Časová struktura výnosů do doby splatnosti

Svoje úspory můžeme uložit různými způsoby, které jsou pro nás stejně výhodné. Předpokládejme, že kupónové platby z držