž $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(3,4)$ a $\boldsymbol{B}$ je matice typu $(4,2)$, lze vypočíst součin $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. (Počet řádků matice $\boldsymbol{A}$ je roven počtu slopců matice $\boldsymbol{B}$, tj. „4“. Podle definice součinu dvou matic dostáváme*

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 73 & -6 \\ 17 & -12 \end{pmatrix}.$$

*Např. prvek $c_{2,1}$ dostaneme jako součin druhého řádku matice $\boldsymbol{A}$, to jest řádku*

$$(0, 7, 8, 5)$$

*a prvního sloupce matice $\boldsymbol{B}$, to jest sloupce*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*Výpočtem dostáváme*

$$c_{2,1} = 0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 8 + 5 \cdot (-1) = 73.$$

**Zaměnitelné matice.** Obecně matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ není rovna matici $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. Dokonce může nastat případ, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ existuje, avšak $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ neexistuje. Jestliže pro nějaké matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A},$$

potom matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ se nazývají *zaměnitelné.*

**Příklad 1.10** *Je-li např. matice $\boldsymbol{A}$ typu $(3,4)$ a matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(4,3)$, potom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ je matice typu $(3,3)$. Avšak $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ je matice typu $(4,4)$. Jsou tedy matice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ různých typů a tedy, aniž bychom jejich součiny počítali, vidíme, že jsou navzájem různé. Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nejsou tedy v tomto případě zaměnitelné.*

**Příklad 1.11** *Nechť*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Potom*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Vidíme, že $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, takže tyto matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nejsou zaměnitelné.*

**Příklad 1.12** *Nechť*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/3 & -5/3 \\ -1/6 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

*Pro tyto matice platí*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Dané matice* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *jsou tedy zaměnitelné.*

## Matice transponovaná.

**Definice 1.5 (Matice transponovaná.)** *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je matice typu* $(m, n)$. *Potom matici, jejíž i–tý sloupec je roven i–tému řádku matice* $\boldsymbol{A}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *nazýváme maticí transponovanou k matici* $\boldsymbol{A}$ *a budeme ji značit* $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$. *Matice* $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ *je tedy typu* $(n, m)$.

**Příklad 1.13** *Nechť*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

*Potom*

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

O transponované matici součinu dvou matic platí tato věta.

**Věta.** **1.1 (Transponovaná matice součinu matic.)** *Nechť $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou takové matice, že existuje $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. Potom platí*

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}.$$

**Submatice.** Zaveďme si pojem submatice následující definicí.

**Definice** **1.6 (Submatice)** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, n)$ a nechť $\boldsymbol{u} = (i_1, \ldots, i_p)$ je taková uspořádaná $p-$tice přirozených čísel, že $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m,\ p < m$. Dále nechť $\boldsymbol{v} = (j_1, \ldots, j_q)$ je taková uspořádaná $q-$tice přirozebých čísel,že že $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n,\ q < n$. Potom matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním všech řádků s řádkovými indexy, které patří do $\boldsymbol{u}$ a vypuštěním všech sloupců matice $\boldsymbol{A}$ se sloupcovými indexy, které patří do $\boldsymbol{v}$, nazýváme submaticí matice $\boldsymbol{A}$ a značíme ji $\boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$; jestliže některý z vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ má jenom jedno číslo, stačí uvést toto číslo bez závorek.*

*Například, jestliže $\boldsymbol{u} = (i)$ a $\boldsymbol{v} = (j)$, lze závorky vypustit a psát pouze $\boldsymbol{A}_{i,j}$. (Tedy $\boldsymbol{A}_{i,j}$ značí submatici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním $i$–tého řádku a $j$–tého sloupce.)*

**Příklad 1.14** *Nechť*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Položme $\boldsymbol{u} = (2)$, $\boldsymbol{v} = (4)$. Potom vypuštěním druhého řádku a čtvrtého sloupce matice $\boldsymbol{A}$ dostaneme submatici*

$$\boldsymbol{A}_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.3. Speciální matice a pravidla pro počítání s maticemi

**Čtvercová matice.** Matici $\boldsymbol{A}$ typu $(n, n)$ budeme nazývat *čtvercovou maticí řádu* $n$. Místo čtvercová matice řádu $n$ stačí říkat matice řádu $n$, poněvadž o řádu matice mluvíme jen u čtvercových matic.

Např. matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

je čtvercová matice řádu 3.

**Nulová matice.** Matici typu $(m, n)$ budeme nazývat nulovou maticí typu $(m, n)$, jestliže všechny její prvky jsou rovny nule. Budeme ji značit $\mathbf{0}$.

**Příklad 1.15** *Matice*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*je nulová matice typu* $(3, 4)$.

**Hlavní a vedlejší diagonála v matici.** Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, n)$. Budeme říkat, že její prvky $a_{i,i}$ leží na hlavní diagonále a její prvky $a_{i,j}$, pro něž je $i + j = n + 1$, leží na vedlejší diagonále.

**Příklad 1.16** *Nechť*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 8 & 5 \\ -5 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Potom prvky* $(1, -3, 4)$ *leží na hlavní diagonále a prvky* $(1, 8, 0)$ *leží na vedlejší diagonále.*

**Jednotková matice.** Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{E}$ řádu $n$ je jednotková, jestliže všechny její prvky na hlavní diagonále jsou rovny číslu 1 a všechny ostatní její prvky jsou rovny 0. Chceme-li zdůraznit její řád $n$, označíme ji $\boldsymbol{E}_n$.

**Příklad 1.17** *Matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*je jednotková matice řádu* 3*.*

**Diagonální matice.** Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je diagonální, jestliže všechny její nenulové prvky leží na hlavní diagonále.

**Příklad 1.18** *Matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*je diagonální maticí.*

**Horní trojúhelníková matice.** Řekneme, že čtverová matice $\boldsymbol{A}$ řádu $n$ je horní trojúhelníkovou maticí, jestliže všechny její prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny 0.

**Dolní trojúhelníková matice.** Řekneme, že čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ řádu $n$ je dolní trojúhelníkovou maticí, jestliže všechny její prvky nad hlavní diagonálou jsou rovny 0.

**Horní schodovitá matice.** Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, n)$. Řekneme, že matice $\boldsymbol{A}$ je horní schodovitá matice, jestliže existuje takové přirozené číslo $h \leq n$, že ke každému $i$, $i = 1, 2, \ldots, h$, existuje nejmenší $s_i$ tak, že $a_{i,s_i} \neq 0$ a $s_1 < s_2 < \ldots < s_h$ a zbývající řádky $h+1, \ldots, m$ jsou nulové.

**Příklad 1.19** *Matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

*je horní schodovitou maticí. V tomto příkladě je zřejmě* $s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 7$.

**Poznámka.** Schodovitou matici můžeme definovat ekvivalentně takto. Matice $\boldsymbol{A}$ typu $(m, n)$ je horní schodovitá matice, jestliže pro každé dva řádkové indexy $p, q$ matice $\boldsymbol{A}$ platí:

- Nechť $p$–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nenulový a $q$–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je nulový, potom $p < q$.
- Nechť $p$–tý a $q$–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ jsou nenulové a nechť $a_{p,s_p}$ je první nenulový prvek matice $\boldsymbol{A}$ v $p$–tém řádku a $a_{q,s_q}$ je první nenulový prvek v $q$–tém řádku matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže $p < q$, potom je $s_p < s_q$.

- Poněvadž budeme mluvit jen o horních schodovitých maticích, můžeme slovo „horní“ vynechávat.

**Pravidla pro počítání s maticemi.** Pro zavedené operace s maticemi platí vztahy uvedené v následující větě.

**Věta. 1.2** Pravidla I. (Pro počítání s maticemi.) *Nechť* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \mathbf{0}$ *jsou matice téhož typu, kde* $\mathbf{0}$ *je matice nulová, a nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}, \tag{12}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{A}+\mathbf{0} = \boldsymbol{A}, \tag{14}$$
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A} = \mathbf{0}, \tag{15}$$
$$1\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \tag{16}$$

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{A}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{A}, \tag{17}$$
$$(\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{A} = \alpha\cdot\boldsymbol{A}+\beta\cdot\boldsymbol{A}, \tag{18}$$
$$\alpha\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \alpha\cdot\boldsymbol{A}+\alpha\cdot\boldsymbol{B}. \tag{19}$$

**Věta. 1.3** Pravidla II. (Pro počítání s maticemi.) *Nechť typy matic* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\mathbf{0}$ *(nulová matice),* $\boldsymbol{E}$ *(jednotková čtvercová matice) jsou takové, že operace ve vztazích* (20)—(25) *mají význam.*

*Potom platí*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{A} &= \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, && (20)\\
\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}, && (21)\\
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{A}, && (22)\\
(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}), && (23)\\
(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}, && (24)\\
\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}. && (25)
\end{aligned}
$$

**Poznámka.** Jak jsme si již dříve uvedli, obecně neplatí že součin $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ je roven $\boldsymbol{B}.\boldsymbol{A}$. Dále víme, že jestliže pro matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$, nemusí být žádná z matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nulovou maticí. Např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 1.20** *Matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

*je horní schodovitou maticí. V tomto příkladě je zřejmě* $s_1 = 1, s_2 = 3, s_3 = 7$.

## 1.4. Zavedení pojmu inverzní matice

V lineární algebře má velký význam pojem inverzní matice k dané matici. Tento pojem si nyní zavedeme následující definicí. Později si řekneme něco o existenci inverzní matice k dané matici a seznámíme se s řadou vlastností inverzních matic a naučíme se nalézt k dané matici matici inverzní.

**Definice 1.7** *(Inverzní matice) Matice $\boldsymbol{B}$ se nazývá inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže*

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}. \tag{26}$$

*Matici inverzní k matici $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\boldsymbol{A}^{-1}$.*

**Věta. 1.4 (Vlastnosti inverzní matice)** *Nechť je dána matice $\boldsymbol{A}$ a nechť k ní existuje matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$. Potom platí*

a) *Matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ jsou čtvercové matice téhož řádu.*
b) *Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ je jednoznačně určena.*
c) *K matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ existuje matice inverzní a platí $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.*
d) *Jestliže $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ jsou čtvercové matice téhož řádu $n$ a jestli k nim existují matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$, potom k matici $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ existuje matice inverzní a platí $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$.*

**Důkaz**

a) Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem (26).
b) Nechť $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ jsou inverzní k $\boldsymbol{A}$. Potom

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Odtud

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}.$$

Tedy $\boldsymbol{B}$=$\boldsymbol{C}$.

c) Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem definice inverzní matice.

d) Podle vět 1.2, 1.3 platí

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}.$$

Poněvadž $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, dostáváme odtud

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}.$$

Podobně dokážeme, že

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{E}.$$

Je tedy $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ inverzní maticí k matici $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

## Řešení maticové rovnice.

**Věta. 1.5 (Řešení maticové rovnice $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$)** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je daná čtvercová matice řádu $n$, k níž je známá matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$. Nechť $\boldsymbol{B}$ je matice typu $(n,m)$. Potom existuje právě jedna matice $\boldsymbol{X}$ typu $(n,m)$ pro níž platí*

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{27}$$

**Důkaz.** Jak již bylo dříve dokázáno, inverzní matice $\boldsymbol{A}$ je určena jednoznačně. Vynásobíme-li (1.5) maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva, dostáváme

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B} \tag{28}$$

Podle pravidel o počítní s maticemi odtud dostáváme

$$(\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Poněvadž $(\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$, dostáváme odtud (27).

Dokažme ještě, že matice $\boldsymbol{X}$ je určena jednoznačně. Předpokládejme, že existují dvě matice ${}^1\boldsymbol{X}, {}^2\boldsymbol{X}$, pro něž platí

$$\boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}.$$

Odečtením těchto vztahů dostáváme

$$\boldsymbol{A} \cdot ({}^1\boldsymbol{X} - {}^2\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}.$$

Vynásobením tohoto vztahu maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva dostáváme

$${}^1\boldsymbol{X} - {}^2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0},$$

takže

$${}^1\boldsymbol{X} = {}^2\boldsymbol{X}.$$

Má tedy rovnice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ právě jedno řešení $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}$.

**Příklad 1.21** *Nalezněte řešení rovnice*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \tag{29}$$

*jestliže*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 78 \end{pmatrix}$$

*a znáte-li k matici $\boldsymbol{A}$ matici inverzní*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{4}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{11}{39} \end{pmatrix}.$$

**Řešení.** Podle předcházející věty má daná maticová rovnice právě jedno řešení a to

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{4}{39} & -\frac{5}{39} \\ -\frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{11}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem dostáváme

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

V této kapitole popsaný aparát maticového počtu použijeme nyní k matematické formulaci následující úlohy, která patří do úloh lineárního programování. Tyto úlohy jsou velice významnou aplikací lineární algebry. Úlohy tohoto typu se řeší většinou pomocí počítačů a k jejich řešení jsou vypracovány speciální programy. My se nebudeme zde zabývat otázkou jak se řeší, ale jenom otázkou, jak se dá úloha matematicky formulovat a jak se připraví data pro vstupní hodnoty těchto programů.

**Příklad 1.22** *Čokoládovna vyrábí 5 druhů výrobků. Jsou to výrobky, které označíme* $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$. *K výrobě potřebujeme suroviny tuk, kakao a cukr. Tyto suroviny jsou k dispozici v omezených množstvích, v uvedném pořadí* 1500 kg, 300 kg, 450 kg *na jeden den. Spotřeba surovin v kilogramech na* 1 kg *výrobku je dána tabulkou 1.2 na straně 12. Odbytové ceny jednotlivých výrobků v uvedném pořadí jsou 20 Kč, 120 Kč, 100 Kč, 140 Kč, 40 Kč. Úkolem je stanovit takový denní výrobní plán, aby hodnota výroby byla maximální. Výrobky jsou vyráběny technologicky nezávisle na sobě navzájem. Výroba se tedy uskutečňuje ve formě pěti výrobních procesů, které však nejsou navzájem zcela izolované, neboť společně spotřebovávají výrobní zdroje, jeden proces na úkor druhého.*

**Matematická formulace úlohy.** Pro účely matematické formulace zaveďme 5 nezávisle proměnných: nechť $x_j$ označuje množství výrobku $V_j$ v kg, jež bude vyráběno za den, kde $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Hledáme tedy hodnoty $x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$, vyhovující nerovnostem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 0,4x_2 & + & 0,3x_3 & + & 0,6x_4 & + & 0,6x_5 & \leq & 1500 \\ 0,05x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,1x_3 & + & 0,1x_4 & & & \leq & 300 \\ 0,10x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,1x_4 & + & 0,2x_5 & \leq & 450 \end{array} \tag{30}$$

Víme, že při výrobě $x_j$ výrobků $V_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, bude odbytová cena výroby rovna

$$z = 20x_1 + 120x_2 + 100x_3 + 140x_4 + 40x_5. \tag{31}$$

Naší úlohu můžeme tedy formulovat takto : Nalezněte taková nezáporná čísla $x_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, která vyhovují nerovnostem (30) a pro něž funkce (31) nabývá svého maxima.

Tato úloha je tedy popsána maticí $\boldsymbol{A}$, vektorem $\boldsymbol{m}$ množství surovin, která jsou k dispozici, a vektorem $\boldsymbol{b}$ odbytových cen výrobků a vektorem $\boldsymbol{x}$ počtu výrobků

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,00 & 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,6 \\ 0,05 & 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,10 & 0,2 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 300 \\ 450 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^T = \begin{pmatrix} 20 \\ 120 \\ 100 \\ 140 \\ 40 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.
$$

Potom (30) lze zapsat jako jako

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{m} \tag{32}
$$

a funkce (31) lze zapsat jako

$$
z = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{33}
$$

Naši úlohu můžeme vyslovit takto: Nalezněte vektor $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ vyhovující (32), který minimalizuje funkci (33).

Matice $\boldsymbol{A}$, vektory $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{b}$ a požadavek, že vektor

$$
\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq \mathbf{0},
$$

jsou vstupními údaji programu, kterým se výpočet realizuje. Dostáváme

$$
x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1000, \ x_4 = 2000, \ x_5 = 0.
$$

## 1.5. Základní poznatky z této kapitoly

- Zavedení pojmu matice, typ matice, značení prvků matic, prvky na hlavní a na vedlejší diagonále.
- Relace $<, \leq, >, \geq, =$ mezi maticemi.
- Operace s maticem : sečítání matic, násobení matice reálným číslem.
- Součin dvou matic.
- Zaměnitelné matice.
- Matice transponovaná. Matice transponovaná součinu dvou matic.
- Submatice. Vytváření submatic. Označování submatic.
- Speciální matice. Matice čtvercová, matice nulová, matice jednotková, horní a dolní trojúhelníková matice, horní schodovitá matice.
- Pravidla pro počítání s maticemi.
- Zápis systémů lineárních rovnic v maticové notaci. Co je to matice soustavy, co je to matice rozšířená, co je to vektor pravých stran. Co se rozumí pod pojmem řešení systému lineárních rovnic? Příklady, kdy systém má jedno řešení, kdy nemá žádné řešení, kdy má více řešení.
- Co je to inverzní matice? Vlastnosti inverzních matic.
- Řešení systému lineárních rovnic, jestliže známe matici inverzní k matici soustavy.

# 2. Úlohy k procvičení

**Úloha 1.** Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Určete a) její typ, b) matici k ní transponovanou $\boldsymbol{A}^T$
c) určete matice $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}$
d) zjistěte, zda matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^T$ jsou zaměnitelné.
[a) typ (3, 4),
b)

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

c)

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 & 2 \\ -3 & 10 & -8 & -7 \\ 9 & -8 & 57 & -16 \\ 2 & -7 & -16 & 45 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 30 & 7 & 13 \\ 7 & 54 & -24 \\ 13 & -24 & 30 \end{pmatrix},$$

d) nejsou zaměnitelné.]

**Úloha 2.** Zapište v maticové notaci systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 &= 4, \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 - 3\,x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Napište matici soustavy a matici rozšířenou.

[Označme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right), \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Potom daný systém rovnic lze psát v maticové notaci takto: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}$ je matice soustavy a $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ je matice rozšířená.]

**Úloha 3.** Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a nechť $\boldsymbol{E}_3$ je jednotková matice a $\lambda$ je proměnná. Napište matici

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}_3.$$

$$[B = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{pmatrix}.]$$

**Úloha 3.** Zjistěte, zda vektory

$$^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

jsou řešením systému lineárních rovnic z úlohy 2.

[$\boldsymbol{A} \cdot {}^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} \cdot {}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, tedy $^1\boldsymbol{x}$ je a $^2\boldsymbol{x}$ není řešením uvažovaného systému lineárních rovnic.]

**Úloha 4.** Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & -12 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Dokažte, že $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$. Jak nazýváme matici $\boldsymbol{B}$?

b) Nalezněte řešení rovnice $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ užitím matice $\boldsymbol{B}$. (Obě strany daného systému rovnic násobte zleva maticí $\boldsymbol{B}$.)

[a) $\boldsymbol{B}$ je inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, b) $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x})=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b}$, takže $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}8 & -31 & 18\end{pmatrix}^T$.]

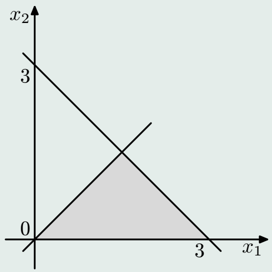
**Úloha 5.** Zapište následující systém nerovnic užitím maticové notace

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\le 3,\\ -x_1+x_2 &\le 0,\\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Znázorněte graficky množinu bodů $[x_1,x_2]$, které těmto nerovnicím vyhovují.
[Položme

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

Potom daný systém nerovnic lze zapsat takto: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{b}$. Hledaná množina je šedá oblast na obr.1.]




Obrázek 1: Hledaná množina bodů

**Úloha 6.** Určete vektory $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{x}$ tak, aby funkce

$$y = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4$$

se dala pomocí nich zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{x}.$$

$[\boldsymbol{f} = (2, 3, 4, 1)^T, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T]$

# 3. Lineární prostor

Na množině matic téhož typu jsme měli zavedeny operace sečítání matic a násobení matic reálnými čísly. V následující definici zavedeme nový pojem „vektorový prostor“. Nyní budeme uvažovat množinu $P$,(ne nutně množinu matic,) na níž jsou zavedeny dvě operace, sečítání dvou jejich prvků a násobení jejich prvků reálnými čísly. Budeme požadovat, aby tyto operace splňovaly jisté vlastnosti.

**Definice 3.1 (Definice vektorového prostoru)** *Nechť $P$ je množina. Označme symbolem „+“ operaci, nazveme ji sečítáním, kterou ke každým dvěma prvkům $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$ je přiřazen prvek $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in P$ . Dále označme symbolem „·“ operaci, nazveme ji násobením, kterou ke každému prvku $\boldsymbol{a} \in P$ a ke každému reálnému číslu $\alpha \in \mathbb{R}$ je přiřazen prvek $\alpha \cdot \boldsymbol{a} \in P$. Nechť tyto operace mají následující vlastnosti:*
*Jestliže $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in P$ , potom*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}. \tag{35}$$

*Existuje prvek $\mathbf{0} \in P$ tak, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in P$ platí*

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}. \tag{36}$$

*Ke každému $\boldsymbol{x} \in P$ existuje $(-\boldsymbol{x}) \in P$ tak, že*

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}. \tag{37}$$

*Pro všechna* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in P$ *a pro všechna* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\begin{aligned} 1 \cdot \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}, && (38) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{x}) &= (\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{x}, && (39) \\ (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{x} &= \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{x}, && (40) \\ \alpha \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \alpha \cdot \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}. && (41) \end{aligned}$$

*Potom množinu* $P$ *s těmito operacemi „+“ a „·“ nazýváme lineárním, nebo též vektorovým prostorem. Budeme jej značit* $\mathbb{P}$. *Prvek* $\mathbf{0}$ *nazýváme jeho* nulovým prvkem.

**Poznámka.** Symbol „·“ pro násobení lze vynechat, pokud nemůže dojít k omylu. Místo $\boldsymbol{a} \in P$ lze psát $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$. Místo $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ lze psát $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

**Důsledek 1.** Ze vztahů (34), (35) vyplývá, že

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) = \\ &= \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} = \\ &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

Není proto nutno psát závorky a stačí psát $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Dokažme např., že $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$. Podle (35) je $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$. Podle (34) je $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$, takže $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$. Je tedy $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}$.

Podobně budeme psát $c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n \cdot {}^n\boldsymbol{x}$, kde ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}$ a $c_1, \ldots, c_n$ jsou libovolné konstanty, aniž bychom psali závorky.

## 3.1. Příklady lineárních prostorů

### Aritmetický vektorový prostor.

**Věta. 3.1 (Aritmetický vektorový prostor $\mathbb{V}_n$)** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných $n$–tic reálných čísel (nezáleží na tom jak jsou zapsány, zda do řádků nebo do sloupců), na níž jsou zavedeny operace sečítání „+“ a násobení „.“ takto:*

*Nechť $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ . Položme*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c},$$

*kde $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ je taková uspořádaná skupina reálných čísel, že*

$$c_i = a_i + b_i \quad pro \quad i = 1, \ldots n.$$

*Nechť $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha$ je reálné číslo. Potom*

$$\alpha \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d},$$

*kde $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ je taková uspořádaná skupina reálných čísel, že*

$$d_i = \alpha a_i \quad pro \quad i = 1, \ldots, n.$$

*Potom množina $\mathbb{R}^n$ s těmito operacemi sečítání „+“ a násobení „·“ je vektorovým prostorem. Budeme jej nazývat aritmetickým vektorovým prostorem a značit $\mathbb{V}_n$.*

Důkaz si proveďte jako cvičení. Stačí prověřit splnění vlastnosti operací sečítání a násobení uvedené v definici (3.1).

**Poznámka 1.** Prvky tohoto prostoru budeme nazývat aritmetické vektory, stručně jen vektory a většinou je budeme označovat malými tučně zapsanými písmeny. Číslo na $i$-tém místě vektoru $\boldsymbol{a}$ budeme značit $a_i$ a nazývat $i-$tou složku vektoru $\boldsymbol{a}$. Vypíšeme-li složky aritmetického vektoru do řádku, bude-li to nutné, nazveme jej řádkovým aritmetickým vektorem. Analogicky zavádíme pojem sloupcového aritmetického vektoru. Vektor, jehož všechny složky jsou rovny 0, budeme nazývat nulovým vektorem a značit $\mathbf{0}$. Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}_n$ budeme též nazývat $n$–rozměrným vektorem $\boldsymbol{a}$.

**Poznámka 2.** Jestliže chceme zdůraznit způsob zápisu složek vektoru do řádku (sloupce), budeme mluvit o řádkovém (sloupcovém) vektoru.

**Poznámka 3.** Je-li $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, potom číslo $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$ budeme nazývat velikostí vektoru $\boldsymbol{a}$ a značit $|\boldsymbol{a}|$.

**Poznámka 4.** Kdybychom v definici prostoru $\mathbb{V}_n$ uvažovali místo množiny $\mathbb{R}^n$ množinu uspořádaných $n$–tic reálných čísel, zapsaných do sloupců, dostali bychom prostor matic typu $(n, 1)$, který značíme $\mathbb{M}^{n,1}$. Kdybychom v definici $\mathbb{V}_n$ uvažovali místo uspořádaných $n$–tic reálných čísel množinu uspořádaných $n$–tic reálných čísel, zapsaných do řádků, dostali bychom prostor matic typu $(1, n)$, který značíme $\mathbb{M}^{1,n}$.

**Poznámka 5.** Komu obecná definice vektorového prostoru dělá velké potíže, ať si pod pojmem vektorového prostoru $\mathbb{P}$ představí vždy aritmetický vektorový prostor $\mathbb{V}_n$.

**Vektorový prostor volných vektorů.** V předcházejícím studiu na gymnáziu jste pracovali s volnými vektory. Zopakujme si napřed ve stručnosti pojem volného vektoru a operace s volnými vektory a to tak, jak se tyto pojmy zavádějí na gymnáziích.

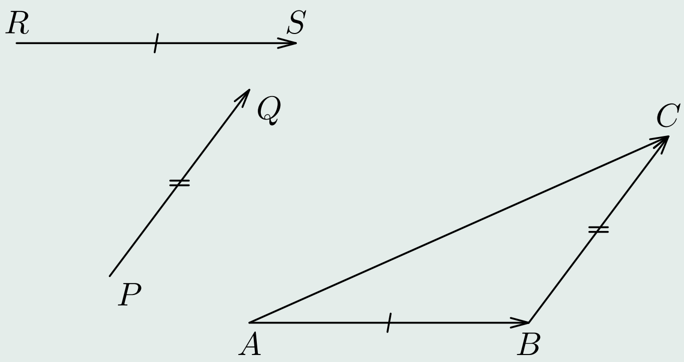
**Definice 3.2 (Volné vektory)** *Množinu všech nenulových orientovaných úseček, které mají stejný směr a stejnou velikost, nazveme* nenulovým volným vektorem *a množinu všech nulových orientovaných úseček* nulovým volným vektorem*. Každá orientovaná úsečka je pak umístěním příslušného volného vektoru a reprezentuje jej. Volné vektory budeme označovat písmenem se šipkou nahoře, např.* $\overrightarrow{a}$*. Nulový volný vektor budeme označovat symbolem* $\overrightarrow{0}$*. Délku každé orientované úsečky, která reprezentuje volný vektor* $\overrightarrow{a}$*, budeme nazývat* velikostí volného vektoru $\overrightarrow{a}$ *a budeme ji značit* $|\overrightarrow{a}|$*.*

**Věta. 3.2 (Vektorový prostor volných vektorů)** *Nechť $U$ je množina volných vektorů. Symbolem „+“ označme operaci, nazveme ji sečítáním, kterou ke každým dvěma volným vektorům $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ je přiřazen volný vektor, označme jej $\overrightarrow{c}$, který dostaneme takto: Zvolme libovolný bod $A$. Nechť $\overrightarrow{AB}$ je orientovaná úsečka, která reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$. Nechť orientovaná úsečka $\overrightarrow{BC}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{b}$, potom orientovaná úsečka $\overrightarrow{AC}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{c}$. Píšeme pak $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}$.*
*Označme dále symbolem „·“ operaci, nazveme ji násobením, kterou ke každému volnému vektoru $\overrightarrow{a}\in U$ a libovolnému reálnému číslu $\alpha\in\mathbb{R}$ je přiřazen volný vektor, označme jej $\overrightarrow{d}$, který dostaneme takto: Nechť orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ reprezentuje volný vektor $\overrightarrow{a}$. Označme $D$ takový bod na přímce určené body $A, B$, že velikost $|\overrightarrow{AD}|$ orientované úsečky $\overrightarrow{AD}$ je*

$$|\alpha|\cdot|\overrightarrow{AB}|$$

*a směr $\overrightarrow{AD}$ je stejný jako směr $\overrightarrow{a}$, je-li $\alpha \geq 0$ a opačný, je-li $\alpha < 0$.*
*Potom množina $U$ s takto zavedenými operacemi „+“ a „·“ tvoří vektorový prostor ve smyslu definice 3.1, to znamená, že jsou splněny vztahy (34)—(41). Budeme jej značit $\mathbb{U}$.*

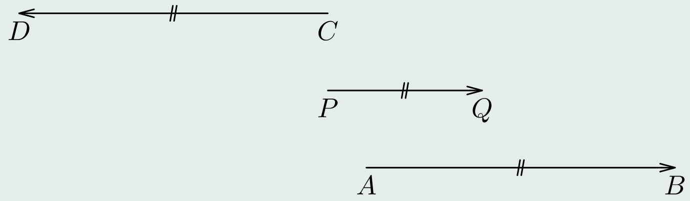
Na obr. 2 je znázorněno sečítání dvou volných vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$ a volný vektor $\overrightarrow{b}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{RS}$. Jejich součtem je volný vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AC}$.




Obrázek 2: Sečítání volných vektorů

Na obr. **??** je znázorněno násobení volného vektoru $\overrightarrow{a}$ reálným číslem. Volný vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$. Volný vektor $\overrightarrow{d} = 2,5 \cdot \overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ a volný vektor $\overrightarrow{e} = -2,5 \cdot \overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{CD}$.

**Volné vektory v kartézském souřadném systému v rovině.** V předcházející definici jsme uvažovali volné vektory nezávisle na souřadném systému, byly uvažovány v tzv. invariantním tvaru.




Obrázek 3: Násobení volného vektoru číslem

*Pojednejme nyní o prostoru* $\mathbb{U}_2$ *volných vektorů v rovině, v níž je zaveden kartézský souřadný systém.* Označme $x_1, x_2$ souřadné osy kartézského souřadného systémuv rovině.

Jak je dobře známo, ke každému bodu $P$ v kartézském souřadném systému roviny je přiřazena uspořádaná dvojice reálných čísel $[p_1, p_2]$. Číslo $p_1$ nazýváme jeho první souřadnicí a číslo $p_2$ nazýváme jeho druhou souřadnicí. Naopak, každou uspořádanou dvojici reálných čísel $[p_1, p_2]$ lze považovat za souřadnice právě jednoho bodu $P$ v rovině. Není tedy nutno striktně rozlišovat mezi bodem v rovině a uspořádanou dvojicí reálných čísel. Označme $\mathbb{U}_2$ množinu všech volných vektorů v této rovině s uvedenými operacemi sečítání volných vektorů v rovině a násobení volných vektorů v rovině reálnými čísly.

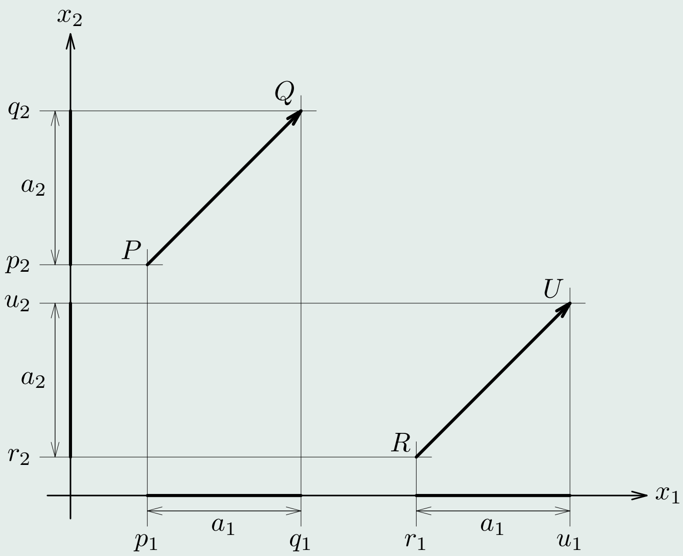
Uvažujme dvě orientované úsečky $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RU}$ (viz. obr. 4), kde

$$P = P[p_1, p_2],\ Q = Q[q_1, q_2],\ R = R[r_1, r_2],\ U = U[u_1, u_2].$$

Každá z těchto orientovaných úseček reprezentuje tentýž volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_2$, když a jenom když

$$q_1 - p_1 = u_1 - r_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = u_2 - r_2. \tag{42}$$

**Vztah mezi prostorem $\mathbb{V}_2$ a prostorem volných vektorů v rovině.** *Zaveďme si nyní zobrazení* $\mathcal{T}$ *prostoru* $\mathbb{U}_2$ *do prostoru* $\mathbb{V}_2$ *takto: Nechť volný vektor* $\overrightarrow{a} \in \mathbb{V}^2$ *je reprezentován*




Obrázek 4: Zobrazení $\mathbb{V}^2$ do $\mathbb{R}^2$

*orientovanou úsečkou* $\overrightarrow{PQ}$*, kde*

$$P = P[p_1, p_2],\ Q = Q[q_1, q_2].$$

*Označme*

$$a_1 = q_1 - p_1,\ a_2 = q_2 - p_2.$$

*Potom definujme*

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{a}) = \boldsymbol{a}, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{a} = (a_1, a_2).$$

Toto zobrazení nezávisí na volbě orientované úsečky, kterou je volný vektor reprezentován.

Zobrazením $\mathcal{T}$ se ke dvěma různým volným vektorům z $\mathbb{U}_2$ přiřadí dva různé vektory z prostoru $\mathbb{V}_2$. Každý vektor z $\mathbb{V}_2$ je přiřazen k právě jednomu volnému vektoru z $\mathbb{U}_2$. *Zobrazení $\mathcal{T}$ je prosté zobrazení vektorového prostoru $\mathbb{U}_2$ na vektorový prostor $\mathbb{V}_2$.* K zobrazení $\mathcal{T}$ existuje tedy inverzní zobrazení $\mathcal{T}^{-1}$. Tímto zobrazením $\mathcal{T}^{-1}$ se k vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{V}_2$ přiřadí vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_2$, píšeme $\mathcal{T}^{-1}\boldsymbol{a} = \overrightarrow{a}$, přičemž vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován např. orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OA}$, kde $A = A[a_1, a_2],\ O = O[0, 0]$.

Dokážeme, že takto zavedené zobrazení $\mathcal{T}$ prostoru $\mathbb{U}_2$ do prostoru $\mathbb{V}_2$ zachovává operace „+“ a „$\cdot$“.

Dokažme napřed, *že zobrazení $\mathcal{T}$ zachovává sečítání.* Nechť tedy $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{U}_2$. Nechť volný vektor $\overrightarrow{x}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OX}$ a volný vektor $\overrightarrow{y}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OY}$, kde $O = [0, 0]$, $X = [x_1, x_2]$, $Y = [y_1, y_2]$. Potom volný vektor $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OZ}$, kde $Z = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$. Viz obr. 5.

Je tedy

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{x}) = \boldsymbol{x}, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{V}_2,$$
$$\mathcal{T}(\overrightarrow{y}) = \boldsymbol{y}, \quad \text{kde} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{V}_2,$$
$$\mathcal{T}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

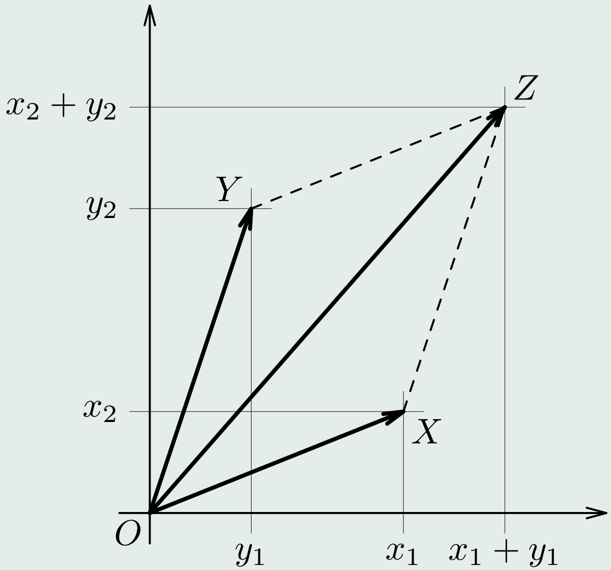
Poněvadž

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

platí

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},$$

takže skutečně *zobrazení $\mathcal{T}$ zachovává sečítání.*

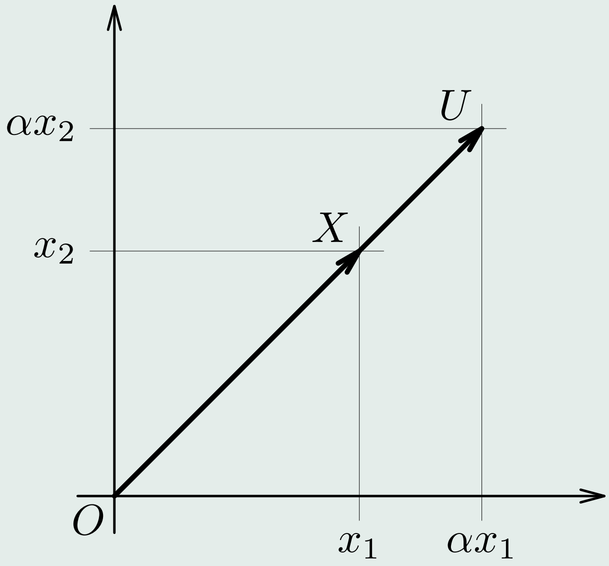



Obrázek 5: Zobrazení zachovává sečítání

Dokažme nyní, že *zobrazení* $\mathcal{T}$ *zachovává násobení*. Nechť $\overrightarrow{x} \in \mathbb{U}_2$ a nechť $\alpha$ je libovolné reálné číslo. Nechť volný vektor $\overrightarrow{x}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OX}$, kde $O = [0,0]$, $X = [x_1, x_2]$ a nechť volný vektor $\alpha \cdot \overrightarrow{x}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OU}$, kde $U = U[\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2]$. Viz obr. 6.

Je tedy

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{x}) = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2),$$
$$\mathcal{T}(\alpha \cdot \overrightarrow{x}) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2).$$




Obrázek 6: Zobrazení zachovává násobení

Poněvadž

$$(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) = \alpha \cdot (x_1, x_2) = \alpha \cdot \boldsymbol{x},$$

je

$$\mathcal{T}(\alpha \overrightarrow{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x}.$$

Tedy skutečně *zobrazení* $\mathcal{T}$ *zachovává násobení.*

*Vzhledem k vlastnostem zobrazení* $\mathcal{T}$ není tedy nutno dělat striktní rozdíl mezi vektorovým prostorem $\mathbb{V}_2$ a vektorovým prostorem $\mathbb{U}_2$.

*Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ si můžeme představit jako množinu všech takových orientovaných úseček $\overrightarrow{PQ}, P = [p_1,\ p_2], Q = [q_1, q_2]$, v kartézském souřadném systému v rovině, že*

$$q_1 - p_1 = a_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = a_2.$$

**Volné vektory v kartézském souřadném systému v třírozměrném prostoru.** *Podobně uvažujme prostor volných vektorů $\mathbb{U}_3$ ve třírozměrném prostoru, v němž je zaveden kartézský souřadný systém.* Jak je dobře známo, ke každému bodu $P$ je přiřazena uspořádaná trojice reálných čísel $[p_1, p_2, p_3]$. Číslo $p_1$ nazýváme jeho první souřadnicí, číslo $p_2$ nazýváme jeho druhou souřadnicí a číslo $p_3$ nazýváme jeho třetí souřadnicí. Naopak, každou uspořádanou trojici reálných čísel $[p_1, p_2, p_3]$ lze považovat za bod $P$ o souřadnicích $[p_1, p_2, p_3]$ v našem souřadném systému. Není tedy nutno dělat striktní rozdíl mezi pojmem bod v prostoru a uspořádanou trojicí reálných čísel. Uvažujme dvě orientované úsečky $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{UR}$, kde

$$\begin{aligned} P &= P[p_1, p_2, p_3],\ Q = Q[q_1, q_2, q_3], \\ U &= U[u_1, u_2, u_3],\ R = R[r_1, r_2, r_3]. \end{aligned}$$

Každá z těchto dvou orientovaných úseček reprezentuje tentýž volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_3$, když a jenom když

$$q_1 - p_1 = r_1 - u_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = r_2 - u_2 \ \wedge\ q_3 - p_3 = r_3 - u_3. \tag{43}$$

**Vztah mezi prostorem $\mathbb{V}_3$ a prostorem volných vektorů v třírozměrném prostoru.** *Zaveďme si nyní zobrazení $\mathcal{T}$ prostoru $\mathbb{U}_3$ do prostoru $\mathbb{V}_3$ takto*: Nechť volný vektor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{U}_3$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{PQ}$, kde $P = P[p_1, p_2, p_3],\ Q = Q[q_1, q_2, q_3]$. Označme

$$a_1 = q_1 - p_1, \quad a_2 = q_2 - p_2, \quad a_3 = q_3 - p_3.$$

Položme

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{V}_3.$$

Definujme

$$\mathcal{T}(\overrightarrow{a}) = \boldsymbol{a}. \tag{44}$$

Toto zobrazení nezávisí na volbě orientované úsečky, kterou je volný vektor reprezentován. Existuje k němu inverzní zobrazení. Analogicky jako pro rovinný případ se dá dokázat, že toto zobrazení $\mathcal{T}$ zachovává sečítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly. Podobně jako ve dvourozměrném případě dojdeme k tomuto závěru:

*Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ si můžeme představit jako množinu všech takových orientovaných úseček $\overrightarrow{PQ}$, $P = [p_1,\ p_2,\ p3]$, $Q = [q_1, q_2,\ q_3]$, v kartézském souřadném systému v trojrozměrném prostoru, že*

$$q_1 - p_1 = a_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = a_2 \wedge\ q_3 - p_3 = a_3.$$

Není proto nutno striktně rozlišovat mezi prostorem $\mathbb{U}_3$ a $\mathbb{V}_3$.

Vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ si můžete tedy představit jako množinu všech takových orientovaných úseček $\overrightarrow{PQ}$, kde $P = [p_1, p_2, p_3]$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$ v kartézském souřadném systému v prostoru, že

$$q_1 - p_1 = a_1 \ \wedge\ q_2 - p_2 = a_2 \ \wedge\ q_3 - p_3 = a_3.$$

*S pojmem vektorového prostoru úzce souvisí pojem vektorového podprostoru. Uveďme si jeho definici.*

**Definice 3.3 (Vektorový podprostor)** *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor definovaný na množině $P$ společně s operacemi sečítání „+“ dvou prvků z $P$ a násobení „·“ prvků z $P$ reálnými čísly.*

*Nechť $M \subseteq P$ a nechť množina $M$ společně s těmito operacemi „$+, \cdot$" tvoří vektorový prostor $\mathbb{M}$. Potom vektorový prostor $\mathbb{M}$ nazýváme* vektorovým podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{P}$.

***Příklad 3.1*** *Nechť $M$ je taková množina vektorů $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, z $\mathbb{V}_4$, že $x_2 = x_4$. Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, c, a_3, c)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, d, b_3, d)$, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla. Potom $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ patří do $M$. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, c + d, a_3 + b_3, c + d)$, $\boldsymbol{y} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot c, \alpha \cdot a_3, \alpha \cdot c)$. Zde operace „$+$" , „$\cdot$" jsou operace sečítání a násobení v prostoru $\mathbb{V}_4$. Je zřejmé, že $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ patří do množiny $M$. Proto množina $M$ s těmito operacemi „$+$" , „$\cdot$" tvoří vektorový prostor $\mathbb{M}$, který je vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{V}_4$.*

**Poznámka.** *Naše úvahy o volných vektorech byly založeny na více-méně intuitivně chápaném pojmu orientované úsečky. Cílem pojednání nebyl ovšem prostor volných vektorů. Cílem bylo pouze ukázat souvislosti mezi pojmem volného vektoru, se kterým jste se seznámili na gymnáziu a pojmem vektoru z vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$ pro $n = 2$, resp. $n = 3$.*

# 4. Systémy lineárních algebraických rovnic, úvod

*Rovnici*

$$a_1x_1 + \ldots a_jx_j + \ldots + a_nx_n = b,$$

*kde* $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ *jsou hledaná čísla,* $a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n$ *jsou konstanty, říkáme jim koeficienty,* $b$ *je číslo, nazýváme lineární rovnicí. Je-li těchto rovnic více, většinou je očíslujeme. Takže* $i-$*tou rovnici zapíšeme takto*

$$a_{i,1}x_1 + \ldots a_{i,j}x_j + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i.$$

*Tedy* $a_{i,j}$ *je koeficient u neznámé* $x_j$ *v* $i-$*té rovnici.*

*Je tedy*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{45}$$

*systém (místo systém můžeme použvat termín soustava)* $m$ *lineárních rovnic o* $n$ *neznámých* $x_1, \ldots, x_n$.

*Označme* $\boldsymbol{A}$ *následující matici utvořenou z koeficientů v jednotlivých rovnicích*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{46}$$

*Nazýváme ji* matică soustavy systému *(45), vektor*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

*nazýváme* vektorem neznámých *a vektor*

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

*nazýváme* vektorem pravých stran.

*Lehce nahlédneme, že systém lineárních algebraických rovnic* (45) *lze zapsat užitím tohoto označení jako*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{47}$$

*Skutečně, matice* $\boldsymbol{A}$ *je typu* $(m, n)$, $\boldsymbol{x}$ *je typu* $(n, 1)$, *takže* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ *je matice typu* $(m, 1)$. *Rovnice (47) znamená, že každá složka vektoru* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ *je rovna odpovídající složce vektoru* $\boldsymbol{b}$. *Porovnáním* $i$*–tých složek těchto vektorů dostáváme* $i$*–tou rovnici systému (45).*

*Matice, která vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *přidáním vektoru* $\boldsymbol{b}$ *jako dalšího sloupce, se nazývá* rozšířenou matici systému rovnic *(45).*

*Značíme ji $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Je tedy*

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right).$$

***Příklad 4.1*** *Uvažujme systém lineárních algebraických rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -12, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & -6. \end{array} \tag{48}$$

*Označíme-li $\boldsymbol{A}$ matici soustavy tohoto systému rovnic, $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých tohoto systému rovnic, je*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

*Matice rozšířená je rovna*

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -12 \\ 4 & 5 & 2 & -6 \end{array}\right).$$

*Daný systém rovnic lze tedy zapsat jako*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

*Zaveďme si nyní pojem řešení systému lineárních rovnic.*

***Definice 4.1*** *Vektor* ${}^0\boldsymbol{x}$ *nazveme řešením systému lineárních rovnic*

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},$$

*jestliže* $\boldsymbol{A}\cdot{}^0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. *(To jest, jestliže vektor* ${}^0\boldsymbol{x}$ *vyhovuje rovnici* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$*).*

*Vraťme se k příkladu 4.1. Označme*

$${}^1\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix},\quad {}^2\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix},\quad {}^3\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

*Zřejmě*

$$\boldsymbol{A}\cdot{}^1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A}\cdot{}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A}\cdot{}^3\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{b}.$$

*Jsou tedy vektory* ${}^1\boldsymbol{x}$, ${}^2\boldsymbol{x}$ *řešením uvažovaného systému (48), avšak* ${}^3\boldsymbol{x}$ *není jeho řešením.*

*Lehce se přesvědčíme, že vektor*

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}6-3\cdot c\\-6+2\cdot c\\c\end{pmatrix}$$

*je řešením uvažovaného systému rovnic (48) pro každé reálné c.*

***Příklad 4.2*** *Uvažujme systém lineárních rovnic*

$$x_1 - 2x_2 = 3, \quad (49)$$
$$2x_1 - 4x_2 = 5. \quad (50)$$

*Tento systém rovnic nemá řešení. Skutečně, předpokládejme, že* $\alpha, \beta$ *jsou taková čísla, že* $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ *vyhovovují první rovnici, tedy, že platí*

$$\alpha - 2 \cdot \beta = 3.$$

*Potom by bylo*

$$2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 6$$

*a ne* $2 \cdot \alpha - 4 \cdot \beta = 5$, *takže* $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ *nevyhovuje druhé rovnici.*

**Poznámka.** *Později budeme řešit obecně otázku, kdy systém lineárních rovnic má jedno řešení, kdy má nekonečně mnoho řešení a kdy nemá vůbec žádné řešení. Pro usnadnění práce můžeme každé rovnici*

$$a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,n}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (51)$$

*přiřadit vektor*

$$(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}, b_i).$$

*Zřejmě součtu* $i-$*té a* $j-$*té rovnice tohoto systému odpovídá pak vektor*

$$(a_{i,1} + a_{j,1}, \ldots, a_{i,n} + b_{i,n} | (b_i + b_j).$$

*a násobku $i-$té rovnice číslem $\alpha$ odpovídá vektor*

$$(\alpha a_{i,1}, \ldots, \alpha a_{i,n} | \alpha b_i.$$

*To nám umožňuje nahradit řadu operací s lineárními rovnicemi odpovídajícími operacemi s vektory.*

*K řešení nahoře uvedeného problému použijeme dále zaváděné pojmy: lineární kombinace vektorů (lineární kombinace rovnic), lineární nezávislost a lineární závislost vektorů (rovnic). S pojmy lineární kombinace vektorů a lineární závislost vektorů se setkáme i v jiných úlohách.*

***Definice 4.2 (Lineární kombinace vektorů)*** *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbb{P}$ a $c_1, \ldots, c_n$ jsou reálná čísla. Potom vektor*

$$\boldsymbol{x} = c_1\, {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\, {}^n\boldsymbol{x}$$

*nazveme* lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$. *Říkáme též, že vektor $\boldsymbol{x}$ je lineárně závislý na vektorech ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$. Říkáme též, že vektory $\boldsymbol{x}$, ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$. jsou lineárně závislé.*

***Příklad 4.3*** *Nechť*

$${}^1\boldsymbol{x} = (2, 3, -1),\ {}^2\boldsymbol{x} = (5, 2, 6),\ {}^3\boldsymbol{x} = (9, 8, 4)$$

*jsou vektory z prostoru $\mathbb{V}_3$. Poněvadž*

$$2 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + {}^2\boldsymbol{x} = 2 \cdot (2, 3, -1) + (5, 2, 6) = (4, 6, -2) + (5, 2, 6) = (9, 8, 4) = {}^3\boldsymbol{x},$$

*je vektor ${}^3\boldsymbol{x}$ lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}$ a je tedy na nich lineárně závislý.*

## Lineární závislost a lineární nezávislost vektorů.

*Nechť* ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}, n > 1$ *je skupina vektorů z vektorového prostoru* $\mathbb{P}$. *Řekneme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé, jestliže ani jeden z nich není lineární kombinací ostatních. Jestliže tyto vektory nejsou lineárně nezávislé, řekneme, že jsou lineárně závislé.*
*Jestliže skupina vektorů obsahuje jediný vektor, potom řekneme že nenulový vektor je lineárně nezávislý a nulový vektor je lineárně závislý. Lineární nezávislost skupiny pro případ, že skupina obsahuje libovolný počet vektorů, lze tedy zavést takto.*

***Definice 4.3 (Lineární nezávislost skupiny vektorů.)*** *Nechť* ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ *je skupina vektorů z vektorového prostoru* $\mathbb{P}$. *Řekneme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé, jestliže*

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0. \tag{52}$$

*Jestliže vektory* ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ *nejsou lineárně nezávislé, jsou* lineárně závislé.

*Lineární závislost vektorů lze vyjádřit též takto.*

**Poznámka.** *Vektory* ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$ *z vektorovém prostoru* $\mathbb{P}$ *jsou lineárně závislé, jestliže existují taková čísla* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *z nichž alespoň jedno je různé od* $0$, *že* $c_1\,{}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

***Příklad 4.4*** *Ukažme, že vektory* ${}^1\boldsymbol{x} = (1, 4, -4)$, ${}^2\boldsymbol{x} = (1, 2, 0)$, ${}^3\boldsymbol{x} = (1, 5, -2)$ *z prostoru* $\mathbb{V}_3$ *jsou lineárně nezávislé. Skutečně, ze vztahu*

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + c_2 \cdot {}^2\boldsymbol{x} + c_3 \cdot {}^3\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

*dostáváme*

$$c_1 \cdot (1,4,-4) + c_2 \cdot (1,2,0) + c_3 \cdot (1,5,-2) = (0,0,0),$$

*to jest*

$$(c_1 + c_2 + c_3, 4c_1 + 2c_2 + 5c_3, -4c_1 + 0c_2 - 2c_3) = (0,0,0).$$

*Aby rovnost mezi těmito vektory platila, musí koeficienty $c_1, c_2, c_3$ vyhovovat systému lineárních rovnic*

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0, \tag{53}$$
$$4c_1 + 2c_2 + 5c_3 = 0, \tag{54}$$
$$-4c_1 + 0c_2 - 2c_3 = 0. \tag{55}$$

*Jak se lehce přesvědčíme, má systém rovnic (53)—(55) jediné řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy dané vektory lineárně nezávislé.*

### Poznámka

*a)* *Vektor* $\mathbf{0}$ *je lineárně závislý, neboť* $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$.
*b)* *Vektory* ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x}$, $n > 1$, *jsou lineárně závislé, když a jenom když alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních z nich. (Dokažte!)*

***Příklad 4.5*** *Vektory*

$$(1,2,3),\ (-1,2,0),\ (1,6,6)$$

*jsou lineárně závislé. Lehce nahlédneme, že*

$$2 \cdot (1,2,3) + (-1,2,0) = (1,6,6).$$

*Vektor* $(1,6,6)$ *jsme vyjádřili jako lineární kombinaci zbývajících dvou vektorů.*

*Zaveďme si nyní pojem hodnosti skupiny $n$ vektorů následující definicí. Hodnost skupiny vektorů má zásadní význam při vyšetřování řešitelnosti systému lineárních rovnic.*

***Definice 4.4 (Hodnost skupiny vektorů)*** *Nechť $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x})$, je skupina $n$ vektorů z prostoru $\mathbb{P}$. Maximální počet lineárně nezávislých vektorů ve skupině $\boldsymbol{X}$ nazveme* hodností skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$. *Budeme ji značit $h(\boldsymbol{X})$.*

**Poznámka.** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, n)$.* Na matici $\boldsymbol{A}$ se můžeme dívat jako na uspořádanou $m$–tici řádkových vektorů z vektorového prostoru $\mathbb{V}_n$, resp. jako na uspořádanou $n$–tici sloupcových vektorů z vektorového prostoru $\mathbb{V}_m$. *Aplikováním definice hodnosti na řádky matice dostáváme* řádkovou hodnost matice *a aplikováním definice hodnosti na sloupce matice dostáváme* sloupcovou hodnost matice. Později ukážeme, že pro každou matici je sloupcová hodnost rovna její řádkové hodnosti. *Pokud to nedokážeme a výslovně neřekneme o jakou hodnost se jedná, budeme mít na mysli řádkovou hodnost.*

***Příklad 4.6*** *Určete řádkovou hodnost matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

*Označme ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}, {}^3\boldsymbol{x}$ postupně první, druhý a třetí řádek matice $\boldsymbol{A}$. Tedy*

$$ {}^1\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$ {}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$ {}^3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

*Zřejmě vektor* ${}^3\boldsymbol{x}$ *je lineárně závislý na vektorech* ${}^1\boldsymbol{x}, {}^2\boldsymbol{x}$*, neboť*

$$ {}^3\boldsymbol{x} = {}^1\boldsymbol{x} + {}^2\boldsymbol{x} $$

*a vektory* ${}^1\boldsymbol{x}$*,* ${}^2\boldsymbol{x}$ *jsou lineárně nezávislé. Skutečně, kdyby tyto vektory byly lineárně závislé, byl by jeden z nich násobkem druhého. To znamená, existovalo by takové číslo* $\alpha$*, že by* ${}^2\boldsymbol{x} = \alpha\,{}^1\boldsymbol{x}$ *to jest, platilo by*

$$ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. $$

*Takové číslo* $\alpha$ *však evidentně neexistuje. Vektory* ${}^1\boldsymbol{x}$*,* ${}^2\boldsymbol{x}$ *jsou tedy lineárně nezávislé. Tedy mezi vektory* ${}^1\boldsymbol{x}$*,* ${}^2\boldsymbol{x}$*,* ${}^3\boldsymbol{x}$ *jsou právě dva lineárně nezávislé vektory. Řádková hodnost matice* $\boldsymbol{A}$ *je tedy rovna 2.*

**Úkol.** Dokažte si, že horní schodovitá matice má řádkovou hodnost rovnu počtu jejich nenulových řádků.

## 4.1. Elementární transformace matic

Zavedeme si nyní několik elementárních transformací, jimiž se uspořádaná skupina vektorů, označme ji $\boldsymbol{X}$, z daného vektorového prostoru $\mathbb{P}$, převede na jinou uspořádanou skupinu vektorů z téhož vektorového prostoru. Příkladem uspořádané skupiny vektorů jsou například řádky matice, které jsou tvořeny vektory z aritmetického vektorového prostoru.

Později si ukážeme jak využít tyto transformace např. při řešení těchto úloh:

- Určit hodnost matice.
- Výpočítat hodnotu determinantu matice.
- Řešit systémy lineárních algebraických rovnic.

Napřed definujme základní elementární transformace $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$ a z nich vytvoříme tak zvané odvozené elementární transformace.

**Definice 4.5 (Základní elementární transformace)** *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. Nechť $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x})$ je uspořádaná skupina $n$ vektorů z $\mathbb{P}$. Definujme transformace (zobrazení) $\mathcal{H}1(i, \alpha)$, $\mathcal{H}2(i, j)$ takto:*

**Transformace $\mathcal{H}1(i, \alpha)$.** *Transformací*

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{X}. \tag{59}$$

*se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \ldots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$ takto:*

$${}^k\boldsymbol{y} := {}^k\boldsymbol{x} \quad \textit{pro} \quad k \neq i \quad \textit{a} \quad {}^i\boldsymbol{y} := \alpha \cdot {}^i\boldsymbol{x}. \tag{60}$$

**(To znamená, že vektor ${}^i\boldsymbol{x}$ násobíme číslem $\alpha$ a ostatní vektory ponecháme bez změny.)**

**Transformace $\mathcal{H}2(i, j)$.** *Transformací*

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}2(i, j)\boldsymbol{X} \tag{61}$$

*se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \ldots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$ takto:*

$${}^k\boldsymbol{y} := {}^k\boldsymbol{x} \quad \textit{pro} \quad k \neq j \quad \textit{a} \quad {}^j\boldsymbol{y} := {}^j\boldsymbol{x} + {}^j\boldsymbol{y} \tag{62}$$

**(To znamená, že k $j$–tému vektoru ${}^j\boldsymbol{x}$ se přičte $i$–tý vektor ${}^i\boldsymbol{x}$ a ostatní vektory se ponechají bez změny.)**

**Příklad 4.7** *Uvažme, že na matici typu $m, n)$ se můžeme dívat jako na uspořádanou skupin $m$ vektorů z prostoru $\mathbb{V}_n$, Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(3, 4)$*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

*Utvořme matici $\boldsymbol{B}$ typu $(3, 4)$ tak, že její druhý řádek je roven druhému řádku matice $\boldsymbol{A}$ násobenému číslem $(-3)$ a ostatní řádky matice $\boldsymbol{B}$ jsou rovny odpovídajícím řádkům matice $\boldsymbol{A}$. Takto vzniklá matice je matice*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -15 & -18 & -21 & -24 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

*Matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ transformací $\mathcal{H}1(2, -3)$. Píšeme*

$$\boldsymbol{B} = \mathcal{H}1(2, -3)\boldsymbol{A}, resp. \boldsymbol{A}\,\overrightarrow{\mathcal{H}1(2, -3)}\,\boldsymbol{B}.$$

**Odvozené elementární transformace** Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. Definujme následující transformace (zobrazení)

$$\mathcal{H}3(i, j), \mathcal{H}4(i, \alpha, j), \mathcal{H}5(i, \alpha, j, \beta), \alpha \neq 0, \beta \neq 0.$$

skupin vektorů $\boldsymbol{X}$ z $\mathbb{P}$ na skupiny vektorů z $\mathbb{P}$.

**Transformace $\mathcal{H}3(i, j)$.** Transformací

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}3(i, j)\boldsymbol{X}, \quad i \neq j, \tag{64}$$

se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí taková uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \dots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$, že

$$
{}^i\boldsymbol{y} := {}^j\boldsymbol{x},\ {}^j\boldsymbol{y} := {}^i\boldsymbol{x},\ {}^k\boldsymbol{y} := {}^k\boldsymbol{x} \quad \text{pro} \quad k \neq i, j \tag{65}
$$

**To znamená, že skupina vektorů $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ výměnou $i$–tého a $j$–tého vektoru.**

Místo (64) lza psát

$$
\boldsymbol{X} \xrightarrow{\mathcal{H}3(i,j)} \boldsymbol{Y}.
$$

**Příklad.** Nechť

$$
\boldsymbol{X} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{potom} \quad \boldsymbol{Y} := \mathcal{H}3(1,2)\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.
$$

**Transformace** $\mathcal{H}4(i, \alpha, j), i \neq j,\ \alpha \neq 0.$ Transformací

$$
\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}4(i, \alpha, j)\boldsymbol{X}, \tag{66}
$$

se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \dots, {}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí taková uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y}, \dots, {}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$, že

$$
{}^j\boldsymbol{y} := \alpha\, {}^i\boldsymbol{x} + {}^j\boldsymbol{x}, \quad \text{a} \quad {}^k\boldsymbol{y} = {}^k\boldsymbol{x}, \quad k \neq j.
$$

**To znamená, že skupina vektorů $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ tak, že k $j$–tému vektoru se připočte $\alpha$–násobek $i$–tého vektoru a ostatní vektory se ponechají bez změny.**
Místo (66) lze psát
$$\boldsymbol{X} \xrightarrow{\mathcal{H}4(i,\alpha,j)} \boldsymbol{Y}\,.$$

**Příklad.** Nechť
$$\boldsymbol{X} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{potom} \quad \boldsymbol{Y} := \mathcal{H}4(2,-3,3)\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Transformace $\mathcal{H}5(i,\alpha,j,\beta)$, $i \neq j$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.** Transformací
$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}5(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{X}\,, \quad i \neq j, \quad \beta \neq 0 \tag{67}$$
se k uspořádané skupině vektorů $\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x},\ldots,{}^n\boldsymbol{x})$ z $\mathbb{P}$ přiřadí taková uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Y} = ({}^1\boldsymbol{y},\ldots,{}^n\boldsymbol{y})$ z $\mathbb{P}$, že
$${}^j\boldsymbol{y} := \alpha\,{}^i\boldsymbol{x} + \beta\,{}^j\boldsymbol{x}, \quad \text{a} \quad {}^k\boldsymbol{y} = {}^k\boldsymbol{x}, \quad k \neq j.$$
**To znamená, že skupina vektorů $\boldsymbol{Y}$ vznikne ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ tak, že k $\beta$–násobku $j$–tého vektoru se připočte $\alpha$–násobek $i$–tého vektoru a ostatní vektory se ponechají bez změny.** Místo (67) lze psát
$$\boldsymbol{X} \xrightarrow{\mathcal{H}5(i,\alpha,j,\beta)} \boldsymbol{Y}\,.$$

**Příklad.** Nechť

$$\boldsymbol{X} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{potom} \quad \boldsymbol{Y} := \mathcal{H}5(2,3,4,-1)\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Věta. 4.1** *Transformace $\mathcal{H}3(i,j)$, $\mathcal{H}4(i,\alpha,j)$, $\beta \neq 0$ $\mathcal{H}5(i,\alpha,j,\beta)$, $\beta \neq 0$ jsou elementární, to znamená, že jsou vytvořeny postupným aplikováním elementárních transformací $\mathcal{H}1(i,\alpha)$, $\mathcal{H}2(i,j)$.*

Omezíme se pouze na důkaz, že transformace $\mathcal{H}3(i,j)$ je elementární.

V popisu budeme sledovat jenom vektory na $i$–té a na $j$–té pozici v uspořádané skupině vektorů. Schematicky lze tento postup znázornit takto

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{H}2(j,i)} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} + {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{H}1(j,-1)} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^{i}\boldsymbol{x} + {}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ -{}^{j}\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{H}2(i,j)}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ {}^i\boldsymbol{x} + {}^j\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ {}^i\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{H}1(j,-1)} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^i\boldsymbol{x} + {}^j\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ -{}^i\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{H}2(j,i)} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^j\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ -{}^i\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{H}1(j,-1)} \begin{pmatrix} \vdots \\ {}^j\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ {}^i\boldsymbol{x} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Je tedy skutečne transformace $\mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{X}$ elementární.

**Hodnost skupiny vektorů.** Zabývejme nyní se otázkou porovnání hodnosti skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ z $\mathbb{P}$ a hodnosti skupiny vektorů $\boldsymbol{Y}$ z $\mathbb{P}$, která vznikla ze skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$ elementárními transformacemi. Ukážeme, že tyto hodnosti jsou stejné.

**Věta. 4.2** *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{X}$ je uspořádaná skupina $m$ vektorů z $\mathbb{P}$*

$$\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}).$$

*Označme $\boldsymbol{Y}$ uspořádanou skupinu $m$ vektorů z $\mathbb{P}$, definovanou vztahem*

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}, \quad kde \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0, \quad 1 \leq i \leq m\ .$$

*Potom uspořádané skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ mají stejnou hodnost.*

**Důkaz.** Označme $h = h(\boldsymbol{X})$ hodnost uspořádané skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$. Dokažme napřed, že $h(\boldsymbol{Y}) \geq h$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že ve skupině $\boldsymbol{X}$ jsou vektory

$$({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}) \tag{68}$$

lineárně nezávislé a ostatní vektory $({}^{h+1}\boldsymbol{x}, \dots, {}^{m}\boldsymbol{x})$ jsou jejich lineárními kombinacemi. Předpokládejme, že

$$1 \leq i \leq h.$$

Transformací $Y = \mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{X}$ se vektor ${}^{k}\boldsymbol{x}$ transformuje na vektor ${}^{k}\boldsymbol{y}$, kde

$$ {}^{k}\boldsymbol{y} = {}^{k}\boldsymbol{x} \quad \text{pro každé} \quad k \neq i, \quad {}^{i}\boldsymbol{y} = \alpha \cdot {}^{i}\boldsymbol{x}. \tag{69}$$

Položme

$$c_1 \cdot {}^{1}\boldsymbol{y} + \ldots + c_i \cdot {}^{i}\boldsymbol{y} + \ldots + c_h \cdot {}^{h}\boldsymbol{y} = 0. \tag{70}$$

Vzhledem k (69) lze tento vztah přepsat na tvar

$$c_1 \cdot {}^{1}\boldsymbol{x} + \ldots + c_i\alpha \cdot {}^{i}\boldsymbol{x} + \ldots + c_h \cdot {}^{h}\boldsymbol{x} = 0. \tag{71}$$

Poněvadž vektory (68) jsou lineárně nezávislé, je

$$c_1 = 0, \dots, c_i\alpha = 0, \dots, c_h = 0.$$

Poněvadž $\alpha \neq 0$, dostáváme odtud

$$c_k = 0 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \dots, h,$$

takže vektory

$${}^{1}\boldsymbol{y}, {}^{2}\boldsymbol{y}, \dots, {}^{h}\boldsymbol{y}$$

jsou lineárně nezávislé. Je tedy hodnost $h(\boldsymbol{Y}) \geq h$. Dospěli jsme k závěru, že pro $1 \leq i \leq h$ je

$$h(\boldsymbol{X}) \leq h(\mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{X}) = h(\boldsymbol{Y}). \tag{72}$$

Předpokládejme nyní, že

$$h < i \leq m.$$

Transformací $Y = \mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{X}$ se vektory (68) nemění, takže

$$h(\boldsymbol{Y}) \geq h(\boldsymbol{X}).$$

Dospěli tedy k dílčímu výsledku, že

$$h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{Y}) = h(\mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{X}, \quad \text{pro všechna } i, \alpha \neq 0. \tag{73}$$

Poněvadž

$$\boldsymbol{X} = \mathcal{H}1(i, 1/\alpha)\boldsymbol{Y},$$

je podle (73)

$$h(\boldsymbol{Y}) \leq h(\mathcal{H}1(i, 1/\alpha)\boldsymbol{Y} = h(\boldsymbol{X}). \tag{74}$$

Ze vztahů (73),(74) dostáváme, že

$$h(\boldsymbol{X}) = h(\boldsymbol{Y}).$$

**Věta. 4.3** *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{X}$ je uspořádaná skupina $m$ vektorů z $\mathbb{P}$*

$$\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}).$$

*Označme $\boldsymbol{Z}$ uspořádanou skupinu vektorů z $\mathbb{P}$ definovanou vztahem*

$$\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i, j)\boldsymbol{X},$$

*kde*

$$i, j \in \{1, \ldots, m\}, \quad i \neq j.$$

*Potom $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Z}$ mají stejnou hodnost.*

**Důkaz**. Označme $h$ hodnost $\boldsymbol{X}$, tedy $h = h(\boldsymbol{X})$. Poněvadž hodnost $\boldsymbol{X}$ není závislá na pořadí vektorů, bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že ve skupině $\boldsymbol{X}$ je prvních $h$ vektorů lineárně nezávislých a zbývající vektory jsou jejich lineárními kombinacemi. Předpokládáme tedy, že vektory

$$ {}^{1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{h}\boldsymbol{x} \tag{75} $$

jsou lineárně nezávislé a vektory

$$ {}^{h+1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{m}\boldsymbol{x} \tag{76} $$

jsou jejich lineárními kombinacemi.
Napřed dokážeme, že platí nerovnost

$$ h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{Z}). \tag{77} $$

Poněvadž $h(\boldsymbol{X}) = h$, nerovnost (77) bude dokázána, nalezneme-li v $\boldsymbol{Z}$ $h$ lineárně nezávislých vektorů. Budeme je hledat v následujících případech pro různá umístění vektorů ${}^{i}\boldsymbol{x}, {}^{j}\boldsymbol{x}$ v uspořádané skupině $\boldsymbol{X}$.

**1°** Předpokládejme, že

$$ i \leq h, \quad j \leq h. \tag{78} $$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $i < j$. Potom

$$ \boldsymbol{X} = ({}^{1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{i}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{j}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{h}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{m}\boldsymbol{x}). \tag{79} $$

Transformací $\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$ se vektory (79) transformují na vektory

$$ \boldsymbol{Z} = ({}^{1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{i}\boldsymbol{x}, \ldots, ({}^{i}\boldsymbol{x} + {}^{j}\boldsymbol{x}), \ldots, {}^{h}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{m}\boldsymbol{x}). \tag{80} $$

Dokažme, že prvních $h$ vektorů v $\boldsymbol{Z}$ je lineárně nezávislých. Položme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + \ldots + c_i \cdot {}^i\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot ({}^i\boldsymbol{x} + {}^j\boldsymbol{x}) + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0. \tag{81}$$

Úpravou dostáváme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + (c_j + c_i) \cdot {}^i\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot {}^j\boldsymbol{x} + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0. \tag{82}$$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů (75) dostáváme odtud systém rovnic

$$c_j + c_i = 0, \quad c_k = 0 \quad \text{pro } k \ = 1, \ldots h, \quad k \neq i. \tag{83}$$

Odtud plyne zejména $c_j = 0$. Poněvadž $c_i + c_j = 0$ je i $c_i = 0$. Je tedy $c_1 = 0, \ldots, c_h = 0$, takže prvních $k$ vektorů v (80) je lineárně nezávislých.

**2°** Předpokládejme, že

$$1 \leq j \leq h < i.$$

V tomto případě je

$$\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^j\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}, \ldots, {}^i\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}).$$

Tyto vektory se transformují transformací $\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$ na systém vektorů

$$\boldsymbol{Z} \ = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, ({}^j\boldsymbol{x} + {}^i\boldsymbol{x}), \ldots, {}^h\boldsymbol{x}, \ldots, {}^i\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}). \tag{84}$$

Položme

$$c_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot ({}^j\boldsymbol{x} + {}^i\boldsymbol{x}) + \ldots + c_h \cdot {}^h\boldsymbol{x} = 0. \tag{85}$$

Vektor ${}^i\boldsymbol{x}$ je dle předpokladu lineární kombinací vektorů ${}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^h\boldsymbol{x}$, takže existují taková čísla $\beta_1, \ldots \beta_h$, že

$$^i\boldsymbol{x} = \beta_1 \cdot {}^1\boldsymbol{x} + \ldots + \beta_j \cdot {}^j\boldsymbol{x} + \ldots + \beta_h \cdot {}^h\boldsymbol{x}. \tag{86}$$

Dosaďme za ${}^{i}\boldsymbol{x}$ do (85). Dostáváme

$$c_1 \cdot {}^{1}\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot ({}^{j}\boldsymbol{x} + \beta_1 \cdot {}^{1}\boldsymbol{x} + \ldots + \beta_j \cdot {}^{j}\boldsymbol{x} + \ldots + \beta_h \cdot {}^{h}\boldsymbol{x}) \; + \ldots + c_h \cdot {}^{h}\boldsymbol{x} = 0.$$

Po úpravě dostáváme

$$(c_1 + c_j \cdot \beta_1) \cdot {}^{1}\boldsymbol{x} + \ldots + c_j \cdot (1 + \beta_j) \cdot {}^{j}\boldsymbol{x} + \ldots + (c_h + c_j \cdot \beta_h) \cdot {}^{h}\boldsymbol{x} = 0. \tag{87}$$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů ${}^{1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{h}\boldsymbol{x}$ je

$$c_1 + c_j\beta_1 = 0, \quad \ldots, c_j \cdot (1 + \beta_j) = 0, \ldots, (c_h + c_j \cdot \beta_h) = 0. \tag{88}$$

Mohou nastat dva případy: a) $\beta_j \neq -1$, b) $\beta_j = -1$.
**a)** to jest $\beta_j \neq -1$. Ze vztahu $c_j \cdot (1 + \beta_j) = 0$ vyplývá, že $c_j$=0. Z (88) tedy dostáváme $c_k = 0$ pro $k = 1, \ldots h$. Jsou tedy vektory (85) lineárně nezávislé, takže $h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{Y})$.
**b)** Nechť $\beta_j = -1$. V tomto případě ze vztahu $c_j \cdot (1 + \beta_j) = 0$ vyplývá, že $c_j$ může být libovolné číslo. Vektory (85) jsou tedy v tomto případě lineárně závislé. Ukážeme, že v tomto případě jsou však vektory

$${}^{1}\boldsymbol{x}, \ldots, {}^{j-1}\boldsymbol{x}, {}^{j+1}\boldsymbol{x}, \ldots, \ldots, {}^{h}\boldsymbol{x}, {}^{i}\boldsymbol{x}. \tag{89}$$

lineárně nezávislé. Položme

$$c_1 \cdot {}^{1}\boldsymbol{x} + \ldots + c_{j-1} \cdot {}^{j-1}\boldsymbol{x} + c_{j+1} \cdot {}^{j+1}\boldsymbol{x} + \ldots + c_h \cdot {}^{h}\boldsymbol{x} + c_i \cdot {}^{i}\boldsymbol{x} = 0. \tag{90}$$

Dosadíme-li sem za ${}^{i}\boldsymbol{x}$ vztah (86) pro $\beta_j = -1$, dostáváme po úpravě

$$\begin{gathered}(c_1 + c_i \cdot \beta_1) \cdot {}^{1}\boldsymbol{x} + \ldots + (c_{j-1} + c_i \cdot \beta_{j-1}) \cdot {}^{j-1}\boldsymbol{x} + \\ +(c_{j+1} + c_i \cdot \beta_{j+1}) \cdot {}^{j+1}\boldsymbol{x} + \ldots \\ \ldots + (c_h + c_i \cdot \beta_h) \cdot {}^{h}\boldsymbol{x} + \ldots - c_i \cdot {}^{j}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{91}$$

Poněvadž vektory (75) jsou lineárně nezávislé, dostáváme z (91) tento systém rovnic:

$$c_i = 0, \quad c_k + c_i \cdot \beta_k = 0 \tag{92}$$

pro $k = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, h$. Odtud dostáváme, že

$$c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_h, c_i$$

jsou rovny nule. Jsou tedy vektory (89) skutečně lineárně nezávislé.

**3°** Nechť $j > h$. V tomto případě se vektory (75) transformací $\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$ nezměnily, jsou tedy lineárně nezávislými. Je tedy i v tomto případě $h(\boldsymbol{Z}) \geq h(\boldsymbol{X})$.

Zatím jsme dospěli k tomuto výsledku. Nechť $\boldsymbol{X}$ je uspořádaná skupina $m$ vektorů. Potom uspořádaná skupina $m$ vektorů $\boldsymbol{Y}$

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{X}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \alpha \neq 0$$

má stejnou hodnost jako $\boldsymbol{X}$ a uspořádaná skupina vektorů $\boldsymbol{Z}$

$$\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$$

má hodnost, pro níž platí $h(\boldsymbol{Z}) \geq h(\boldsymbol{X})$. Je-li tedy $\boldsymbol{U}$ uspořádaná skupina vektorů, vytvořena postupným aplikováním těchto dvou tranformací (elementárních transformací), má hodnost $h(\boldsymbol{U})$ pro níž platí

$$h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{U}). \tag{93}$$

Tohoto poznatku využijeme k důkazu, že $h(\boldsymbol{Z}) \geq h(\boldsymbol{U})$. Nechť tedy $\boldsymbol{Z} = \mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{X}$. Položme

$$\boldsymbol{A} = \mathcal{H}1(i,\,-1)\boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{B} = \mathcal{H}2(i,\,j)\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{U} = \mathcal{H}1(i,\,-1)\boldsymbol{B}.$$

Potom $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{X}$. Tedy $\boldsymbol{X}$ jsme získali z $\boldsymbol{Z}$ elementární transformací, takže podle toho co jsme uvedli, je

$$h(\boldsymbol{X}) \geq h(\boldsymbol{Z}). \tag{94}$$

Odtud a ze vztahu $h(\boldsymbol{X}) \leq h(\boldsymbol{Z})$ dostáváme, že

$$h(\boldsymbol{X}) = h(\boldsymbol{Z}),$$

což je vztah, který jsme chtěli dokázat.

**Věta. 4.4** *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a $\boldsymbol{X}$ je uspořádaná skupina $m$ vektorů z $\mathbb{P}$*

$$\boldsymbol{X} = ({}^1\boldsymbol{x}, \ldots, {}^m\boldsymbol{x}).$$

*Označme $\boldsymbol{Y}$ uspořádanou skupinu $m$ vektorů z $\mathbb{P}$, která vznikla z $\boldsymbol{X}$ elementární transformací. Potom skupiny vektorů $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ mají stejnou hodnost.*

**Důkaz.** Poněvadž každá elementární transformace vzniká postupným aplikováním základních elementárních transformací, je tvrzení věty bezprostředním důsledkem vět (4.2), (4.4).

Na základě těchto výsledků můžeme vyslovit následující větu. Uvažme, že matici lze považovat za uspořádanou skpinu řádkových aritmetických vektorů. Je tedz následující věta speciálním případem předcházejících úvah.

**Věta. 4.5 (O hodnosti matice)** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, n)$. Potom*

- *Matice $\mathcal{H}1(i, \alpha)\boldsymbol{A}$, kde $\alpha \neq 0$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její $i$–tý řádek vynásobíme číslem $\alpha$ a ostatní řádky ponecháme beze změny*

- *Matice $\mathcal{H}2(i,j)\boldsymbol{A}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že k jejímu $j$–tému řádku přičteme její $i$–tý řádek a ostatní řádky ponecháme beze změny.*
- *Matice $\mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{A}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že vzájemně vyměníme její $i$–tý a $j$–tý řádek a ostatní řádky ponecháme beze změny.*
- *Matice $\mathcal{H}4(i,\alpha,j)\boldsymbol{A}$, je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její $j$–tý řádek nahradíme součtem jejího $j-$tého řádku a $\alpha-$násobku jejího $i-$tého řádku a ostatní řádky ponecháme bez změny.*
- *Matice $\mathcal{H}5(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{A}$, kde $\beta\neq 0$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její $j$–tý řádek nahradíme součtem $\beta-$ násobku jejího $j-$tého řádku a $\alpha-$násobku jejího $i-$tého řádku a ostatní řádky ponecháme bez změny.*

*Postupným aplikováním těchto transformací na matici $\boldsymbol{A}$ dostaneme matici, která má stejnou řádkovou hodnost jako matice $\boldsymbol{A}$.*

Sloupcovou hodnost matice určíme podle analogické věty, která vznikne z věty 4.5 tak, že v ní slova „řádek“ nahradíme slovy „sloupec“.

## 4.2. Určení hodnosti matice

*Nechť $\boldsymbol{X}$ je nenulová schodovitá matice. Potom její hodnost je rovna počtu jejich nenulových řádků.*

Uvedli jsme si, že matice $\boldsymbol{Y}$, která vznikne z matice $\boldsymbol{X}$ elementárními transformacemi, má stejnou hodnost jako matice $\boldsymbol{X}$. Popišme tedy výpočtový postup jak elementárními transformacemi transformovat danou matici $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ na horní schodovitou matici.

**Transformace matice $\boldsymbol{X}$ na horní schodovitou matici**

Nechť $\boldsymbol{X}$ je nenulová matice typu $(m, n)$, která není ve schodovitém tvaru. Její transformaci na matici schodovitého tvaru, označíme ji opět $\boldsymbol{X}$, provedem takto.

**Začátek**

Položme $\boxed{i := 1}$

**B1.** Budeme vytvářet $i$-tý řádek hledané matice schodovitého tvaru.

**B2.** K číslu $i$ určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice $\boldsymbol{X}$, v jehož řádcích $i, i+1, \ldots, m$ je alespoň jeden nenulový prvek. Toto pořadové číslo sloupce označme $s_i$.

**B3.** Zvolme $p \in \{i, \ldots, m\}$, pro než je $x_{p,s_i} \neq 0$. (je-li takových $p$ více, zvolíme jedno z nich). $p$-tý řádek matice $\boldsymbol{X}$ nazveme *hlavním řádkem*.

**B4.** Je-li $p \neq i$, vyměníme navzájem $p$-tý a $i$-tý řádek metice $\boldsymbol{X}$. Po této výměně je $i$-tý řádek hlavním řádkem. Je-li $p = i$, je již $i$-tý řádek hlavním řádkem.

**B5.** Provedeme nyní takové elementární transformace, aby po jejich realizaci byly prvky

$$x_{i+1,s_i}, \ldots, x_{m,s_i}$$

rovny 0. Toho dosáhneme např. elementárními transformacemi

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}5(i, -x_{j,s_i}, j, x_{i,s_i})\boldsymbol{X}$$

pro ty indexy $j = i+1, \ldots, m$ pro něž $x_{j,s_j} \neq 0$.

**B6.** Jestliže matice $\boldsymbol{X}$ není ještě ve schodovitém tvaru, položme

$$\boxed{i := i + 1}$$

a přejdeme zpět na **B1**.

Je-li $\boldsymbol{X}$ ve schodovitém tvaru, je transformace ukončena. Hodnost dané matice je pak rovna počtu nenulových řádků schodovité matice.

**Příklad 4.8** *Určete řádkovou hodnost matice*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

*užitím její transformace na horní schodovitou matici.*

**Řešení.** *Položme*

$$\boldsymbol{X} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad m := 4, \quad n := 5.$$

*V následujícím popisu výpočtového postupu bude označení* **B1-*i*,...,B6-*i*** *znamenat úkony* **B1–B6** *pro dané $i$.*

**Začátek**

$\boxed{i := 1}$

**B1-1** *Budeme vytvářet i-tý (první) řádek hledané schodovité matice.*

**B2-1** *K číslu $i$ (to jest k číslu $i = 1$) určíme nejmenší pořadové číslo sloupce, v jehož řádcích $i, \ldots, m$ (to jest v jehož řádcích $1, 2, 3, 4$) je nenulový prvek. Je to druhý sloupec. Položíme tedy $s_i := 2$ ($s_1 = 2$).*

**B3-1** *Zvolíme hlavní řádek. V $s_i$–tém sloupci (to jest ve 2. sloupci) jsou nenulové prvky v řádcích $1, 2, 4$. Z nich zvolíme jeden. Jeho pořadové číslo označíme $p$. Rozhodneme se pro řádek $p = 1$, který zvolíme jako hlavní.*

**B4-1** *Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p–tý řádek, kde $p = i$, neprovádíme výměnu řádku p s řádkem i.*

**B5-1** *Provedeme nyní takové elementární tranformace matice $\boldsymbol{X}$, aby po jejich realizaci byly v $s_i$-tém sloupci (to jest ve druhém sloupci) v řádcích $i+1,\ldots,m$ (to jest v řádcích 2, 3, 4) nulové prvky. (Prvky $x_{2,2}, x_{3,2}, x_{4,2}$ eliminujeme). Toho dosáhneme např. elementárními transformacemi*

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}5(i, -x_{j,s_i}, j, x_{i,s_i})\boldsymbol{X}, \qquad \textit{pro } j = i+1,\ldots,m, \textit{ je-li } x_{j,s_j} \neq 0.$$

*Poněvadž $i = 1$, $s_i = 2$, $m = 4$, eliminaci provedeme elementárními transformacemi*

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}5(1, -x_{j,2}, j, x_{1,2})\boldsymbol{X}, \qquad \textit{pro } j = 2,3,4.$$

*To znamená, že prvek $x_{j,2}$ pro každé $j \in \{2,3,4\}$ eliminujeme tak, že hlavní řádek (to jest první řádek) vynásobíme číslem $(-x_{j,2})$ a přičteme jej k j-tému řádku vynásobeného číslem $x_{1,2}$.*

- *Položme $j := i+1$ (tedy pro $j = 2$) dostáváme*

  $$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}5(1, -a_{2,2}, 2, a_{1,2})\boldsymbol{X}.$$

  *Po této transformaci je druhý řádek matice $\boldsymbol{X}$ roven*

  $$\boldsymbol{X}(2,:) = -2\cdot(0\ 1\ 3\ 2\ 3) + 1\cdot(0\ 2\ 6\ 4\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0\ -5)$$

  *a ostatní řádky matice $\boldsymbol{X}$ se nemění.*
- *Položme $j := j+1$. Je tedy $j = 3$. Poněvadž $x_{j,s_i} = 0$, (to jest $x_{3,2} = 0$), eliminaci není třeba provádět a přejdeme k dalšímu řádku.*

- *Položme* $j := j+1$. *Je tedy* $j = 4$. *Poněvadž* $x_{j,s_i} = 1 \neq 0$, *(to jest* $x_{4,2} \neq 0$,*) provedeme elementární transformaci*

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}5(1, -a_{4,2}, 4, a_{1,2})\boldsymbol{X}.$$

*Po této transformaci je čtvrtý řádek matice* $\boldsymbol{X}$ *roven*

$$\boldsymbol{X}(4,:) = -1 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 3) + 1 \cdot (0\ 1\ 3\ 2\ 4) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1).$$

*Ostatní řádky matice* $\boldsymbol{X}$ *se nemění.*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**B6-1** *Poněvadž obdržená matice* $\boldsymbol{X}$ *ještě není horní schodovitou maticí, položíme*

$$\boxed{i := i+1}$$

*a přejdeme na bod* **B1**.

**B1-2** Je tedy $i = 2$. Budeme vytvářet druhý řádek horní schodovité matice.

**B2-2** *K číslu* $i$ *(to jest k číslu* $i = 2$*) určíme nejmenší pořadové číslo* $s_i$ *(to jest* $s_2$*) sloupce, v jehož řádcích* $i, \ldots, m$ *(to jest v jehož řádcích* $2, 3, 4$*) je nenulový prvek. Je to čtvrtý sloupec. Položíme tedy* $s_i := 4$ *(*$s_2 = 4$*).*

**B3-2** *Zvolíme hlavní řádek. V* $s_i$*-tém sloupci (to jest ve 4. sloupci) je v řádcích* $2, 3, 4$ *nenulový prvek jen v řádku 3. Jeho pořadové číslo označíme* $p$*. Tento řádek zvolíme za hlavní řádek. Je tedy* $p := 3$.

**B4-2** *Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek řádek $p$, kde $p \neq i$, provedeme v matici $\boldsymbol{X}$ výměnu řádku $p$ s řádkem $i$. (Tedy výměnu druhého a třetího řádku.) Dostáváme tak matici*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**B5-2** *Provedeme nyní takové elementární transformace matice $\boldsymbol{X}$, aby po jejich realizaci byly v $s_i$-tém sloupci (to jest ve čtvrtém sloupci) v řádcích $i+1, \ldots, m$ (to jest v řádcích 3, 4) nulové prvky. (Prvky $x_{3,4}, x_{4,4}$ eliminujeme.) Avšak v tomto případě jsou prvky $x_{3,4}, x_{4,4}$ rovny 0, takže eliminaci není třeba provádět . Je tedy výsledná matice v tomto kroku*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**B6-2** *Obdržená matice $\boldsymbol{X}$ ještě není horní schodovitou maticí, proto položíme*

$$\boxed{i := i + 1}$$

*a přejdeme na bod* **B1**.

**B1-3** *Je tedy $i = 3$. To znamené, že budeme vytvářet třetí řádek hledané schodovité matice.*

**B2-3** *K číslu* $i$ *(to jest k číslu* $i = 3$*) určíme nejmenší pořadové číslo* $s_i$ *(to jest* $s_3$*), v jehož řádcích* $i, \ldots, m$ *(to jest v jehož řádcích* $3, 4$*) je nenulový prvek. Je to pátý sloupec. Položme tedy* $s_i := 5$ *(*$s_3 = 5$*).*

**B3-3** *Zvolíme hlavní řádek. V* $s_i$*-tém sloupci (to jest v 5. sloupci) jsou nenulové prvky v řádcích 3, 4. Z nich zvolíme jeden. Jeho pořadové číslo označíme* $p$*. Rozhodneme se pro řádek* $p = 4$*, který zvolíme jako hlavní.*

**B4-3** *Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek* $p$*-tý řádek, kde* $p \neq i$*, provádíme výměnu řádku* $p$ *s řádkem* $i$*. Po této výměně je*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

**B5-3** *Provedeme nyní takové elementární transformace matice* $\boldsymbol{X}$*, aby po jejich realizaci byly v* $s_i$*-tém sloupci (to jest v pátém sloupci) v řádcích* $i+1, \ldots, m$ *(to jest v řádku 4) nulové prvky. (Prvek* $x_{4,5}$ *eliminujeme.) Toho lze dosáhnout např. elementární transformací*

$$\boldsymbol{X} := \mathcal{H}5(3, -x_{4,5}, 4, x_{3,5})\boldsymbol{X}.$$

*Výpočtem dostáváme*

$$\boldsymbol{X}(4, :) = 5 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ 1) + 1 \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ \ -5) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0).$$

*Je tedy*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**B6-3** *Poněvadž obdržená matice je již horní schodovitou maticí, je transformace dané matice na horní schodovitou matici již ukončen.*

*Poněvadž obdržená schodovitá matice má celkem tři nenulové řádky, je její hodnost a tedy i hodnost zadané matice rovna 3. Tedy* $h(\boldsymbol{X}) = 3$.

**Příklad 4.9** *Určete hodnost skupiny vektorů*

$${}^{1}\boldsymbol{a} = (1\ 0\ \ -1\ 2), \qquad {}^{2}\boldsymbol{a} = (0\ 1\ 2\ \ -1), \qquad {}^{3}\boldsymbol{a} = (0\ 1\ 3\ \ -6).$$

**Řešení.** *Úloha je ekvivalentní s úlohou nalezení řádkové hodnosti matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

*Tuto hodnost hledejme transformací matice* $\boldsymbol{A}$ *elementárními ransformacemi na horní schodovitou matici postupem popsaným na str.* *77**.*

*Položme*

$\boxed{i := 1}$

**B1-1** *Budeme vytvářet i-tý řádek (1. řádek) schodovité matice.*

**B2-1** *K číslu* $i = 1$ *určíme nejmenší pořadové číslo sloupce matice* $\boldsymbol{A}$, *v jehož řádcích 1, 2, 3 je alespoň jeden prvek různý od 0. Je to v prvním sloupci. Pokládáme tedy* $s_1 := 1$.

**B3-1** *Hledáme nyní řádek matice* $\boldsymbol{A}$, *v jehož sloupci s pořadovým číslem* $s_1 = 1$ *je nenulový prvek. To jest, hledáme* $p \in \{1, 2, 3\}$, *pro něž je* $a_{p,s_1} \neq 0$. *Je to pro* $p = 1$. *Položme tedy* $p := 1$. *Řádek* $p = 1$ *volíme za hlavní.*

**B4-1** *Poněvadž* $p = i$, *neprovádíme výměnu p-tého a i-tého řádku. První řádek je hlavním.*

**B5-1** *Poněvadž všechny prvky v prvním sloupci počínaje druhým řádkem, jsou nulové (tj. prvky* $a_{j,1} = 0$ *pro* $j = 2, 3$*), přejdeme k* **B6-1**.

**B6-1** *Matice* $\boldsymbol{A}$ *není horní schodovitou maticí, proto položíme*

$$\boxed{i := i + 1}$$

*a jdeme zpět k bodu* **B1**.

**B1-2** *Je tedy* $i = 2$. *Budeme vytvářet 2. řádek schodovité matice.*

**B2-2** *K číslu i (tj. k číslu* $i = 2$*) určíme nejmenší pořadové číslo sloupce* $s_i$ *(to jest* $s_2$*), v jehož řádcích 2, 3 je nenulový prvek. Je to druhý sloupec. Položíme tedy* $s_2 := 2$.

**B3-2** *Zvolíme hlavní řádek. Ve sloupci s pořadovým číslem* $s_2$ *(tj. ve druhém sloupci) hledáme index* $j$, $j \geq i$, *tak, aby* $a_{j,s_2} \neq 0$. *Je to pro* $j = 2$ *a pro* $j = 3$. *Zvolme jedno z nich. Rozhodneme se pro* $j = 2$. *Položíme* $p := 2$. *Bude tedy p-tý řádek hlavním řádkem.*

**B4-2** *Poněvadž jsme zvolili za hlavní řádek p-tý řádek, kde* $p = i$, *neprovádíme vzájemnou výměnu p-tého a i-tého řádku. Je tedy i-tý řádek hlavním řádkem.*

**B5-2** *Provedeme nyní takové elementární transformace, aby po jejich realizaci byly v* $s_i$*-tém sloupci (ve druhém sloupci) v řádcích* $i + 1, \ldots, m$ *(to jest v řádku 3) nulové prvky. Toho dosáhneme např. elementární transformací*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}5(2, -a_{3,2}, 3, a_{2,2})\boldsymbol{A}.$$

*Výpočtem dostáváme*

$$\boldsymbol{A}(3,:) = -1(0\ 1\ 2\ \ -1) + 1(0\ 1\ 3\ \ -6) = (0\ 0\ 1\ \ -5).$$

*Celkem dostáváme*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

**B6-2** *Dosažená matice* $\boldsymbol{A}$ *je horní schodovitá matice. Poněvadž má tři nenulové řádky, je její hodnost rovna 3, je tedy* $h(\boldsymbol{A}) = 3$.
*Dané vektory* ${}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, {}^3\boldsymbol{a}$ *jsou lineárně nezávislé.*

**Příklad 4.10** *Určete hodnost matice*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Řešení.** *V tomto příkladě naznačíme pouze výsledky jednotlivých úprav bez komentáře.*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Má tedy matice $\boldsymbol{X}$ hodnost 2.*

# 5. Báze vektorového prostoru

Zaveďme si nyní pojem báze. V některých vektorových prostorech existují vektory, které mají tu vlastnost, že každý vektor tohoto prostoru lze vyjádřit jako jejich vhodnou lineární kombinaci. To nás vede k této definici.

**Definice 5.1 (Báze vektorového prostoru)** *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. ${}^1\boldsymbol{e}, \ldots, {}^n\boldsymbol{e}$ jsou vektory z $\mathbb{P}$ s těmito vlastnostmi:*

1. *jsou lineárně nezávislé*
2. *každý vektor prostoru $\mathbb{P}$ se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace, to jest, ke každému vektoru $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$ existují taková čísla $c_1, \ldots, c_n$, že*

$$\boldsymbol{a} = c_1\,{}^1\boldsymbol{e} + \ldots + c_n\,{}^n\boldsymbol{e}.$$

*Potom říkáme, že vektory ${}^1\boldsymbol{e}, \ldots, {}^n\boldsymbol{e}$ z $\mathbb{P}$ tvoří jeho bázi.*

**Příklad 5.1** *Dokažte že vektory*

$${}^1\boldsymbol{e} = (1, 0, 0),\ \ {}^2\boldsymbol{e} = (0, 1, 0),\ \ {}^3\boldsymbol{e} = (0, 0, 1)$$

*tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.*

**Důkaz.** *Dokažme především, že vektory*

$${}^1\boldsymbol{e},\ \ {}^2\boldsymbol{e},\ \ {}^3\boldsymbol{e}$$

*jsou lineárně nezávislé. Abychom to dokázali, hledejme koeficienty $c_1, c_2, c_3$, pro něž je*

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{e} + c_2\,{}^2\boldsymbol{e} + c_3\,{}^3\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0},$$

*to jest, pro něž je*

$$c_1 \cdot (1,0,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (0,0,1) = \mathbf{(}0,0,0\mathbf{)}.$$

*To zřejmě platí když a jenom když* $c_1 = c_2 = c_3 = 0$*. Jsou tedy vektory* ${}^1\boldsymbol{e} = (1,0,0)$, ${}^2\boldsymbol{e} = (0,1,0)$, ${}^3\boldsymbol{e} = (0,0,1)$ *skutečně lineárně nezávislé.*

*Nechť nyní* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *je libovolný vektor z* $\mathbb{V}_3$ *a hledejme koeficienty* $c_1, c_2, c_3$*, pro něž je*

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{e} + c_2\,{}^2\boldsymbol{e} + c_3\,{}^3\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a},$$

*to jest, pro něž platí*

$$c_1 \cdot (1,0,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (0,0,1) = (a_1, a_2, a_3).$$

*Odtud dostáváme* $c_1 = a_1, c_2 = a_2, c_3 = a_3$*. Vektory*

$${}^1\boldsymbol{e} = (1,0,0), {}^2\boldsymbol{e} = (0,1,0), {}^3\boldsymbol{e} = (0,0,1)$$

*mají vlastnosti uvedené v definici 5.1, takže tvoří bázi vektorového prostoru* $\mathbb{V}_3$*.*

**Příklad 5.2** *Dokažte, že vektory*

$${}^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ {}^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ {}^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$$

*tvoří bázi vektorového prostoru* $\mathbb{V}_3$*.*

*Budeme postupovat podobně jako v minulém příkladě. Napřed dokážeme, že vektory*

$${}^1\boldsymbol{f},\ {}^2\boldsymbol{f},\ {}^3\boldsymbol{f}$$

*jsou lineárně nezávislé. Hledejme koeficienty $c_1, c_2, c_3$, pro něž je*

$$c_1\,{}^1\boldsymbol{f} + c_2\,{}^2\boldsymbol{f} + c_3\,{}^3\boldsymbol{f} = \mathbf{0},$$

*to jest, pro něž je*

$$c_1 \cdot (1,1,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (1,1,1) = \big(0,0,0).$$

*To zřejmě platí když a jenom když*

$$\begin{aligned} c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= 0, && (95)\\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0, && (96)\\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= 0. && (97) \end{aligned}$$

*Tento systém rovnic má právě jedno řešení a to $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jsou tedy vektory ${}^1\boldsymbol{f} = (1,1,0)$, ${}^2\boldsymbol{f} = (0,1,0)$, ${}^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$ lineárně nezávislé.*

*Abychom dokázali, že tyto vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$, musíme ještě dokázat, že každý vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}_3$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace vektorů ${}^1\boldsymbol{f}$, ${}^2\boldsymbol{f}$, ${}^3\boldsymbol{f}$. Nechť tedy $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$. Hledejme nyní koeficienty $c_1, c_2, c_3$, pro něž je $c_1\,{}^1\boldsymbol{f} + c_2\,{}^2\boldsymbol{f} + c_3\,{}^3\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}$, to jest, že*

$$c_1 \cdot (1,1,0) + c_2 \cdot (0,1,0) + c_3 \cdot (1,1,1) = (a_1, a_2, a_3).$$

*To zřejmě platí když a jenom když*

$$\begin{aligned} c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= a_1, && (98)\\ c_1 + c_2 + c_3 &= a_2, && (99)\\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 &= a_3. && (100) \end{aligned}$$

*Odtud dostáváme* $c_1 = a_1 - a_3$, $c_2 = a_2 - a_1$, $c_3 = a_3$. *Vektory*

$$^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ ^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ ^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$$

*mají vlastnosti uvedené v definici 5.1, takže tvoří bázi vektorového prostoru* $\mathbb{V}_3$.

Všimněmě si blíže obou těchto příkladů. V obou příkladech jsme uvažovali tentýž vektorový prostor. Ukázali jsme, že jak vektory

$$^1\boldsymbol{e} = (1,0,0),\ \ ^2\boldsymbol{e} = (0,1,0),\ \ ^3\boldsymbol{e} = (0,0,1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$, tak i vektory

$$^1\boldsymbol{f} = (1,1,0),\ \ ^2\boldsymbol{f} = (0,1,0),\ \ ^3\boldsymbol{f} = (1,1,1)$$

tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

Báze vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$ není tedy určena jednoznačně. V nahoře uvedeném příkladě byl počet vektorů tvořících bázi téhož vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$ v obou případech stejný. Naskytá se otázka, zda se jedná o nahodilost, anebo zda se jedná o nějakou zákonitost. V případě, že počet vektorů tvořících bázi by byl stejný pro každou bázi, potom tento počet by charakterizoval příslušný vektorový prostor. Uveďme si tedy následující větu, která odpovídá na tuto otázku.

**Věta. 5.1** *Nechť* $\mathbb{P}$ *je vektorový prostor a* $^1\boldsymbol{e}, \dots, {}^n\boldsymbol{e}$ *je jeho báze, tvořena* $n$ *vektory. Potom platí:*

> *Jestliže* $^1\boldsymbol{f}, \dots, {}^m\boldsymbol{f}$ *je skupina* $m$ *vektorů z* $\mathbb{P}$, *kde* $m \geq n$, *potom v ní je nejvýše* $n$ *lineárně nezávislých vektorů.*

*Každá skupina $n$ lineárně nezávislých vektorů z $\mathbb{P}$ je jeho báze.*
*Číslo $n$ nyzýváme dimenzí vektorového prostoru $\mathbb{P}$. Píšeme $dim\mathbb{P} = n$.*

Bez důkazu.

Dokažte si platnost tohoto tvrzení

Aritmetický vektorový prostor $\mathbb{V}_n$ má dimenzi rovnu $n$, tj. $dim\mathbb{V}_n = n$. Jedna z jeho bází je tvořena vektory

$$^1\boldsymbol{e} = (1, 0, \ldots, 0),\ ^2\boldsymbol{e} = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ ^n\boldsymbol{e} = (0, 0, \ldots, 1).$$

Uveďme si nyní pojem *vektorového podprostoru* vektorového prostoru $\mathbb{P}$.

**Definice 5.2 (Vektorový podprostor)** *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor. Nechť $Q \subseteq \mathbb{P}$ a nechť pro každé dva prvky $x, y \in Q$ je $x + y \in Q$ a pro každé $x \in Q$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot x \in Q$. Zde symboly „+“ a „·“ jsou operace sečítání a násobení v prostoru $\mathbb{P}$. Potom množina $Q$ společně s uvedenými operacemi „+“ a „·“ je vektorovým podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{P}$, značíme jej $\mathbb{Q}$.*

Uveďme si ještě pojem *vektorového prostoru generovaného systémem vektorů.*

**Definice 5.3 (Lineární obal množiny)** *Nechť $\mathbb{P}$ je vektorový prostor a nechť $M \subseteq \mathbb{P}$. Potom množinu $Q$ všech lineárních kombinací vektorů z $M$ nazýváme lineárním obalem množiny $M$. Množina $Q$ s operacemi „+“ a „·“ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{P}$. Říkáme, že prostor $\mathbb{Q}$ je generován množinou $M$.*

*Jestliže $\mathbb{U}$ je vektorový podprostor prostoru $\mathbb{P}$ obsahující $M$, potom $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{U}$.*

**Příklad 5.3** *Nechť $Q$ je množina těch vektorů z $\mathbb{V}_5$, jejichž první a třetí složka je stejná. Potom množina $Q$ s operacemi „+“ a „·“, definovanými v prostoru $\mathbb{V}_5$, je vektorovým podprostorem $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{V}_5$. Vektory*

$$(1,0,1,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1) \tag{101}$$

*tvoří jeho bázi.*

*Skutečně. Nechť*

$$\boldsymbol{a}=(s,a_2,s,a_4,a_5),\ \ \boldsymbol{b}=(r,b_2,r,b_4,b_5)$$

*a $\alpha, r, s$ jsou libovolná čísla. Potom*

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(s+r,a_2+b_2,s+r,a_4+b_4,a_5+b_5),$$

*takže první a třetí složka tohoto součtu je stejná, takže tento součet patří do množiny $Q$. Podobně*

$$\alpha\cdot\boldsymbol{a}=(\alpha\cdot s,\ \alpha\cdot a_2,\ \alpha\cdot s,\ \alpha\cdot a_4,\ \alpha\cdot a_5),$$

*takže první a třetí složka tohoto součinu je stejná, takže součin $\alpha\cdot\boldsymbol{a}$ patří do množiny $Q$. Tato množina $Q$ s operacemi „+“ a „·“, definovanými v $\mathbb{V}_5$, je vektorovým podprostorem $\mathbb{Q}$ prostoru $\mathbb{V}_5$.*

Ukažme ještě, že vektory (101) tvoří jeho bázi. Dokažme napřed, že jsou lineárně nezávislé. Skutečně, hledejme taková $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ pro něž je

$$c_1\cdot(1,0,1,0,0)+c_2\cdot(0,1,0,0,0)+c_3\cdot(0,0,0,1,0)+c_4\cdot(0,0,0,0,1)=(0,0,0,0,0).$$

Odtud dostáváme

$$(c_1,c_2,c_3,c_4)=(0,0,0,0).$$

Tento vztah je splněn zřejmě jenom v případě, že

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.$$

Jsou tedy vektory (101) lineárně nezávislé.

Nechť nyní

$$\boldsymbol{a} = (s, a_2, s, a_4, a_5)$$

je libovolný vektor $z$ $\mathbb{Q}$. Potom

$$s \cdot (1, 0, 1, 0, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, 0, 0) + a_4 \cdot (0, 0, 0, 1, 0) + a_5 \cdot (0, 0, 0, 0, 1) = \\ = (s, a_2, s, a_4, a_5)$$

Lze tedy vektor $\boldsymbol{a} = (s, a_2, s, a_4, a_5)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů (101). Tím je důkaz proveden.

Zároveň lze konstatovat, že vektorový prostor $\mathbb{Q}$ je generován vektory (101).

Vraťme se k systému rovnic (45)

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{102}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matice typu $(m, n)$, $\boldsymbol{b}$ je vektor $(m, 1)$ a neznámý vektor $\boldsymbol{x}$ je typu $(n, 1)$.

Označme

$${}^1\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \qquad {}^2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad {}^n\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Potom systém (45) lze zapsat jako

$$\boldsymbol{x}_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{x}_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \ldots + \boldsymbol{x}_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

tj.

$$x_1{}^1\boldsymbol{a} + x_2{}^2\boldsymbol{a} + \ldots + x_n{}^n\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}. \tag{103}$$

**Příklad 5.4** *Systém lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_1 - 3x_3 &= -12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

*lze zapsat jako*

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

**Poznámka** Pro každou uspořádanou $n$-tici reálných čísel je levá strana (103), tj. vektor

$$x_1{}^1\boldsymbol{a} + x_2{}^2\boldsymbol{a} + \ldots + x_n{}^n\boldsymbol{a}$$

vektorem z vektorového prostoru $G$ generovaného sloupcovými vektory matice $\boldsymbol{A}$, tj. vektory ${}^1\boldsymbol{a}, {}^2\boldsymbol{a}, \ldots, {}^n\boldsymbol{a}$. Systém rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení když a jenom když $\boldsymbol{b} \in G$.

# 6. Skalární součin, norma a vzdálenost ve vektorovém prostoru

Na gymnáziu se zavádí pojem skalárního součinu dvou volných vektorů. Toto zavedení se motivovalo potřebami fyziky. Skalární součin jste využívali nejen ve fyzice, ale i v analytické geometrii a to jak v úlohách s přímkami, tak i v úlohách s rovinami. Pojem skalárního součinu dvou volných vektorů a výpočet úhlu dvou nenulových volných vektorů nás bude motivovat k zavedení skalárního součinu a úhlu dvou vektorů v obecných vektorových prostorech. S těmito pojmy se pak můžete setkat při řešení různých aplikačních úloh. Začněme tedy s volnými vektory.

**Definice 6.1** *Úhlem volných vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ rozumíme úhel*

$$\varphi \in \langle 0, \pi \rangle,$$

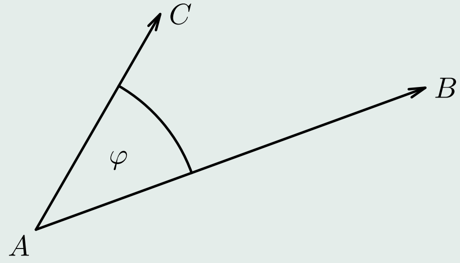
*o který je nutno otočit orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$, reprezentující $\overrightarrow{a}$, kolem bodu $A$ v rovině určené body $(A, B, C)$ do směru orientované úsečky $\overrightarrow{AC}$, reprezentující $\overrightarrow{b}$, kde $A$ je libovolný bod (viz obr 6).*

**Skalární součin dvou volných vektorů.** Nechť $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ jsou dva volné nenulové vektory. Potom jejich skalárním součinem rozumíme číslo (skalár), označme je $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, definované vztahem

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos(\varphi), \tag{104}$$

kde $\varphi$ je úhel,který svírají vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Jestliže alespoň jeden z vektorů $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ je nulový vektor, definujeme

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0.$$




Obrázek 7: Úhel dvou vektorů

Podívejme se nyní na pojem skalárního součinu dvou volných vektorů v kartézském souřadném systému ve třírozměrném prostoru. (Analogické úvahy je možno provést ve dvojrozměrném prostoru.) Uvažujme dva nenulové volné vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Nechť volný vektor $\overrightarrow{a}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OA}$ a volný vektor $\overrightarrow{b}$ je reprezentován orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OB}$, kde $O = [0,0,0], A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$. Označme $\varphi$ úhel, který svírají orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Na trojúhelník $\triangle(OAB)$ aplikujme kosinovou větu. Dostáváme (viz obr.8)

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\,|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos(\varphi)$$

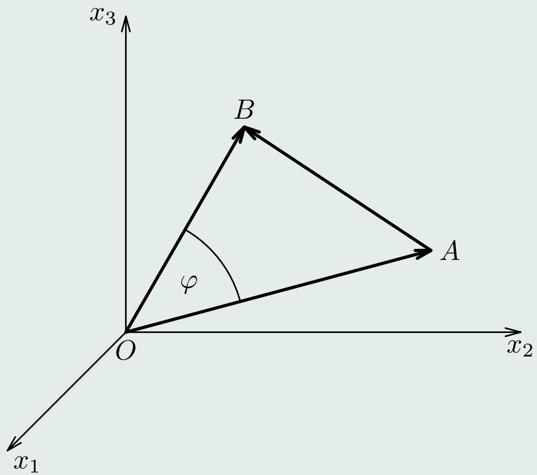
Do tohoto vztahu dosaďme

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2},$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Úpravou dostaneme

$$|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\varphi) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{105}$$




Obrázek 8: Odvození skalárního součinu dvou vektorů

Poněvadž $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{a}|$ a $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{b}|$, dostáváme odtud a z (104)

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{106}$$

Jsou-li volné vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ nenulové, lze užitím vztahů (104), (105) určit $\cos(\varphi)$ vztahem

$$\cos(\varphi) = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}. \tag{107}$$

Užitím (106) pak dostáváme

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{108}$$

Uvažujme nyní zobrazení $\mathcal{F}$ prostoru $\mathbb{U}_3$ na prostor $\mathbb{V}_3$ (bylo již zavedeno dříve), definované vztahem

$$\mathcal{F}(\overrightarrow{a}) = (a_1 \ a_2 \ a_3) = \boldsymbol{a}, \quad \mathcal{F}(\overrightarrow{b}) = (b_1 \ b_2 \ b_3) = \boldsymbol{b}.$$

Vzhledem k vlastnostem zobrazení $\mathcal{F}$ a vzhledem k (106) definujeme skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ v prostoru $\mathbb{V}_3$ vztahem (později definici skalárního součinu zobecníme)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{109}$$

a úhel $\varphi$, který svírají dva nenulové vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, vztahem

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{110}$$

Uvážíme-li, že $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, lze (110) přepsat takto

$$\cos(\varphi) = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}. \tag{111}$$

*Takto zavedený pojem skalárního součinu vektorů z* $\mathbb{V}_3$ *a pojem úhlu dvou nenulových vektorů z* $\mathbb{V}_3$ *rozšíříme i pro vektory z* $\mathbb{V}_n$. (Tyto pojmy v dalším ještě více zobecníme.)

**Definice 6.2** *Nechť* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ *jsou vektory z vektorového prostoru* $\mathbb{V}_n$. *Potom číslo, označme je* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, *definované vztahem*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \tag{112}$$

*nazveme skalárním součinem vektorů* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

**Poznámka.** Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_n$ jsou sloupcové vektory. Potom skalární součin $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ definovaný vztahem (112) lze zapsat jako

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{b}.$$

Lze dokázat, že v prostoru $\mathbb{V}_n$ má skalární součin vektorů, definovaný vztahem (112), následující vlastnosti:

**Věta. 6.1** *Nechť $\mathbb{V}_n$ je vektorový prostor. Potom skalární součin v tomto prostoru, definovaný vztahem (112), má tyto vlastnosti:*

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), && (113)\\
(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), && (114)\\
(\alpha \cdot \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \alpha \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), && (115)\\
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) &\geq 0, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}. && (116)
\end{aligned}$$

**Důkaz** Omezíme se na důkaz vztahu (114), ostatní vztahy se dokazuji analogicky, jejich důkaz přenechávám čtenáři. Aplikací vztahu (112) na levou stranu (114) dostáváme

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (a_1 + b_1) \cdot c_1 + \ldots + (a_n + b_n) \cdot c_n,$$

což po úpravě dává

$$a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_1 + \ldots + a_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

*Pojem skalárního součinu dvou vektorů rozšíříme nyní i na vektorové prostory $\mathbb{P}$, definované na obecné množině $P$.* Uvažujme nyní vektorový prostor $\mathbb{P}$, definovaný na nějaké neprázdné množině $P$. V tomto vektorovém prostoru budeme definovat skalární součin takto.

**Definice 6.3 (Skalární součin dvou vektorů)** *Nechť $\mathbb{P}$ je daný lineární prostor. Ke každým jeho dvěma vektorům $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{P}$ je přiřazeno reálné číslo $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ tak, že pro vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{P}$ a pro každé reálné číslo $\alpha$ platí*

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), && (117) \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), && (118) \\ (\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), && (119) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) &\geq 0, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}. && (120) \end{aligned}$$

*Potom číslo $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ nazýváme skalárním součinem prvků $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{P}$.*

Skalární součin definovaný v prostoru $\mathbb{V}_n$ vztahem (112)je jedním z možných způsobů definování skalárního součinu v prostoru $\mathbb{V}_n$. V následujícím příkladě si uvedeme jiný, rovněž často používaný skalární součin v prostoru $\mathbb{V}_n$.

**Příklad 6.1** *Nechť $\omega_1, \ldots, \omega_n$ jsou kladná čísla. Ke každým dvěma vektorům $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{V}_n$ přiřaďme reálné číslo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega$ vztahem*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega = \omega_1 x_1 y_1 + \ldots + \omega_n x_n y_n. \tag{121}$$

*Potom $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega$ definuje skalární součin na $\mathbb{V}_n$.*

**Důkaz.** *Stačí prověřit, že $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_\omega$ splňuje vztahy (117—120). Přenechávám jej čtenáři.*

**Věta. 6.2** *Nechť $\mathbb{P}$ je lineární prostor se skalárním součinem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$. Potom pro libovolná $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$ platí*

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|S \leq \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}. \tag{122}$$

**Důkaz**. Nechť $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. Potom pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{P}$ platí

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{x}, 0 \cdot \boldsymbol{z}) = 0 \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 0,$$

takže platí (122). Nechť $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Potom vzhledem k (120) je $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) > 0$. Položme

$$F(\alpha) = (\boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \alpha \cdot \boldsymbol{y}), \tag{123}$$

kde $\alpha$ je reálný parametr. Potom podle (120) je $F(\alpha) \geq 0$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. Dosadíme-li do (123) $\alpha = -\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}$ dostáváme z (123)

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2 \cdot \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} \cdot (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})^2} \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \geq 0. \tag{124}$$

Úpravou dostáváme

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} \geq 0.$$

Odtud

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \geq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2,$$

takže

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \cdot \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}.$$

Jako další důležitý pojem, který si zavedeme, je pojem normy v lineárním prostoru $\overrightarrow{P}$. Normu použijeme pak k definování vzdálenosti dvou prvků v tomto prostoru.

**Definice 6.4 (norma)** *Lineární prostor $\mathbb{P}$ nazýváme normovaným lineárním prostorem, jestliže ke každému $\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}$ je přiřazeno takové nezáporné reálné číslo, označme je $||\boldsymbol{x}||$, že pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$ a každé reálné číslo $\alpha$ platí*

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x}|| &= 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, && (125) \\ ||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| &\leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}|| && (126) \\ ||\alpha.\boldsymbol{x}|| &= |\alpha|.||\boldsymbol{x}||. && (127) \end{aligned}$$

V normovaném lineárním prostoru $\mathbb{P}$ platí následující věta.

**Věta. 6.3** *Nechť $\mathbb{P}$ je normovaný lineární prostor. Je-li $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, potom platí $||\boldsymbol{a}|| > 0$.*

**Důkaz.** Podle definice normy pro každé $\boldsymbol{a} \in \mathbb{P}$ je $||\boldsymbol{a}|| \geq 0$. Nechť existuje takové $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, že $||\boldsymbol{a}|| = 0$. Podle (125) by bylo $\boldsymbol{a} = 0$, což by byl spor s předpokladem. Je tedy $||\boldsymbol{a}|| > 0$ pro každé $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$.

Uveďme si nyní následující normy ve vektorových prostorech $\mathbb{V}_n$.

**Věta. 6.4 (Normy v prostoru $\mathbb{V}_n$) $\boldsymbol{\alpha}$)** *Jestliže ke každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ přiřadíme číslo $||\boldsymbol{x}||_1$ vztahem*

$$||\boldsymbol{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \tag{128}$$

*potom $||\boldsymbol{x}||_1$ je* tzv. oktaedrická norma *ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}_n$.*
**$\boldsymbol{\beta}$)** *Jestliže ke každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ přiřadíme číslo $||\boldsymbol{x}||_2$ vztahem*

$$||\boldsymbol{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \tag{129}$$

*potom* $||\boldsymbol{x}||_2$ *je tzv.* euklidovská norma *ve vektorovém prostoru* $\mathbb{V}_n$*.*
$\boldsymbol{\gamma}$**)** *Jestliže ke každému vektoru* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ *přiřadíme číslo* $||\boldsymbol{x}||_3$ *vztahem*

$$||\boldsymbol{x}||_3 = \max |x_i| \quad \textit{pro } i = 1, \ldots, n, \tag{130}$$

*potom* $||\boldsymbol{x}||_3$ *je tzv.*max–norma *ve vektorovém prostoru* $\mathbb{V}_n$*. (V literatuře se místo* $||.||_3$ *píše též* $||.||_{\max}$*.)*

**Definice 6.5 (Úhel dvou vektorů)** *Nechť* $\mathbb{P}$ *je lineární prostor se skalárním součinem* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$*, kde* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$*. Označme*

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

*Potom pro nenulové vektory* $\boldsymbol{x}$ *,* $\boldsymbol{y}$ *nazýváme úhel* $\varphi$*, definovaný vztahem*

$$\cos(\varphi) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}, \tag{131}$$

*úhlem vektorů* $\boldsymbol{x}$*,* $\boldsymbol{y}$*. Dva vektory* $\boldsymbol{x}$*,* $\boldsymbol{y}$ *nazýváme navzájem kolmými, jestliže*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0. \tag{132}$$

**Poznámka.** Jestliže vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou nenulové, potom z (**??**) pro pravý úhel vyplývá (132).

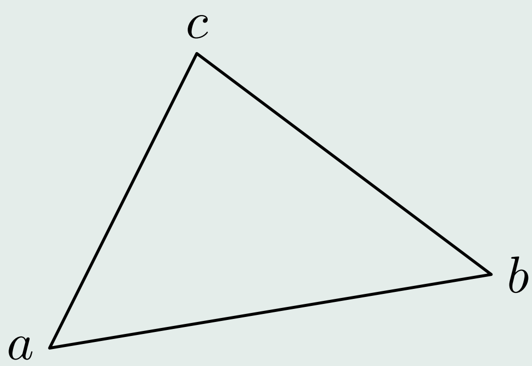
**Metrický prostor.** Dříve než zavedeme pojem metrického prostoru, uveďme si tento příklad. Předpokládejme, že podnik vyrábí výrobky $V_1, \ldots, V_n$ . Nechť $p_i$ značí plán výroby výrobku $V_i, i = 1, \ldots, n$. Nechť výrobní plán je popsán vektorem $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Předpokládejme, že podnik se odklonil od plánované výroby jednotlivých výrobků. Nechť realizovaná výroba je popsaná vektorem $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, kde $r_i$ značí zrealizovanou výrobu výrobku $V_i, i = 1, \ldots, n$. Je otázkou, jak ohodnotit odchylku realizace celé výroby od plánu výroby, to jest odchylky vektorů $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$. K tomu si zavedeme pojem vzdálenosti dvou vektorů.

Pojem vzdálenosti zavedeme napřed pro prvky libovolné množiny. Vzdálenost dvou bodů jsme zvyklí chápat jaksi intuitivně, bez jeho precizování. Označíme-li $M$ množinu bodů, potom v našem intuitivním pojetí má vzdálenost tyto vlastnosti:

**M1.** Vzdálenost dvou různých bodů je kladná, vzdálenost každého bodu od sama sebe je nulová.

**M2.** Vzdálenost bodu, označme jej $a \in M$, je od druhého bodu, označme jej $b \in M$, stejná, jako je vzdálenost bodu $b$ od bodu $a$.

**M3.** Jsou-li $a, b, c$ tři body množiny $M$, potom vzdálenost bodů $a, b$ je menší nebo rovna součtu vzdálenosti bodů $a, c$, a vzdálenosti bodů $b, c$. Této vlastnosti říkáme trojúhelníková nerovnost. Je znázorněna na obr.6.




Trojúhelníková nerovnost

Toto intuitivní chápání vzdálenosti nás inspiruje k zavedení pojmu vzdálenost na libovolné množině $M$ takto.

**Definice 6.6 (Definice vzdálenosti)** *Nechť $M$ je daná neprázdná množina a nechť $\varrho$ je zobrazení, kterým ke každým dvěma prvkům $a, b \in M$ je přiřazeno nezáporné číslo, označme je $\varrho(a, b)$, tak, že pro $a, b, c \in M$ platí*

$$\varrho(a,b) \geq 0, \quad \text{přičemž } \varrho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b, \tag{133}$$
$$\varrho(a,b) = \varrho(b,a), \tag{134}$$
$$\varrho(a,b) \leq \varrho(a,c) + \varrho(b,c). \tag{135}$$

*Potom $\varrho(a, b)$ nazýváme* vzdáleností prvků *$a, b$ a množinu $M$ s takto zavedenou vzdáleností $\varrho$ nazýváme* metrickým prostorem*.*

Na jedné a téže množině lze definovat vzdálenost různými způsoby. Jednou z možností jejího definování ve vektorovém prostoru je použití normy.

**Věta. 6.5 (Vzdálenost určená normou.)** *Nechť $\mathbb{P}$ je normovaný vektorový prostor. Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$. Potom vztahem*

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| \quad \text{pro} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}$$

*je definovaná vzdálenost v $\mathbb{P}$.*

## Posouzení přibližného řešení systému rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Uvažujme systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Označme $\mathbf{x}^*$ jeho přesné řešení a $\overline{\boldsymbol{x}}$ jeho přibližné řešení (řešení obdržené např. výpočtem na počítači). Zaveďme si dva vektory $\boldsymbol{\delta}$ a $\boldsymbol{r}$ vztahy

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{x}^* - \overline{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}. \tag{136}$$

- Norma vektoru $\boldsymbol{\delta}$ vyjadřuje vzdálenost přibližného řešení od přesného řešení. Tento vektor však většinou v reálnách situacích nemůžeme určit, neboť neznáme přesné řešení. Existují metody na odhad normy tohoto vektoru. Vycházejí však velice pesimisticky.
- Vektor $\boldsymbol{r}$ se nazývá reziduálním vektorem. Vyjadřuje, jak dobře přibližné řešení vyhovuje danému systému rovnic.

Ukažme si dva příklady.

**Příklad 6.2** *Uvažujme systém lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2,5\,x_1 & - & 3,1\,x_2 & - & x_3 & = & 7,31, \\ -0,5\,x_1 & + & 2,0\,x_2 & - & 1,5\,x_3 & = & -0,25, \\ 7,2\,x_1 & - & 3,1\,x_2 & + & 4,1\,x_3 & = & 9,18. \end{array} \tag{137}$$

*Přesné řešení tohoto systému je*

$$x_1^* = 1,7, \quad x_2^* = -0,6, \quad x_3^* = -1,2.$$

*Výpočtem jsme obdrželi jeho přibližné řešení*

$$\overline{x_1} = 1,683, \quad \overline{x_2} = -0,571, \quad \overline{x_3} = -1,219.$$

*V tomto případě je*

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 0,017 \\ -0,029 \\ 0,019 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -2,5514 \\ 0,0950 \\ -0,2902 \end{pmatrix}. \tag{138}$$

*Výpočtem dostáváme*

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{\delta}||_1 &= \max(|0,017|, |-0,029|, |0,019|) \\ ||\boldsymbol{r}||_1 &= \max(|-2,5514|, |0,0950|\ |-0,2902|), \end{aligned}$$

*to jest*

$$||\boldsymbol{\delta}||_1 = 0,017, \quad ||\boldsymbol{r}||_1 = 2,5514.$$

# 7. Determinanty

## 7.1. Zavedení pojmu

**Několik úvodních slov.** Uvažujme systém dvou lineárních rovnic o dvou neznámých $x_1, x_2$

$$\begin{aligned} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 &= b_1, \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{139}$$

Jestliže $a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} \neq 0$, potom

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{2,2} - b_2 \cdot a_{1,2}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}}, \quad x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{1,1} - b_1 \cdot a_{2,1}}{a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}} \tag{140}$$

je řešením systému (139), jak se lze přesvědčit dosazením těchto hodnot za $x_1$, $x_2$ do rovnic (139).

Zaveďme si toto označení. Označme $\boldsymbol{C}$ matici

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Potom číslo

$$c_{1,1} \cdot c_{2,2} - c_{1,2} \cdot c_{2,1}$$

nazveme determinantem matice $\boldsymbol{C}$. Označíme jej $det(\boldsymbol{C})$, resp. $|\boldsymbol{C}|$.

Tedy

$$det(\boldsymbol{C}) = det \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix} = c_{1,1} \cdot c_{2,2} - c_{1,2} \cdot c_{2,1}.$$

Řešení (140) systému (139) lze pak pomocí determinantů zapsat takto

$$x_1 = \frac{det\begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}}, \quad x_2 = \frac{det\begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}}. \tag{141}$$

V těchto vzorcích je jmenovatel determinantem matice soustavy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

který je dle předpokladu $\neq 0$. Čitatel ve vyjádření pro $x_1$ je determinantem matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ náhradou jejího prvního sloupce vektorem pravých stran

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Podobně čitatel ve vyjádření $\boldsymbol{x}_2$ je determinantem matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ náhradou jejího druhého sloupce vektorem pravých stran $\boldsymbol{b}$.

V dalším si zavedeme pojem determinantu i pro čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ libovolného řádu $n$. Budeme jej značit shodně jako determinanty matic řádu 2. Determinanty využijeme při řešení systému $n$ lineárních rovnic o $n$ neznámých. Pojem determinantu se využívá i při řešení řady jiných úloh.

Zaveďme si nyní pojem determinantu matice.

**Definice 7.1 (Determinant matice)** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice. Determinantem matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo, označme je $|\boldsymbol{A}|$ nebo $\det(\boldsymbol{A})$, definované takto:*
*Je-li $n = 1$, to jest, jestliže $\boldsymbol{A} = (a_{11})$, potom $|\boldsymbol{A}| = a_{11}$.*
*Jestliže je již definován determinant matice řádu $n-1$, potom determinant matice řádu $n$ definujeme takto:*

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} a_{1,1} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,1}| + \ldots + \\ +(-1)^{1+k} a_{1,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,k}| + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1,n} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,n}|, \qquad (142)$$

*kde $\boldsymbol{A}_{i,j}$ je matice (jak jsme si to již dříve zavedli), která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním jejího $i$–tého řádku a $j$–tého sloupce.*

**Poznámka.** *Je tedy determinant matice funkce definovaná na množině všech čtvercových matic.*

**Příklad 7.1** *Např. je-li $\boldsymbol{A} = (-2)$, potom $|\boldsymbol{A}| = -2$.*

**Příklad 7.2** *Nechť*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}. \qquad (143)$$

*Dokažte, že*

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}. \qquad (144)$$

*Skutečně, podle (142) je*

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot |\boldsymbol{A}_{1,1}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} . |\boldsymbol{A}_{1,2}|. \qquad (145)$$

*Zde* $\boldsymbol{A}_{1,1}$ *je matice, která vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *vypuštěním 1. řádku a 1. sloupce. Je tedy* $\boldsymbol{A}_{1,1} = (a_{2,2})$, $|\boldsymbol{A}_{1,1}| = a_{2,2}$. *Podobně* $\boldsymbol{A}_{1,2}$ *je matice vzniklá z matice* $\boldsymbol{A}$ *vypuštěním jejího prvního řádku a 2. sloupce. Je tedy* $\boldsymbol{A}_{1,2} = (a_{2,1})$, $|\boldsymbol{A}_{1,2}| = a_{2,1}$. *Dosazením do (145) dostáváme*

$$|\boldsymbol{A}| = det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{1,1} \cdot a_{2,2} + (-1)^{1+2} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

*Po úpravě dostaneme*

$$det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

**Poznámka.** Determinant matice 2. řádu lze tedy vypočítat takto: *Od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále.*

**Příklad 7.3** *Vypočítejte hodnotu determinantu matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Řešení.** *Jedná se o výpočet determinantu matice 2. řádu. Podle (144) je* $|\boldsymbol{A}|$ = *„součin prvků na hlavní diagonále − součin prvků na vedlejší diagonále“. Tedy*

$$|\boldsymbol{A}| = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5, \quad |\boldsymbol{A}| = 22.$$

**Příklad 7.4** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice řádu 3*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}. \tag{146}$$

*Potom*

$$|\boldsymbol{A}| = (a_{1,1}\cdot a_{2,2}\cdot a_{3,3}+a_{2,1}\cdot a_{3,2}\cdot a_{1,3}+a_{3,1}\cdot a_{1,2}\cdot a_{2,3}) - -(a_{3,1}\cdot a_{2,2}\cdot a_{1,3}+a_{1,1}\cdot a_{3,2}\cdot a_{2,3}+a_{2,1}\cdot a_{1,2}\cdot a_{3,3}).$$

*Skutečně, podle definice 7.1 je*

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{1+1}\cdot a_{1,1}\cdot|\boldsymbol{A}_{1,1}| + (-1)^{1+2}\cdot a_{1,2}\cdot|\boldsymbol{A}_{1,2}| + (-1)^{1+3}\cdot a_{1,3}\cdot|\boldsymbol{A}_{1,3}|. \tag{147}$$

*Zde $\boldsymbol{A}_{1,1}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 1.sloupce. Je tedy*

$$\boldsymbol{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

*takže podle (144) je*

$$|\boldsymbol{A}_{1,1}| = a_{2,2}\cdot a_{3,3} - a_{2,3}\cdot a_{3,2}. \tag{148}$$

*Matice $\boldsymbol{A}_{1,2}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 2. sloupce. Je tedy*

$$\boldsymbol{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

*takže podle (144) je*

$$|\boldsymbol{A}_{1,2}| = a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}. \tag{149}$$

*Matice $\boldsymbol{A}_{1,3}$ vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vypuštěním 1. řádku a 3. sloupce. Je tedy*

$$\boldsymbol{A}_{1,3} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix},$$

*takže podle (144) je*

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}. \tag{150}$$

*Dosadíme-li do (147) za $|\boldsymbol{A}_{1,1}|$, $|\boldsymbol{A}_{1,2}|$, $|\boldsymbol{A}_{1,3}|$ vypočítané hodnoty (148), (149), (150), dostáváme*

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}) - a_{1,2} \cdot (a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}) + \; + a_{1,3} \cdot (a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1}).$$

*Odtud dostáváme po úpravě hledaný vztah (7.4).*

**Sarusovo pravidlo** Podle příkladu 7.4 se vypočítá hodnota determinantu matice $\boldsymbol{A}$ řádu $n = 3$ vztahem

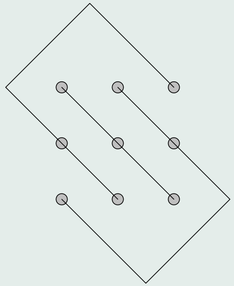
$$|\boldsymbol{A}| = S_1 - S_2, \tag{151}$$

kde

$$\begin{aligned} S_1 &= a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}, \\ S_2 &= a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3} + a_{1,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{2,3} + a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $S_1$ je součtem tří členů, každý z nich je součinem tří prvků matice $\boldsymbol{A}$. Na následujícím obrázku 9 jsou prvky matice vyznačeny kroužky a každá trojice prvků, jejichž součin je členem v $S_1$, je propojena čarou.

$S_2$ je součtem tří členů, každý z nich je součinem tří prvků matice $\boldsymbol{A}$. Na následujícím obrázku 10 jsou prvky matice vyznačeny kroužky a každá trojice prvků, jejichž součin je členem v $S_2$, je propojena čarou.

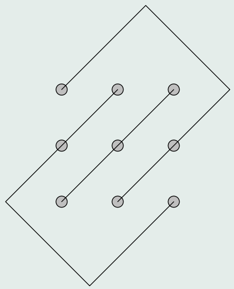


Obrázek 9: Výpočet $S_1$.

**Příklad 7.5** *Vypočítejte hodnotu determinantu matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

*užitím Sarusova pravidla.*



Obrázek 10: Výpočet $S_2$.

**Řešení.** *Hledejme tedy hodnotu determinantu*

$$|\boldsymbol{A}| = \det \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

*Podle Sarusova pravidla dostáváme*

$$|\boldsymbol{A}| = [5 \cdot 4 \cdot 7 + (-2) \cdot (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 6 \cdot 3] - [3 \cdot 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot 6 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 \cdot 7].$$

*Úpravou dostáváme*

$$|\boldsymbol{A}| = [140 - 12 + 36] - [-36 - 60 - 28],$$

*takže* $|\boldsymbol{A}| = 288.$

**Příklad 7.6** *Vypočítejte hodnotu determinantu matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

**Řešení.** *Podle (142) dostáváme*

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} -$$

$$-1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Hodnotu každého z těchto determinantů matic řádu 3 určíme užitím Sarusova pravidla. Dostáváme*

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot 60 - 2 \cdot 20 - 1 \cdot (-20) - 3 \cdot (-20),$$

*takže* $|\boldsymbol{A}| = 100$.

**Poznámka.** Je nutno si uvědomit, že Sarusovo pravidlo bylo odvozeno pro determinanty matic 3. řádu. Pro matice vyšších řádů není obdoba Sarusova pravidla.

V definici 7.1 determinantu matice má její první řádek výjimečné postavení. Ve vzorci (142) vystupují prvky prvního řádku matice explicitně. Zabývejme se otázkou, zda existuje analogický vzorec pro výpočet hodnoty determinantu, ve kterém by explicitně vystupovaly prvky jiného řádku než prvního. K odvození takovéhoto vzorce, uvedeného ve větě 7.1, použijeme několik pomocných vět.

V následující větě si ukážeme výpočet hodnoty determinantu matice podle vzorce, který je analogickým vztahu (142). Místo prvků v prvním řádku v něm vystupují explicitně prvky libovolně zvoleného řádku.

**Věta. 7.1 (Výpočet determinantu)** *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je libovolná matice řádu* $n \geq 0$*. Potom*

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{s+k} \cdot a_{s,k} \cdot |\boldsymbol{A}_{s,k}| \tag{152}$$

*pro každé* $s \in \{1, \ldots n\}$*. Výpočet pomocí tohoto vzorce nazýváme výpočtem determinantu matice* $\boldsymbol{A}$ *rozvojem podle* $s$*–tého řádku.*

**Příklad 7.7** *Vypočítejte hodnotu determinantu matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Řešení.** *Poněvadž ve druhém řádku má matice* $\boldsymbol{A}$ *tři nulové prvky a jenom jeden nenulový prvek, provedeme výpočet determinatu dané matice rozvojem podle druhého řádku. Podle předcházející věty obdržíme*

$$|\boldsymbol{A}| = -0 \cdot |\boldsymbol{A}_{2,1}| + 0 \cdot |\boldsymbol{A}_{2,2}| + 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+0 \cdot |\boldsymbol{A}_{2,4}| = \; = -3 \cdot (-2) = 6.$$

**Vztah mezi determinantem matice $\boldsymbol{A}$ a determinantem matice $\boldsymbol{A}^T$.**

Připomeňme si, že matice $\boldsymbol{A}^T$ je transponovaná k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže každý $i$–tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ je $i$–tým sloupcem matice $\boldsymbol{A}^T$.

Dokažme nyní, platnost této věty.

**Věta. 7.2** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu $n$. Potom*

$$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T). \tag{153}$$

Odtud vyplývá následující věta pro vyčíslení eterminantu rozvojem podle libovolného sloupce.

**Věta. 7.3 (Výpočet determinantu)** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice $n$–tého řádu*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,j} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

*Nechť $j$ je libovolný index jejího sloupce. Potom*

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{k,j}\, |\boldsymbol{A}_{k,j}|. \tag{154}$$

**Důkaz.** Vzorec (154) je výpočet determinantu matice $\boldsymbol{A}^T$ rozvojem podle jejího $j$-tého sloupce.

**Příklad 7.8** *Vypočítejte hodnotu determinantu matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

*rozvojem podle druhého sloupce.*

**Řešení.** *Dostáváme*

$$|\boldsymbol{A}| = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} +$$

$$+8 \cdot (-1)^{3+2} det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

*Po vyčíslení obdržíme* $|\boldsymbol{A}| = 0$.

# 8. Vlastnosti determinantů

V minulé části jsme zavedli pojem determinantu matice řádu $n$ a ukázali jsme způsob jeho výpočtu rozvojem podle jejího libovolného řádku, resp. jejího libovolného sloupce. Tento způsob výpočtu je pro matice vyššího řádu značně náročný na počet prováděných aritmetických operací. (Odhadněte si počet operací pro determinant matice řádu n.) Proto si ukážeme jinou metodu k výpočtu hodnoty determinantu, založenou na následující větě, která vypovídá o vztahu mezi hodnotou determinantu matice $\boldsymbol{A}$ a matice, která z ní vznikne elementárními transformacemi. **Tuto větu si musíte dobře uvědomit!! Determinant matice $\boldsymbol{A}$ a determinant matice, která vznikne z ní elementárními transformacemi, nemusí se sobě rovnat. Záleží na typu transformací!** Ukážeme si metodu, při niž se matice $\boldsymbol{A}$ převádí na horní trojúhelníkovou matici užitím elementárních transformací. Hodnota determinantu z trojúhelníkové matice, jak později uvidíme, je rovna součinu prvků na hlavní diagonále.

**Věta. 8.1** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu $n$. Potom mezi determinantem matice $\boldsymbol{A}$ a determinnty matic, které z ní vzniknou elementárními transformacemi, platí tyto vztahy*

*(H1)* $|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{\alpha}|\mathcal{H}1(i,\alpha)\boldsymbol{A}|$, *pro* $\alpha \neq 0$.
*(H3)* $|\boldsymbol{A}| = -|\mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{A}|$
*(H4)* $|\boldsymbol{A}| = |\mathcal{H}4(i,\alpha,j)\boldsymbol{A}|$
*(H5)* $|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{\beta}|\mathcal{H}5(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{A}|$ *pro* $\beta \neq 0$.

**Příklad 8.1** *Nechť*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{155}$$

*Potom platí*

$$|\boldsymbol{A}| \;=\; -2 = \frac{1}{5} det(\mathcal{H}1(1,5)\boldsymbol{A}) = \frac{1}{5} det \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot (-10) = -2 \tag{156}$$

$$|\boldsymbol{A}| \;=\; -2 = -det(\mathcal{H}3(1,2)\boldsymbol{A}) = -det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \tag{157}$$

$$|\boldsymbol{A}| \;=\; -2 = det(\mathcal{H}4(1,3,2)\boldsymbol{A}) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = -2 \tag{158}$$

$$|\boldsymbol{A}| \;=\; -2 = -\frac{1}{4} det(\mathcal{H}5(1,3,2,4)\boldsymbol{A}) = -\frac{1}{4} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = -2 \tag{159}$$

## Výpočet determinantu matice jejím převodem na horní trojúhelníkovou matici

Napřed si ukažme způsob výpočtu determinantu horní trojúhelníkové matice. V dalších úvahách si ukážeme dva postupy transformace čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ na horní trojúhelníkovou matici užitím elementárních transformací.

**Věta.** **8.2 (Determinant horní trojúhelníkové matice)** *Nechť $\boldsymbol{B}$ je horní trojúhelníková matice řádu $n$.*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{160}$$

*Potom*

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1} \cdot b_{2,2} \cdot \ldots \cdot b_{n,n}. \tag{161}$$

**Důkaz.** Proveďme výpočet hodnoty determinantu této matice rozvojem podle jejího prvního sloupce. Dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = (-1)^{1+1} \cdot b_{1,1} \cdot det \begin{pmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ 0 & b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Hodnotu determinantu takto vzniklé matice určíme opět rozvojem podle prvního sloupce. Dostáváme

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1} \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1)^{1+1} \cdot b_{2,2} \cdot det \begin{pmatrix} b_{3,3} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Tímto způsobem pokračujeme, až po $n$ krocích obdržíme hledaný vzorec (161)

$$|\boldsymbol{B}| = b_{1,1} \cdot b_{2,2} \cdot \ldots \cdot b_{n,n}.$$

**Příklad 8.2** *Vypočítejte hodnotu determinantu matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{162}$$

**Řešení.** *Podle vzorce (161) dostáváme*

$$|\boldsymbol{A}| = 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2 = 320.$$

## Algoritmus výpočtu determinantu matice $\boldsymbol{A}$ převodem na horní trojúhelníkovou matici

Ukažme si nyní algoritmus na výpočet determinantu matice $\boldsymbol{A}$ založené na elementárních transformacích, jimiž se matice $\boldsymbol{A}$ transformuje na horní trojúhelníkovou matici. Tento algoritmus je založen na aplikací transformací $\mathcal{H}3(i,j)\boldsymbol{A}$, $\mathcal{H}4(i,\alpha,j)\boldsymbol{A}$, $\mathcal{H}5(i,\alpha,j,\beta)\boldsymbol{A}$, kde $\beta \neq 0$. Používají se věta (8.1).

Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice řádu $n$. Matici $\boldsymbol{A}$ převedeme elementárními transformacemi na horní schodovitou matici. Jestliže její determinant je nenulový, potom vzniklá schodovitá matice je horní trojúhelníkovou maticí.

Poněvadž při některých elementárních trasformacích se hodnota determinantu dané matice a determinantu matice z ní vzniklé transformací mění, zavedeme si pomocnou proměnnou $\gamma$, v níž budeme sledovat tuto změnu. Označme $D$ hodnotu determinantu matice $\boldsymbol{A}$ a položme $\gamma = 1$. Je tedy D $= \gamma \cdot |\boldsymbol{A}|$ .

Následující výpočet probíhá postupně pro $i = 1, \ldots, n-1$.

**Popišme nyní algoritmus pro určité $i$.**

$1^0$ Nechť $s_i$ je nejmenší index nenulového sloupce v submatici matice $\boldsymbol{A}$ vytvořené řádky $i, \ldots, n$ a všemi sloupci.Tedy mezi prvky

$$a_{k,s_i}, k = i, \ldots, n$$

je alespoň jeden nenulový prvek.

Je-li $s_i > i$, je hodnota D determanantu dané matice rovna 0; v tomto případě je výpočet ukončen. Nechť $s_i = i$. Zvolme nyní $p$ pro něž je $a_{p,i} \neq 0$.

$2^0$ Je-li $p = i$ postupujeme k bodu $4^0$, v případě, že $p \neq i$, postupujeme k bodu $3^0$.

$3^0$ Vyměníme navzájem $i-$tý a $p-$tý řádek matice $\boldsymbol{A}$. To znamená, položme $\boldsymbol{A} := \mathcal{H}3(i,p)\boldsymbol{A}$. Zároveň položíme $\gamma := -\gamma$. Pro takto vzniklou matici $\boldsymbol{A}$ tedy platí $D = \gamma \cdot |A|$. Přejdeme k bodu $4^0$.

$4^0$ $i-$tý řádek matice $\boldsymbol{A}$ nazveme hlavním řádkem. Pomocí tohoto řádku budeme eliminovat nenulové prvky $a_{k,i}, k = i+1, \ldots, n$, užitím jedné z transformací $\mathcal{H}4(i,\alpha,k)\boldsymbol{A}$, $\mathcal{H}5(i,\alpha,k,\beta)\boldsymbol{A}$.

Je-li $a_{k,i} \neq 0$, můžeme provést eliminaci tohoto prvku a operací (**??**), nebo (**??**)

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(i, -\frac{a_{k,i}}{a_{i,i}}, k)\boldsymbol{A} \text{ nebo operacemi} \tag{163}$$

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}5(i, -a_{i,k}, k, a_{i,i})\boldsymbol{A} \quad \text{a zároveň položit} \quad \gamma := \frac{1}{a_{i,i}} \cdot \gamma. \tag{164}$$

Uveďme si násleující příklad.

**Příklad 8.3** *Vypočítejte hodnotu determinantu matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{165}$$

*užitím její transformace na horní trojúhelníkovou matici.*

**Řešení.**

*Matice $\boldsymbol{A}$ je řádu $n = 4$. Budeme aplikovat nahoře uvedený algoritmus postupně pro $i = 1, 2, 3$.*

*Položme:* **i=1**

$1^0$ *V submatici matice $\boldsymbol{A}$, vytvořné řádky $1, \ldots, 4$ a všemi sloupci, je první sloupec nenulový: je tedy $s_1 = 1$.*

$2^0$ *Poněvadž $a_{1,1} \neq 0$, volíme volíme $p = 1$ a postupujeme k bodu $4^0$.*

$4^0$ *první řádek matice $\boldsymbol{A}$ je hlavním řádkem. Pomocí tohoto řádku budeme eliminovat ty prvky z prvků $a_{2,1}, a_{3,1}, a_{4,1}$, které jsou nenulové*

- *Prvek $a_{2,1}$ eliminujeme užitím transformace*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(1, -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}, 2)\boldsymbol{A}. \tag{166}$$

*To znamená, že první řádek matice $\boldsymbol{A}$ násobíme číslem $(-\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}})$, to jest číslem $(-\frac{2}{1})$ a připočteme k druhému řádku matice $\boldsymbol{A}$. Druhý řádek matice $\boldsymbol{A}$ tedy transformací (166) změníme na*

$$\boldsymbol{A}(2,:) := -\frac{2}{1}(1, 2, 4, 0) + (2, 1, 4, 5) = (0, -3, -4, 5).$$

*Ostatní řádky se transformací nemění. Transformací (166) tedy dostáváme*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 8 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

*Touto tnasformací se hodnota determinantu matice* $\boldsymbol{A}$ *nemění, takže* $D = \gamma \cdot |A|$.

- *Prvek* $a_{3,1}$ *eliminujeme užitím transformace*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(1, -\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}, 3)\boldsymbol{A}. \tag{167}$$

*To znamená, že první řádek matice* $\boldsymbol{A}$ *násobíme číslem* $(-\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}})$, *to jest číslem* $(-\frac{8}{1})$ *a připočteme k třetímu řádku matice* $\boldsymbol{A}$. *Třetí řádek matice* $\boldsymbol{A}$ *tedy změníme na*

$$\boldsymbol{A}(3,:) := -\frac{8}{1}(1,2,4,0) + (8,2,4,3) = (0,-14,-28,3).$$

*Ostatní řádky se transformací nemění. Transformací (167) tedy dostáváme*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -14 & -28 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

*Touto tnasformací se hodnota determinantu matice* $\boldsymbol{A}$ *nemění, takže* $D = \gamma \cdot |A|$

- *Prvek* $a_{4,1}$ *eliminujeme užitím transformace*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(1, -\frac{a_{4,1}}{a_{1,1}}, 4)\boldsymbol{A}. \tag{168}$$

*To znamená, že první řádek matice* $\boldsymbol{A}$ *násobíme číslem* $(-\frac{a_{4,1}}{a_{1,1}})$*, to jest číslem* $(-\frac{1}{1})$ *a připočteme ke čtvrtému řádku matice* $\boldsymbol{A}$*. Čtvrtý řádek matice* $\boldsymbol{A}$ *tedy změníme na*

$$\boldsymbol{A}(4,:) := -\frac{1}{1}(1,2,4,0) + (1,2,0,4) = (0,0,-4,4)$$

*Ostatní řádky se transformací nemění.*
*Transformací (169) tedy dostáváme*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -14 & -28 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

*Touto tnasformací se hodnota determinantu matice* $\boldsymbol{A}$ *nemění, takže* $D = \gamma \cdot |A|$.

*Položme:* **i=2**

$1^0$ *V submatici matice* $\boldsymbol{A}$*, vytvořné řádky* $2, \ldots, 4$ *a všemi sloupci, je druhý sloupec nenulový: je tedy* $s_2 = 2$.

$2^0$ *Poněvadž* $a_{2,2} \neq 0$, *volíme volíme* $p = 2$ *a postupujeme k bodu* $4^0$.

$4^0$ *druhý řádek matice* $\boldsymbol{A}$ *je hlavním řádkem. Pomocí tohoto řádku budeme eliminovat ty prvky z prvků* $a_{3,2}, a_{4,2}$, *které jsou nenulové*

- *Prvek* $a_{3,2}$ *eliminujeme užitím transformace*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(2, -\frac{a_{3,2}}{a_{2,2}}, 3)\boldsymbol{A}. \tag{169}$$

*To znamená, že druhý řádek matice* $\boldsymbol{A}$ *násobíme číslem* $(-\frac{a_{3,2}}{a_{2,2}})$, *to jest číslem* $(-\frac{-14}{-3})$ *a připočteme k třetímu řádku matice* $\boldsymbol{A}$.*Třetí řádek matice* $\boldsymbol{A}$ *tedy změníme na*

$$\boldsymbol{A}(3,:) := -\frac{-14}{-3}(0,-3,-4,5) + (0,-14,-28,3) = (0,0,-\frac{28}{3},-\frac{61}{3}).$$

*Ostatní řádky se transformací (169) nemění. Transformací (169) tedy dostáváme*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{3} & -\frac{61}{3} \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

*Touto tnasformací se hodnota determinantu matice* $\boldsymbol{A}$ *nemění, takže* $D = \gamma \cdot |A|$.

- *Prvek* $a_{4,2} = 0$, *takže eleiminace se neprovádí*

*Položme:* **i=3**

$1^0$ *V submatici matice $\boldsymbol{A}$, vytvořné řádky $2, \ldots, 4$ a všemi sloupci, je třetí sloupec nenulový: je tedy $s_3 = 3$.*

$2^0$ *Poněvadž $a_{3,3} \neq 0$, volíme volíme $p = 3$ a postupujeme k bodu $4^0$.*

$4^0$ *třetí řádek matice $\boldsymbol{A}$ je hlavním řádkem. Pomocí tohoto řádku budeme eliminovat prvek , $a_{4,3}$, pokud je nenulový.*

- *Prvek $a_{4,3}$ eliminujeme užitím transformace*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}4(3, -\frac{a_{4,3}}{a_{3,3}}, 4)\boldsymbol{A}. \tag{170}$$

*To znamená, že třetí řádek matice $\boldsymbol{A}$ násobíme číslem $(-\frac{a_{4,3}}{a_{3,3}})$, to jest číslem $(-\frac{-4}{-\frac{28}{3}})$ a připočteme ke čtvrtému řádku matice $\boldsymbol{A}$. Čtvrtý řádek matice $\boldsymbol{A}$ tedy změníme na*

$$\boldsymbol{A}(4,:) := -\frac{3}{7}(0, 0, \frac{-28}{3} - \frac{-61}{3}) + (0, 0, -4, 4) + (0, 0, 0, \frac{89}{7}).$$

*Ostatní řádky se transformací nemění. Transformací (170) tedy dostáváme*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{3} & -\frac{61}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{89}{7} \end{pmatrix}$$

*Touto tnasformací se hodnota determinantu matice $\boldsymbol{A}$ nemění, takže $D = \gamma \cdot |A|$.*

*Hledaná hodnota determinantu D je rovna součinu čísla $\gamma$ (v našem případě je $\gamma = 1$) se součinem prvků výsledné horní trojúhelníkové matice, tj.*

$$D = 1 \cdot (-3) \cdot (-\frac{28}{3}) \cdot \frac{89}{7} \quad tj.\ D = 356$$

**Příklad 8.4** *V tomto příkladě použijeme k výpočtu hodnoty determinantu matice $\boldsymbol{A}$ stejný algoritmus jako v minulém příkladě, avšak při eliminaccí prvků budeme používat též elementární transformace $\mathcal{H}5(i, \alpha, j, \beta)$ pro $\beta \neq 0$.*

***Příklad 8.5*** *Vypočítejte hodnotu determinantu matice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Řešení.** *Položme $D = det(\boldsymbol{A}), \gamma = 1$. Veličina $\gamma$ slouží ke sledování vztahu mezi hodnotou D determinantu zadané matice $\boldsymbol{A}$ a matic, které vzniknou postupnými transformacemi matice $\boldsymbol{A}$. Na začátku zřejmě platí $D = \gamma \cdot \boldsymbol{A}$.*

*Položme:* **i=1**

$1^0$ *V submatici matice $\boldsymbol{A}$, vytvořené řádky $1, \ldots, 4$ a všemi sloupci matice $\boldsymbol{A}$, (tj. v našemm případě v matici $\boldsymbol{A}$), určíme nenulový sloupec s nejmenším indexem. Je to první sloupec, položíme tedy $s_1 = 1$, takže $s_i = i$.*

$2^0$ *Poněvadž* $a_{1,1} = 0$, *postupujeme k bodu* $3^0$.

$3^0$ *Zvolme* $p \in \{2,3,4\}$ *tak, aby* $a_{p,1} \neq 0$. *Nechť je to* $p = 3$. *Proveďme tedy transformaci*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}3(1,3). \tag{171}$$

*Poněvadž vzájemnou výměnou dvou řádků matice hodnota determinantu změní znaménko, položme* $\gamma := -\gamma$. *Je tedy* $D = -det(\boldsymbol{A})$, *kde* $\boldsymbol{A}$ *je matice určena transformací (171). Po této transformacci je*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$4^0$ *Řádek „1“ je hlavním řádkem. Pomocí tohoto řádku budeme eliminovat nenulové prvky z prvků* $a_{2,1}, a_{3,1}, a_{4,1}$.

- *Prvek* $a_{2,1} = 2$, *jeho eliminaci provedeme transformací*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}5(1,2,2,3)\boldsymbol{A} \tag{172}$$

*Touto transformací dostáváme matici*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Položíme-li* $\gamma := \frac{1}{3} \cdot \gamma$, *platí* $D = \gamma \cdot det(\boldsymbol{A})$, *kde* $A$ *je matice po provedení transformace (172).*

- *Prvky* $a_{3,1}, a_{3,2}$ *jsou rovny „0“, takže se další eliminace neprovádějí.*

*Položme:* **i=2**

$1^0$ *V submatici, vytvořené z řádků* $2, 3, 4$ *a všemi sloupci matice* $\boldsymbol{A}$, *určíme nenulový sloupec s nejmenším indexem. Je to druhý sloupec; položíme tedy* $s_2 = 2$, *takže* $s_i = i$.

$2^0$ *Poněvadž* $a_{2,2} \neq 0$, *postupujeme k bodu* $4^0$.

$4^0$ *Řádek „2“ je hlavním řádkem. Pomocí tohoto řádku budeme eliminovat nenulové prvky z prvků* $a_{3,2}, a_{4,2}$.

- *Prvek* $a_{3,2} = 2$, *jeho eliminaci provedeme transformací*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}5(2, -2, 3, 9)\boldsymbol{A} \tag{173}$$

*Dostáváme matici*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Položíme-li* $\gamma := \frac{1}{9} \cdot \gamma$, *platí* $D = \gamma \cdot det(\boldsymbol{A})$, *kde* $A$ *je matice po provedení transformace (173).*

- *Prvek* $a_{4,2}$ *eliminujeme transformací*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}5(2, -3, 4, 9)\boldsymbol{A} \tag{174}$$

*dostáváme matici*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

*Položíme-li* $\gamma := \frac{1}{9} \cdot \gamma$, *platí* $D = \gamma \cdot det(\boldsymbol{A})$, *kde* $A$ *je matice po provedení transformace (175).*

*Položme:* **i=3**

$1^0$ *V submatici* ${}^3\boldsymbol{A}$, *to jest v matici, která je vytvořena z řádků* $3, 4$ *matice* $\boldsymbol{A}$, *určíme nenulový sloupec s nejmenším indexem. Je to třetí sloupec, položíme tedy* $s_3 = 3$, *takže* $s_i = i$.

$2^0$ *Poněvadž* $a_{3,3} \neq 0$, *postupujeme k bodu* $4^0$.

$4^0$ *Řádek „3“ je hlavním řádkem. Pomocí tohoto řádku budeme eliminovat nenulový prvek* $a_{4,3}$.

- *Prvek $a_{4,3} = 2$, eliminujeme transformací*

$$\boldsymbol{A} := \mathcal{H}5(3,3,4,1)\boldsymbol{A} \tag{175}$$

*Touto transformací dostáváme matici*

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

*Položíme-li $\gamma := 1 \cdot \gamma$, platí*

$$D = \gamma \cdot det(\boldsymbol{A}),$$

*kde $\boldsymbol{A}$ je matice po provedení transformace (175).*

*Poněvadž matice $\boldsymbol{A}$ je horní trojúhelníkova matice, je determinant z této matice roven součinu prvků v hlavní diagonále. Je tedy*

$$D = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot (-3) \cdot (9) \cdot (1) \cdot (36) = 4$$

## 8.1. Použití determinantů

### Přímá metoda řešení systému lineárních rovnic.

Již dříve jsme se seznámili s pojmem systému $m$ lineárních algebraických rovnic o $n$ neznámých

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{176}$$

a s pojmem jeho řešení. Ukážeme si nyní, jak se toto řešení dá nalézt v případě, že $\boldsymbol{A}$ je čtvercová regulární matice. V další kapitole se budeme zabývat s pojmem řešení obecněji a uvedeme si několik metod vhodných k jeho nalezení. V této části uvedeme pouze nalezení řešení pomocí determinantů. *Tato metoda má sice velký význam z teoretického hlediska, avšak numericky je použitelná pouze pro řešení systému rovnic o relativně malém počtu neznámých.*

## 8.2. Cramerovo pravidlo

**Věta. 8.3 ((Cramerovo pravidlo))** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu $n$, $\boldsymbol{b}$ je $n$–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je hledaný $n$–rozměrný vektor. Označme*

$$\boldsymbol{B}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

*matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že její $i$–tý sloupec nahradíme vektorem pravých stran $\boldsymbol{b}$. Potom systém lineárních rovnic*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{177}$$

*má právě jedno řešení $\boldsymbol{x}$, pro něž platí*

$$x_i = \frac{|\boldsymbol{B}_i|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{178}$$

**Důkaz.** Dokažme především, že je-li vektor $\boldsymbol{x}$ řešením systému (177), potom platí (178). Poněvadž vektor $\boldsymbol{x}$ je řešením (177), platí

$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,j}x_j + \ldots + a_{k,n}x_n = b_k, \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{179}$$

Zvolme $i,\ 1 \le i \le n$. Dokážeme, že pro $x_i$ platí (178). Vynásobením (179) výrazem $(-1)^{k+i} \cdot |\boldsymbol{A}_{k,i}|$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot a_{k,j} \cdot |\boldsymbol{A}_{k,i}| \cdot x_j = b_k \cdot (-1)^{k+i} |\boldsymbol{A}_{k,i}|. \tag{180}$$

Sečtením rovnic (180) pro $k = 1, \ldots, n$, dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} (-1)^{k+i} |\boldsymbol{A}_{k,i}| = \sum_{k=1}^{n} b_k (-1)^{k+i} |\boldsymbol{A}_{k,i}|. \tag{181}$$

Použitím věty **??** odtud dostáváme

$$x_i \cdot |A| = |\boldsymbol{B}_i / R,$$

odkud plyne (178).
Dokažme nyní, že jestliže $\boldsymbol{x}$ je vektor o složkách

$$x_k = \frac{|\boldsymbol{B}_k|}{|\boldsymbol{A}|}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{182}$$

potom $\boldsymbol{x}$ je řešením systému (177). Nechť $j$ je jedno z čísel $1, \ldots, n$. Dosazením těchto hodnot $x_k$ do levé strany $j$–té rovnice obdržíme veličinu, kterou označíme $L$. Dostáváme

$$L = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \frac{|\boldsymbol{B}_k|}{|\boldsymbol{A}|}.$$

Rozvojem determinantu $|\boldsymbol{B}_k|$ podle $k$–tého sloupce dostáváme odtud

$$L = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} b_i |\boldsymbol{A}_{i,k}|.$$

Provedením úpravy pak dostáváme

$$L = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-j} b_i \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{j,k} |\boldsymbol{A}_{i,k}|.$$

S ohledem na (**??**) odtud vyplývá

$$\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k = b_j,$$

takže vektor $\boldsymbol{x}$ vyhovuje $j$–té rovnici ($j = 1, \ldots, n$.)

**Příklad 8.6** *Užitím Cramerova pravidla řešte následující systém lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - x_3 & = & 1 \end{array} \tag{183}$$

**Řešení.** *Označíme-li* $\boldsymbol{A}$ *matici soustavy tohoto systému,* $\boldsymbol{b}$ *vektor pravých stran a* $\boldsymbol{x}$ *vektor neznámých, je*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{184}$$

*Výpočtem zjistíme, že* $|\boldsymbol{A}| = 6$*. Je tedy matice* $\boldsymbol{A}$ *regulární a daný systém lze řešit Cramerovým pravidlem.*
*Matici* $\boldsymbol{B}_1$ *dostaneme tak, že první sloupec matice* $\boldsymbol{A}$ *nahradíme vektorem* $\boldsymbol{b}$*. Dostáváme tak matici*

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_1| = -6.$$

*Matici* $\boldsymbol{B}_2$ *dostaneme tak, že druhý sloupec matice* $\boldsymbol{A}$ *nahradíme vektorem* $\boldsymbol{b}$*. Dostáváme tak matici*

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_2| = 6.$$

*Matici* $\boldsymbol{B}_3$ *dostaneme z matice* $\boldsymbol{A}$ *tak, že její třetí sloupec nahradíme vektorem* $\boldsymbol{b}$*. Dostaneme tak matici*

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a determinant} \quad |\boldsymbol{B}_3| = 12.$$

*Řešením systému (183) je tedy*

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{B}_1|}{6} = \frac{-6}{6} = -1,$$

$$x_2 = \frac{|\boldsymbol{B}_2|}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

$$x_3 = \frac{|\boldsymbol{B}_3|}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

# 9. Přímý výpočet inverzní matice pomocí determinantů

V dřívějším pojednání jsme si zavedli pojem inverzní matice k dané matici $\boldsymbol{A}$. Řekli jsme, že matice $\boldsymbol{B}$ je inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, jestliže

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Dá se dokázat, že matice $\boldsymbol{B}$ je inverzní k *regulární* čtvercové matici $\boldsymbol{A}$, jestliže platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}.$$

V tomto případě není tedy nutno požadovat splnění požadavku

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Nechť tedy matice $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu $n$. Hledejme čtvercovou matici $\boldsymbol{B}$ tak, že

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}. \tag{185}$$

Zvolme $i \in \{1, \ldots, n\}$. Uvažujme $i$–tý sloupec $\boldsymbol{B}(:, i)$ matice $\boldsymbol{B}$ a $i$–tý sloupec $\boldsymbol{E}(:, i)$ matice $\boldsymbol{E}$, to jest sloupcové vektory

$$\boldsymbol{B}(:,\, i) = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ b_{2,i} \\ \vdots \\ b_{i-1,i} \\ b_{i,i} \\ b_{i+1,i} \\ \vdots \\ b_{n,i} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E}(:,\, i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots i\text{–tý řádek}$$

Ze vztahu (185) vyplývá

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(:, i) = \boldsymbol{E}(:,\, i). \tag{186}$$

Tento systém rovnic řešme užitím Cramerova pravidla. Dostáváme

$$b_{j,\,i} := \frac{|\boldsymbol{C}_j|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad j = 1,\, \ldots,\, n, \tag{187}$$

kde $\boldsymbol{C}_j$ je matice, která vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ nahrazením jejího $j$–tého sloupce vektorem $\boldsymbol{E}(:,\, i)$. Determinant $|\boldsymbol{C}_j|$ vyčíslíme rozvojem podle $j$–tého sloupce. Jediný nenulový prvek v tomto sloupci je číslo 1 v $i$–tém řádku.Tedy

$$|\boldsymbol{C}_j| = (-1)^{i+j} \cdot |\boldsymbol{A}_{i,j}|. \tag{188}$$

Z (187), (188) vyplývá

$$b_{j,i} := (-1)^{i+j} \cdot \frac{|\boldsymbol{A}_{i,j}|}{|\boldsymbol{A}|}. \tag{189}$$

Z (189) pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ dostáváme matici $\boldsymbol{B}$. Vypočítejme nyní $\boldsymbol{BA}$. Užitím (**??**) dostáváme

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}.$$

Je tedy matice $\boldsymbol{B}$ maticí inverzní k matici $\boldsymbol{A}$.

Dosažený výsledek můžeme shrnout do následující věty.

**Věta. 9.1 (Výpočet inverzní matice)** *Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu $n$. Potom k matici $\boldsymbol{A}$ existuje právě jedna inverzní matice, označme ji $\boldsymbol{B}$. Její prvek $b_{i,j}$ se vypočítá podle vztahu*

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{|\boldsymbol{A}_{j,i}|}{|\boldsymbol{A}|} \qquad \textit{pro } i, j = 1, \ldots n. \tag{190}$$

**Poznámka.** Všimněte si pořadí indexů $i, j$ u $b_{i,j}$, $\boldsymbol{A}_{j,i}$ v (190)!

**Příklad 9.1** *K matici $\boldsymbol{A}$ určete matici inverzní.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

**Řešení.** *Výpočtem dostáváme*

$$|A| = -5$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,1}| = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -1, \quad |\boldsymbol{A}_{1,2}| = det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -18,$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = -10, \quad |\boldsymbol{A}_{2,1}| = det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -2,$$

$$|\boldsymbol{A}_{2,2}| = det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -11, \quad |\boldsymbol{A}_{2,3}| = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 5,$$

$$|\boldsymbol{A}_{1,3}| = det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \quad |\boldsymbol{A}_{2,3}| = det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 10,$$

$$|\boldsymbol{A}_{3,3}| = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 5.$$

*Tedy podle věty 9.1 dostáváme*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{|\boldsymbol{A}_{1,1}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{-|\boldsymbol{A}_{2,1}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{|\boldsymbol{A}_{3,1}|}{|\boldsymbol{A}|} \\ \frac{-|\boldsymbol{A}_{1,2}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{|\boldsymbol{A}_{2,2}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{-|\boldsymbol{A}_{3,2}|}{|\boldsymbol{A}|} \\ \frac{|\boldsymbol{A}_{1,3}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{-|\boldsymbol{A}_{2,3}|}{|\boldsymbol{A}|} & \frac{|\boldsymbol{A}_{3,3}|}{|\boldsymbol{A}|} \end{pmatrix}.$$

*Dosazením vypočítaných hodnot za jednotlivé determinanty dostáváme*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -18/5 & 11/5 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Zkoušku správnost výpočtu provedeme výpočtem* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$. *Zjistíme, že oba tyto součiny jsou rovny matici* $\boldsymbol{E}$.

# 10. Úlohy k procvičení

Vyslovte

1. Definice determinantu matice.
2. Pravidla pro výpočet determinantů matic řádu 2, 3.
3. Věta o výpočtu determinantu rozvojem podle libovolného řádku, resp. libovolného sloupce matice.
4. Vztah mezi hodností matice $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{B}$, která z ní vznikla elementárními transformacemi.
5. Výpočet hodnoty determinantu matice její transformací na horní trojúhelníkovou matici.
6. Vztah mezi hodnotami determinantu z matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}^T$.
7. Cramerovo pravidlo na řešení systému lineárních rovnic.
8. Hledání inverzní matice.
9. Vztah mezi hodností matic a determinanty jejich submatic.

**Úlohy**

$1^0$ Vypočítejte hodnoty determinantů následujících matic

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$[|\boldsymbol{A}| = 6,\ |\boldsymbol{B}| = -2,\ |\boldsymbol{C}| = 0.]$

$2^0$ Vypočítejte hodnoty determinantů následujících matic užitím Sarusova pravidla.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$[|\boldsymbol{A}| = 112,\ |\boldsymbol{B}| = -17,\ |\boldsymbol{C}| = 0.]$$

$3^0$ Určete vztah mezi hodnotami determinantů matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, aniž byste počítali jejich hodnoty. Proveďte zdůvodnění.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

[$|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|$. Matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z matice $\boldsymbol{A}$ postupnými výměnami těchto řádků: řádek 1 a řádek 3; řádek 2 a řádek 3; řádek 3 a řádek 4. Celkem třemi výměnami dvojic řádků. Je tedy $|\boldsymbol{B}| = (-1)^3 \cdot |\boldsymbol{A}|$, takže $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|$.]

$4^0$ Vypočítejte hodnoty determinantů následujících matic transformací na horní trojúhelníkovou matici.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[|\boldsymbol{A}| = -8,\ |\boldsymbol{B}| = 178.]$$

$5^0$ Užitím Cramerova pravidla řešte následující systémy lineárních rovnic a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -17 \\ 4 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

[a) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, b) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.]

$6^0$ K dané matici $\boldsymbol{A}$ nalezněte matici inverzní a proveďte zkoušku správnosti výpočtu.

$$\text{a)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$[a) \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \text{ b)} \begin{pmatrix} -\frac{23}{105} & \frac{5}{21} & \frac{4}{35} & -\frac{4}{105} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{37}{105} & \frac{2}{21} & -\frac{11}{35} & \frac{11}{105} \\ \frac{6}{35} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{35} & -\frac{2}{35} \end{pmatrix}.]$$

# 11. Systémy lineárních rovnic

Tato kapitola je věnována problematice existence a metod řešení systému lineárních rovnic.

## 11.1. Ekvivalentní systémy rovnic

**Několik úvodních slov.** Dříve než přikročíte ke studiu této kapitoly je nutné, abyste měli dokonale zvládnuté základní pojmy z lineárních rovnic uvedené v kapitole **??**.

V této kapitole se budeme zabývat především problematikou existence a jednoznačnosti řešení systému $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých a popisu některých metod na jejich řešení.

Seznámili jsme se již s **Cramerovým pravidlem** (věta 8.3) na řešení systému lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, které lze použít v případě, že jeho matice soustavy $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice. V tomto případě má systém právě jedno řešení. Určí se pomocí determinantů. *Tato metoda se však nehodí k řešení systému lineárních rovnic pro větší počet neznámých, neboť k jeho řešení je nutno provést velký počet aritmetických operací.*

Dále jsme se seznámili s řešením systému lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ s regulární čtvercovou maticí soustavy užitím inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$. Výpočet inverzní matice je na počet operací náročnější, než je řešení jednoho systému rovnic. Používáme ji jenom tehdy, jestliže inverzní matici známe, nebo ji potřebujeme i k jiným účelům.

Popíšeme především metodu, založenou na pojmu **ekvivalentnosti dvou systémů lineárních rovnic.** Tato metoda se dá použít i v případě, že matice soustavy $\boldsymbol{A}$ není regulární čtvercovou maticí. Uvedená metoda nám pomůže též vyslovit větu o řešitelnosti a jednoznačnosti řešení systému lineárních rovnic.

Dva systémy lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

nazveme **ekvivalentními**, a budeme psát

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

jestliže každý vektor $\boldsymbol{x}$, který je řešením systému rovnic $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, je i řešením systému $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ a naopak, každé řešení $\boldsymbol{x}$ systému rovnic $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ je i řešením systému rovnic $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Při řešení systému rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ půjde o nalezení takového ekvivalentního systému rovnic, který je možno snadno posoudit. To znamená určit, zda tento ekvivalentní systém má nebo nemá řešení a v případě, že má řešení, toto řešení nalézt. Takovým vhodným ekvivalentním systémem je systém, jehož matice soustavy je horní schodovitá matice.

## 11.2. Převod na systém s horní schodovitou maticí soustavy

Uvažujme systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{191}$$

Ukažme si platnost následujících pravidel **P1, P2, P3, P4, P5**.

**P1.** Nechť $\alpha$ je libovolné reálné číslo $\neq 0$. Uvažujme libovolně zvolenou $i$–tou rovnici systému (191)

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i. \tag{192}$$

Je evidentní, že vektor $\boldsymbol{x}$ vyhovuje rovnici (192), když a jenom když vyhovuje rovnici

$$\alpha \cdot (a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots a_{i,n} \cdot x_n) = \alpha \cdot b_i, \quad \text{pro každé} \quad \alpha \neq 0. \tag{193}$$

*Nahradíme-li tedy v systému (191) některou rovnici jejím násobkem číslem $\alpha$, $\alpha \neq 0$, je vzniklý systém ekvivalentní s daným systémem.*

**P2**. Nechť

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i, \tag{194}$$
$$a_{j,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n = b_j, \tag{195}$$

jsou dvě libovolné rovnice systému rovnic (191). Je opět evidenetní, že každý vektor $\boldsymbol{x}$ vyhovuje oběma těmto rovnicím, když a jenom když vyhovuje rovnicím

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i, \tag{196}$$
$$(a_{j,1} + \alpha a_{i,1}) \cdot x_1 + \ldots + (a_{j,n} + \alpha a_{i,n}) \cdot x_n = b_j + \alpha b_i, \tag{197}$$

kde $\alpha$ je libovolné reálné číslo.

*Přičteme-li tedy k některé rovnici systému* (191) *$\alpha$-násobek jiné rovnice, $\alpha \in \mathbb{R}$, vznikne systém ekvivalentní se systémem* (191).

**P3.** *Vypustíme-li ze systému rovnic* (191) *rovnici tvaru*

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

*obdržíme systém rovnic, který je ekvivalentní se systémem rovnic* (191), neboť každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_n$ této rovnici vyhovuje. Tato rovnice tedy nedává žádné omezení pro řešení systému rovnic (191).

**P4**. *Jestliže v systému rovnic* (191) *je některá rovnice tvaru*

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = c, \quad c \neq 0,$$

*nemá uvažovaný systém žádné řešení*, neboť této rovnici nevyhovuje žádný vektor.

Tyto úvahy můžeme shrnout následovně.

**Věta. 11.1** *Nechť jsou dány dva systémy lineárních rovnic*

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

*o neznámých* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Nechť systém* $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ *vznikl ze systému* $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *těmito úkony:*
H1. *Libovolnou rovnici systému jsme násobili číslem různým od nuly.*
H2. *K libovolné rovnici jsme přičetli jinou rovnici systému.*
H3. *Vyměnili jsme navzájem dvě rovnice systému.*
H4. *K některé rovnice jsme připočetli libovolný násobek jiné rovnice.*
H5. *K nenulovému násobku jedné rovnice jsme připočetli libovolný násobek jiné rovnice.*
*Potom systémy* $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ *jsou navzájem ekvivalentní.*

**Poznámka.**

1. Jestliže v systému rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ vypustíme rovnice tvaru

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

obdržíme systém rovnic s ním ekvivalentní.
2. Systém rovnic, v němž je rovnice tvaru

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = konst, \quad \text{kde} \quad konst \neq 0,$$

nemá řešení.

Abychom si usnadnili zápis při operacích s rovnicemi, budeme pracovat jenom s koeficienty rovnic a s jejich pravými stranami. Abychom to precizovali, zaveďme si zobrazení $\mathcal{T}$, jímž se *ke každému systému lineárních rovnic* $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *přiřadí rozšířená matice tohoto systému rovnic* $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, to jest

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}).$$

Lineární *rovnici daného systému*

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i$$

*odpovídá* v tomto zobrazení *$i$-tý řádek rozšířené matice* $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, *to jest vektor*

$$(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}|b_i).$$

Lehce nahlédneme, že zobrazení $\mathcal{T}$ je prosté zobrazení množiny systémů $m$ lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ o neznámých $x_1, \ldots, x_n$ na prostor matic $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$. Existuje tedy k němu inverzní zobrazení $\mathcal{T}^{-1}$.

Ukážme dále, že *zobrazení* $\mathcal{T}$ *zachovává jak sečítání dvou rovnic, tak i násobení rovnice číslem.*

Uvažujme dvě rovnice

$$\begin{aligned} a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n &= b_i, \\ a_{j,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n &= b_j, \end{aligned}$$

a reálné číslo $\alpha \neq 0$. Podle definice v zobrazení $\mathcal{T}$ odpovídá rovnici

$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n = b_i \tag{198}$$

vektor

$$(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}|b_i) \tag{199}$$

a rovnici

$$a_{j,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{j,n} \cdot x_n = b_j \tag{200}$$

odpovídá vektor

$$(a_{j,1},\ \ldots,\ a_{j,n} \mid b_j). \tag{201}$$

Sečtením uvažovaných rovnic dostáváme rovnici

$$(a_{i,1} + a_{j,1})x_1 + \ldots + (a_{i,n} + a_{j,n})x_n = b_i + b_j. \tag{202}$$

Podle definice zobrazení $\mathcal{T}$ odpovídá této rovnici vektor

$$((a_{i,1} + a_{j,1}), \ldots, (a_{i,n} + a_{j,n}) \mid (b_i + b_j)). \tag{203}$$

Je zřejmé, že v inverzním zobrazeni $\mathcal{T}^{-1}$ odpovídá vektoru (203) rovnice (202).

Dále rovnici

$$\alpha \cdot (a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n) = \alpha \cdot b_i, \quad \alpha \neq 0 \tag{204}$$

odpovídá v zobrazení $\mathcal{T}$ vektor

$$(\alpha \cdot a_{i,1},\ \ldots,\ \alpha \cdot a_{i,n} \mid \alpha \cdot b_i). \tag{205}$$

Je zřejmé, že v inverzním zobrazeni $\mathcal{T}^{-1}$ odpovídá vektoru (205) rovnice (204).

Předpokládejme, že jsme k systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

v zobrazení $\mathcal{T}$ přiřadili rozšířenou matici soustavy tohoto systému rovnic

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}).$$

Potom úkonům $\mathrm{H1}, \mathrm{H2}, \mathrm{H3}, \mathrm{H4}$ s rovnicemi systému

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

, uvedených ve větě 11.1, odpovídají elementární transformace $\mathcal{H}1(i,\alpha)$, $\mathcal{H}2(i,j)$, $\widetilde{\mathcal{H}}3(i,j)$, $\mathcal{H}4(i,\alpha,j,\beta)$ aplikované na matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.

Větu 11.1 můžeme tedy přeformulovat takto.

**Věta. 11.2** *Nechť matice*

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \tag{206}$$

*je rozšířenou maticí soustavy lineárních rovnic*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{207}$$

*Nechť matice*

$$(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$$

*vznikla z matice (206) elementárními transformacemi. Potom systém lineárních rovnic*

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$$

*je ekvivalentní k systému rovnic (207).*

Vhodnými elementárními transformacemi lze z matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ dospět ke schodovité matici $(\boldsymbol{C}|d)$, která odpovídá systému $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, ekvivalentnímu k systému lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. V kapitole **??** jsme uvedli postup převodu matice na schodovitý tvar užitím elementárních transformací.

Řešení systému lineárních rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ lze tímto způsobem převést na řešení systému lineárních rovnic se schodovitou maticí soustavy.

### Postup řešení systému lineárních rovnic

Nechť je dán systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{208}$$

o $n$ neznámých $x_1, \ldots, x_n$. Tento systém lineárních rovnic můžeme řešit v těchto krocích

1. K daném systému rovnic přiřadíme matici rozšířenou $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.
2. Užitím vhodných elementárních transformací

$$\mathcal{H}1(i,\alpha),\ \alpha \neq 0,\ \mathcal{H}2(i,\,j),\ \mathcal{H}3(i,\,j),\ \mathcal{H}4(i,\alpha,j),\ \mathcal{H}5(i,\alpha,j,\beta),\ \beta \neq 0$$

   postupně aplikovaných na matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, vytvoříme horní schodovitou matici $(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{g})$.
3. Vypustíme nulové řádky matice $(\boldsymbol{F}|\boldsymbol{g})$. Takto vzniklou matici označme $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$. Této matici odpovídá systém rovnic

$$\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}. \tag{209}$$

4. Nechť systém (209) má tvar

$$\begin{array}{rcl} c_{1,s_1}x_{s_1} + \ldots + c_{1,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{1,s_{h-1}}x_{s_{h-1}} + \ldots + c_{1,n}x_n & = & d_1 \\ c_{2,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{2,s_{h-1}}x_{s_{h-1}} + \ldots + c_{2,n}x_n & = & d_2 \\ & \vdots & \\ c_{h-1,s_{h-1}}x_{s_{h-1}} + \ldots + c_{h-1,n}x_n & = & d_{h-1} \\ 0 \cdot x_n & = & d_h, \end{array} \tag{210}$$

v němž číslo $d_h$ je různé od 0, nebo tvar

$$\begin{array}{rcl} c_{1,s_1}x_{s_1}+\ldots+c_{1,s_2}x_{s_2}+\ldots+c_{1,s_h}x_{s_h}+\ldots+c_{1,n}x_n & = & b_1 \\ c_{2,s_2}x_{s_2}+\ldots+c_{2,s_h}x_{s_h}+\ldots+c_{2,n}x_n & = & d_2 \\ & \vdots & \\ c_{h,s_h}x_{s_h}+\ldots+c_{h,n}x_n & = & d_h \end{array} \tag{211}$$

v němž $c_{1,s_1}, c_{2,s_2}, \ldots, c_{h,s_h}$ jsou různá od 0.

Systém (210) nemá řešení, neboť jeho poslední rovnice je tvaru

$$0\cdot x_1+\ldots+0\cdot x_n = konst, \quad \text{kde} \quad konst \neq 0. \tag{212}$$

Této rovnici nevyhovuje žádný vektor $\boldsymbol{x}$. Systém rovnic (210) obsahuje rovnici tvaru (212), když a jenom když matice soustavy $\boldsymbol{C}$ a matice rozšířená $(\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{d})$ mají různé hodnosti. Poněvadž jsme k systému rovnic $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$ dospěli elementárními transformacemi ze systému $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, můžeme vyslovit tento prozatímní závěr. **Jestliže hodnost matice soustavy $\boldsymbol{A}$ je menší než hodnost matice rozšířené $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, nemá systém rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ řešení**. Matice soustavy systému rovnic (211) je horní schodovitou maticí. O jeho řešení pojednáme později (str. 162).

### Řešení systému lineárních rovnic s regulární horní trojúhelníkovou maticí soustavy

Řešme systém rovnic

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \tag{213}$$

kde $\boldsymbol{C}$ je horní regulární trojúhelníková matice řádu $n$, $\boldsymbol{d}$ je $n$–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je $n$–rozměrný sloupcový vektor neznámých. Rozepsáním tohoto systému dostáváme

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \tag{214}$$

**Zpětná substituce.** Poněvadž dle předpokladu je matice $\boldsymbol{C}$ regulární, jsou její prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Tento systém rovnic lze řešit metodou, zvanou **metoda zpětné substituce**.

Z poslední rovnice vypočítáme $x_n$. Dostáváme

$$x_n = d_n / c_{n,n}. \tag{215}$$

Dosadíme-li do předposlední rovnice za $x_n$ vypočítanou hodnotu (215), dostáváme

$$c_{n-1,n-1} \cdot x_{n-1} + c_{n-1,n} \cdot d_n / c_{n,n} = d_{n-1}. \tag{216}$$

Odtud

$$x_{n-1} = 1/c_{n-1,n-1} \cdot (d_{n-1} - c_{n-1,n} \cdot d_n / c_{n,n}). \tag{217}$$

Když jsme již vypočítali $x_n, x_{n-1}$, dosadíme tyto hodnoty do $(n-2)$–té rovnice a vypočítáme $x_{n-2}$. Tímto způsobem dále pokračujeme. Když jsme již vypočítali $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2$, dosadíme tyto hodnoty do první rovnice a vypočítáme zbývající hodnotu $x_1$.

**Příklad 11.1** *Nalezněte řešení systému lineárních rovnic (jehož matice soustavy je horní trojúhelníková matice).*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ & & & & 2x_3 & = & 8. \end{array} \tag{218}$$

*Z poslední rovnice vypočítáme $x_3$. Dostáváme $x_3 = 4$. Dosazením této hodnoty do druhé rovnice dostáváme*

$$x_2 + 8 = 9.$$

*Odtud dostáváme $x_2 = 1$. Dosaďme za $x_2, x_3$ tyto vypočítáné hodnoty do první rovnice systému. Dostáváme*

$$2x_1 + 3 + 4 = 11.$$

*Odtud dostáváme $x_1 = 2$.*

*Řešením zadaného systému rovnic (218) jsme tedy obdrželi*

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4.$$

## Řešení systému lineárních rovnic s regulární diagonální matici soustavy.

Řešme systém rovnic

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d},$$

kde matice $\boldsymbol{C}$ je regulární diagonální matice.

Rozepsáním lze tento systém zapsat takto

$$\begin{array}{rcl} c_{1,1}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad & = & d_1 \\ c_{2,2}x_2 \qquad\qquad\qquad & = & d_2 \\ & \vdots & \\ c_{n-1,n-1}x_{n-1} \qquad & = & d_{n-1} \\ c_{n,n}x_n & = & d_n. \end{array} \tag{219}$$

Řešením tohoto systému rovnic je zřejmě vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}$, to jest

$$x_i = d_i / c_{i,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

**Příklad 11.2** *Nalezněte řešení systému rovnic s diagonální matici soustavy*

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 \qquad\qquad\qquad & = & 6, \\ 3\,x_2 \qquad\qquad & = & 1, \\ -2\,x_3 & = & 5. \end{array}$$

**Řešení.** *Z první rovnice vypočítáme $x_1$. Dostáváme $x_1 = 3$. Z druhé rovnice vypočítáme $x_2$. Dostáváme $x_2 = 1/3$. Z třetí rovnice vypočítáme $x_3$. Dostáváme $x_3 = -5/2$.*

**Řešení systému lineárních rovnic s horní schodovitou maticí soustavy** *(220)* **typu** $(h, n)$, **s hodností** $h \leq n$.

*Tento systém lze rozepsat takto*

$$c_{1,s_1}x_{s_1} + \ldots + c_{1,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{1,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{1,n}x_n \;=\; d_1$$

$$
\begin{aligned}
c_{2,s_2}x_{s_2} + \ldots + c_{2,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{2,n}x_n &= d_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\
c_{h,s_h}x_{s_h} + \ldots + c_{h,n}x_n &= d_h.
\end{aligned} \tag{220}
$$

*V něm jsou prvky $c_{1,s_1}, c_{2,s_2}, \ldots, c_{h,s_h}$ různé od nuly.*

Při jeho řešení postupujeme takto. Všechny členy tohoto systému rovnic, které obsahují neznámé $x_j$, kde $j \in \{\{1, 2, \ldots, n\} - \{s_1, s_2, \ldots, s_h\}\}$, převedeme na pravou stranu systému rovnic. V dalším je budeme považovat za parametry; je jich celkem $d = n - h$. Obdržíme tak systém $h$ rovnic o $h$ neznámých $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_h}$ s horní regulární trojúhelníkovou maticí soustavy, jehož pravá strana závisí na $d$ parametrech. Jeho řešením zpětnou substitucí dostaneme $h$ složek řešení závislých na uvedených $d$ parametrech. (Způsob řešení systému lineárních rovnic s trojúhelníkovou maticí soustavy; byla nahoře popsaná.) Řešení daného systému rovnic je pak vektor $\boldsymbol{x}$, jehož složky jsou zavedené parametry v počtu $d$ a vypočítané složky $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_h}$.

**Příklad 11.3** *Nalezněte řešení systému lineárních rovnic*

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & + & 7x_7 & = & 40 \\
 & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & & & - & x_7 & = & -8 \\
 & & & & & & & & & & x_6 & - & 3x_7 & = & -15
\end{array} \tag{221}
$$

*o neznámých $x_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.*

**Řešení.** Maticí soustavy je horní schodovitá matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Označme $\boldsymbol{b}$ vektor pravých stran a $\boldsymbol{x}$ vektor neznámých. Potom je

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -8 \\ -15 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

Zadaný systém (221) rovnic lze pak zapsat v maticové notaci jako

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Matice soustavy i matice rozšířená mají stejnou hodnost $h = 3$. Má tedy systém řešení.

Zadaný systém rovnic přepíšeme tak, že na pravou stranu převedeme všechny členy rovnic obsahující neznámé $x_2, x_4, x_5, x_7$. Dostáváme tak systém rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_3 & + & 2x_6 & = & 40 & - & 2x_2 & - & 4x_4 & - & x_5 & - & 7x_7 \\ & - & 2x_3 & & & = & -8 & & & & & - & x_5 & + & x_7 \\ & & & & x_6 & = & -15 & & & & & & & + & 3x_7 \end{array} \tag{222}$$

Dosadíme-li za neznámé $x_2, x_4, x_5, x_7$ do (222) jakákoliv čísla, je pravou stranou takto vzniklého systému konstantní vektor a systém přechází na systém 3 rovnic o třech neznámých $x_1, x_3, x_6$. Matice soustavy tohoto systému je regulární horní trojúhelníková matice řádu 3. Jeho vyřešením dostáváme hodnoty neznámých $x_1, x_3, x_6$, které spolu se zvolenými hodnotami $x_2, x_4, x_5, x_7$ dávají řešení zadaného systému lineárních rovnic.

Na neznámé $x_2, x_4, x_5, x_7$ se budeme tedy dívat jako na parametry. Kvůli zvýšení přehlednosti zavedeme toto označení parametrů:

$$x_2 = c_1, \quad x_4 = c_2, \quad x_5 = c_3, \quad x_7 = c_4. \tag{223}$$

Dosazením těchto parametrů do (222), dostáváme

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_3 & + & 2x_6 & = & 40 & - & 2c_1 & - & 4c_2 & - & c_3 & - & c_4 \\ & - & 2x_3 & & & = & -8 & & & & & - & c_3 & + & c_4 \\ & & & & x_6 & = & -15 & & & & & & & + & 3c_4 \end{array} \tag{224}$$

Z poslední rovnice vypočítáme $x_6$. Dostáváme

$$x_6 = -15 + 3c_4.$$

Do druhé rovnice dosadíme vypočítanou hodnotu $x_6$ a vypočítáme $x_3$. (Dosazení za $x_6$ se neprojeví, neboť koeficient u $x_6$ je v této rovnici roven 0.) Dostáváme

$$x_3 = 4 + 1/2c_3 - 1/2c_4.$$

Dosadíme tyto vypočítané hodnoty za $x_3, x_6$ do první rovnice systému (224) a vypočítáme $x_1$. Dostáváme

$$x_1 = 66 - 2c_1 + 4c_2 + 1/2c_3 - 25/2c_4.$$

Všechna řešení zadaného systému rovnic (222) lze zapsat takto

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 66 - 2c_1 + 4c_2 + 1/2c_3 - 25/2c_4 \\ c_1 \\ 4 + 1/2c_3 - 1/2c_4 \\ c_2 \\ c_3 \\ -15 + 3c_4 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

kde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

Toto řešení lze zapsat takto

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 66 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Partikulární} \\ \text{řešení systému} \\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}}} + \underbrace{c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \cdot \begin{pmatrix} -25/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Obecné řešení homogenního systému } \boldsymbol{Ax}=0}.$$

**Poznámka 1.** Množinu všech řešení systému lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nazýváme **obecným řešením**. Lze ukázat, že toto obecné řešení je součtem obecného řešení příslušného homogenního systému rovnic $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ a partikulárního, to jest libovolně zvoleného jednoho řešení systému rovnic $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$.

**Poznámka 2.** V našem případě obdržené obecné řešení závisí na 4 parametrech. Znamená to, že každou volbou parametrů dostáváme řešení uvedeného systému lineárních rovnic a naopak, každé řešení daného systému rovnic dostaneme speciální volbou parametrů.

V tomto obecném řešení je vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 66 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

jedním z řešení daného systému rovnic. Nazýváme je partikulárním řešením. Množina řešení

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \cdot \begin{pmatrix} -25/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ jsou parametry, je obecným řešením systému $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, který se nazývá homogenním systémem rovnic, příslušným k danému systému rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

**Poznámka 3.** Vyjádření obecného řešení systému rovnic není jednoznačné (každé vyjádření ovšem obsahuje tutéž množinu všech řešení systému), dá se vyjádřit v různých tvarech.

Dosavadní úvahy shrneme v následující větě.

**Věta. 11.3 (Frobeniova věta.)** *Nechť*

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{225}$$

*je systém $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých. Potom platí:*

*Jestliže matice soustavy $\boldsymbol{A}$ má menší hodnost než matice rozšířená $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, potom systém rovnic (225) nemá řešení.*

*Jestliže matice soustavy $\boldsymbol{A}$ má stejnou hodnost jako matice rozšířená $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$, potom systém rovnic (225) má řešení. Jestliže tato společná hodnost je rovna počtu neznámých $n$, potom má právě jedno řešení. Jestliže tato společná hodnost je $h < n$, potom má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h$ parametrech.*

Uveďme ukázky řešení několika úloh, v nichž matice soustavy není schodovitá.

**Příklad 11.4** *Řešte systém lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 3. \end{array} \tag{226}$$

**Řešení.** *K danému systému rovnic napíšeme odpovídající rozšířenou matici soustavy*

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{227}$$

*Tuto matici transformujeme elementárními transformacemi na horní schodovitou matici. Aplikujeme-li na tuto matici postupně transformace $\mathcal{H}4$(1,-2,2), $\mathcal{H}4$(1,-4,4), dostaneme*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \ (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}).$$

*Transformací $\mathcal{H}4$(2,-1,3) na tuto matici, Dostaneme horní schodovitou matici*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \ (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}).$$

*V této matici vypustíme řádek obsahující samé* 0. *Dostáváme tak matici, označme ji* $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{c})$, *které odpovídá systému (228)* $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, *ekvivalentní s daným systémem rovnic (226).*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & - & 5x_2 & + & 7x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \end{array} \tag{228}$$

*Členy těchto rovnic obsahující neznámé* $x_3, x_4$ *převedeme na pravou stranu systému. Budeme je považovat za parametry. Zároveň položíme*

$$c_1 = x_3, \quad c_2 = x_4.$$

*Dostáváme*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 & + & 3c_1 & - & c_2, \\ & - & 5x_2 & = & -1 & - & 7c_1 & + & 3c_2. \end{array}$$

*Z poslední rovnice vypočítáme $x_2$. Dostaneme*

$$x_2 = 1/5 \cdot (1 + 7c_1 - 3c_2).$$

*Dosadíme tuto vypočítanou hodnotu $x_2$ do první rovnice a vypočítáme z takto vzniklé rovnice $x_1$. Dostaneme*

$$x_1 = 1/5 \cdot (3 + c_1 + c_2).$$

*Obecným řešením zadaného systému lineárních rovnic (226) je tedy vektor*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (1/5 \cdot (3 + c_1 + c_2) \\ 1/5 \cdot (1 + 7c_1 - 3c_2) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Toto obecné řešení lze zapsat ve tvaru*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ 7/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

## 11.3. Gaussova eleminační metoda.

V následujícím výkladu nejde o nic nového. Jde o zavedení názvu pro metodu, o které jsme již obecněji pojednali. Speciální případ uvádíme proto, že se s tímto názvem můžete setkat.

Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu $n$, $\boldsymbol{b}$ je $n$–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je neznámý $n$–rozměrný sloupcový vektor. Uvažujme systém $n$ lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{229}$$

Tento systém rovnic (229) řešme takto:

1. Matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ transformujeme elementárními transformacemi na matici

   $$(\boldsymbol{T}|\boldsymbol{c}), \tag{230}$$

   kde $\boldsymbol{T}$ je horní trojúhelníková matice. (Je to speciální případ schodovité matice.)
2. Řešíme obdržený systém rovnic $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ s horní trojúhelníkovou maticí metodou zpětné substituce.

Tento způsob výpočtu se nazývá **Gaussova eleminační metoda**. Tato metoda má mnoho variant, spočívajících jak ve výběru hlavních řádků (při transformaci rozšířené matice soustavy na horní schodovitou matici), tak i při provádění jednotlivých kroků v elementárních transformacích, jimiž se systém rovnic (229) převádí na systém rovnic (230).

**Příklad 11.5** *Gaussovou eliminační metodou řešte systém lineárních rovnic*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

*kde*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

*K systému rovnic přiřadíme rozšířenou matici soustavy*

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

*Tuto matici převedeme elementárními transformacemi na matici*

$$(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{c}),$$

*kde matice* $\boldsymbol{B}$ *je horní trojúhelníková matice. Postupně dostáváme*

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{pmatrix}.$$

*Poslední matici odpovídá systém lineárních rovnic*

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 1, \\ & 5x_2 & -2x_3 & = & 4, \\ & & 21x_3 & = & 63. \end{array}$$

*Tento systém řešíme metodou zpětné substituce. Z poslední rovnice vypočítáme* $x_3$*. Dostáváme* $x_3 = 3$*. Dosadíme-li tuto hodnotu do druhé rovnice a vypočítáme* $x_2$*, dostáváme* $x_2 = 2$*. Dosadíme-li nyní do první rovnice vypočítané hodnoty* $x_3, x_2$*, dostáváme z ní* $x_1 = 1$*. Je tedy hledaným* *řešením vektor*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## 11.4. Jordanova eliminační metoda.

V následujícím výkladu pojednáme o metodě založené na speciálně cílenou elementární tranformaci rozšířené matice soustavy. (Popis algoritmu je na str. 177.)

Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární čtvercová matice řádu $n$, $\boldsymbol{b}$ je $n$–rozměrný sloupcový vektor a $\boldsymbol{x}$ je neznámý $n$–rozměrný sloupcový vektor. Uvažujme systém lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{231}$$

Systém rovnic (231) řešme takto:

1. Matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ transformujeme elementárními trasformacemi na matici $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d})$, kde $\boldsymbol{C}$ je regulární diagonální matice řádu $n$.
2. Řešíme systém rovnic s diagonální maticí

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}. \tag{232}$$

Tento způsob výpočtu se nazývá **Jordanova eleminační metoda**. Tato metoda má mnoho variant, spočívajících jak ve výběru hlavních řádků tak i při provádění jednotlivých kroků v elementárních transformacích, jimiž se systém rovnic (229) převádí na systém rovnic (232).

**Příklad 11.6** *Jordanovou eliminační metodou řešte systém lineárních rovnic*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

*kde*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

*K systému rovnic přiřadíme rozšířenou matici soustavy*

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

*Tuto matici převedeme elementárními transformacemi na matici*

$$(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{d}),$$

*kde matice* $\boldsymbol{C}$ *je diagonální matice, (to lze, jestliže matice* $\boldsymbol{A}$ *je regulární). Postupně dostáváme*

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \sim \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{pmatrix}$$

*Poslední matici odpovídá systém rovnic*

$$\begin{aligned} 105x_1 \qquad\qquad &= 105, \\ 105x_2 \qquad &= 210, \\ 21x_3 &= 63. \end{aligned}$$

*Jeho řešením dostáváme hledaný vektor*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## Jordanova metoda na řešení maticové rovnice $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

Uvažujme systém rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}, \tag{233}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je daná regulární matice řádu $n$, $\boldsymbol{B}$ je daná matice typu $(n, m)$ a $\boldsymbol{X}$ je neznámá matice typu $(n, m)$.

Každý sloupec $\boldsymbol{X}(:, j)$, $j = 1, \ldots, m$, matice $\boldsymbol{X}$ je řešením systému rovnic

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(:, j) = \boldsymbol{B}(:, j), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{234}$$

Máme tedy řešit $m$ systémů rovnic (234) se stejnou maticí soustavy $\boldsymbol{A}$. Tyto systémy můžeme řešit najednou. K systému rovnic (233) přiřaďme matici rozšířenou

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}). \tag{235}$$

Užitím elementárních transformací transformujeme matici $\boldsymbol{F}$ na matici

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{D} \mid \boldsymbol{C}), \tag{236}$$

kde $D$ je diagonální matice. Položme

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}.$$

Matice $\boldsymbol{G}$ má tedy tvar

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{R}).$$

Tato matice odpovídá systému rovnic

$$\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}, \tag{237}$$

který je ekvivalentní se systémem (233). Poněvadž $\boldsymbol{E}\,.\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$, dostáváme ze systému (237)

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}, \tag{238}$$

takže matice $\boldsymbol{R}$ je řešením systému (233).

## 11.5. Výpočet inverzní matice k regulární matici řádu $n$ Jordanovou metodou

V podkapitole 5.4 jsme ukázali, že v případě, že matice $\boldsymbol{A}$ je regulární, potom inverzní matici, označme ji $\boldsymbol{X}$, nalezneme řešením systému rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}.$$

Jde tedy o řešení systému, který je speciálním případem systému rovnic (233).

**Převod matice $\boldsymbol{F}$ elementárními transformacemi na matici G.**

**Algoritmus.** Předpokládejme, že proměnné $\boldsymbol{F}$ je přiřazena matice $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$ a proměnné $n$ je přiřazen řád matice $\boldsymbol{A}$ a proměnné $m$ je přiřazen počet sloupců matice $\boldsymbol{B}$.

## Začátek

**B1** Začneme s úpravou prvního sloupce matice $\boldsymbol{F}$. Položíme

$$j := 1.$$

**B2** Zvolme $p \in \{j, j+1, \ldots, n\}$, pro něž je

$$f_{p,j} \neq 0.$$

(Takové $p$ existuje vzhledem k regulárnosti matice $\boldsymbol{A}$.) Touto volbou zvolíme $p$-tý řádek matice $\boldsymbol{F}$ jako hlavní pro následné eliminace. Jestliže $p = j$, je $j$-tý řádek hlavní a jdeme k **B3**. Jestliže $p \neq j$, vyměníme navzájem $p-$tý a $j-$tý řádek matice $\boldsymbol{F}$ a jdeme k **B3**.

**B3** Pro $i = 1, \ldots, n, i \neq j$, provedeme tyto úkony

**b1** Položme $i := 1$, jdeme k **b2**.

**b2** Jestliže $i = j$ jdeme k **b4**, jinak k **b3**.

**b3** Je-li $f_{i,j} = 0$, jdeme k **b4**, jinak položíme

$$\boldsymbol{F} = \mathcal{H}4(j, -f_{i,j}/f_{j,j}, i)\boldsymbol{F}.$$

(Po této transformací bude $f_{i,j} = 0$.) Jdeme k **b4**.

**b4** položme $i := i + 1$. Je-li $i \leq n$ jdeme k bodu **b2**, jinak jdeme k bodu **B4**.

**B4** Položme $j := j + 1$. Jestliže $j \leq n$, jdeme k **B2**. Jinak jdeme k bodu **B5**.

**B5** Původní matice $\boldsymbol{F}$ se transformovala na matici

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{D} \mid \boldsymbol{C}) \quad \text{kde matice } D \text{ je diagonální.}$$

Potom hledaná matice $\boldsymbol{G}$ je

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{R}).$$

**Příklad 11.7** *Nalezněte inverzní matici k matici*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \tag{239}$$

**Řešení.** Označme $\boldsymbol{X}$ matici inverzní k matici $\boldsymbol{A}$. Předpokládáme-li, že matice $\boldsymbol{A}$ je regulární, je hledaná matice $\boldsymbol{X}$ řešením systému lineárních rovnic

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}.$$

Této rovnici odpovídá matice $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})$, to jest matice

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{240}$$

Na matici $\boldsymbol{F}$ budeme postupně aplikovat elementární tranasformace podle nahoře popsaného algoritmu.

**Položme** $j := 1$. Začneme s úpravami prvního sloupce matice $\boldsymbol{F}$.

Za hlavní řádek zvolíme řádek 1.(Prvek $f_{1,1} \neq 0$.) Elementárními transformacemi typu $\mathcal{H}4$ dosáhneme toho, aby ve vzniklé matici byly prvky $f_{2,1}$, $f_{3,1}$ rovny nule. Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(1, -f_{2,1}/f_{1,1}, 2, 1)\boldsymbol{F}$ , to jest transformací $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(1, 2, 2, 1)\boldsymbol{F}$ dostáváme

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(1, -f_{3,1}/f_{1,1}, 3, 1)\boldsymbol{F}$ to jest provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(1, -4, 3, 1)\boldsymbol{F}$ dostáváme

$$\boldsymbol{F} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Položme** $j := 2$**.** Začneme s úpravami druhého sloupce matice $\boldsymbol{F}$.

Za hlavní řádek zvolíme řádek 2.(Prvek $f_{2,2} \neq 0$.) Elementárními transformacemi typu $\mathcal{H}4$ dosáhneme toho, aby ve vzniklé matici byly prvky $f_{1,2}$, $f_{3,2}$ rovny nule. Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(2, -f_{1,2}/f_{2,2}, 1, 1)\boldsymbol{F}$, to jest provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(2, -2/5, 1, 1)\boldsymbol{F}$ dostáváme

$$\boldsymbol{F} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(2, -f_{3,2}/f_{2,2}, 3, 1)\boldsymbol{F}$, to jest provedením transformace $\boldsymbol{F} :=$

$\mathcal{H}4(2, 5/5, 3, 1)\boldsymbol{F}$, dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Položme $j := 3$.** Začneme s úpravami třetího sloupce matice $\boldsymbol{F}$.

Za hlavní řádek zvolíme řádek 3.(Prvek $f_{3,3} \neq 0$.) Poněvadž $f_{1,3} = 0$, provedeme jenom takovou elementární transformaci typu $\mathcal{H}4$, aby ve vzniklé matici byl prvek $f_{2,3}$ roven nule.

Provedením transformace $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(3, -f_{2,3}/f_{3,3}, 2, 1)\boldsymbol{F}$, to jest transformací $\boldsymbol{F} := \mathcal{H}4(3, 10, 2, 1)\boldsymbol{F}$ dostáváme

$$\boldsymbol{F} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -18 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Označme obdrženou matici $\boldsymbol{F}$ jako

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{D} \mid \boldsymbol{C}).$$

Je tedy

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

K ní inverzní maticí je matice

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Položme

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{D}^{-1}\,\boldsymbol{F}.$$

Dostáváme

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{18}{5} & \frac{11}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matici $\boldsymbol{G}$ lze zapsat jako

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{R}).$$

Této maticí odpovídá systém rovnic

$$\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}$$

ekvivalentní s daným systémem rovnic $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}$. Je tedy hledanou inverzní maticí matice

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -\frac{18}{5} & \frac{11}{5} & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$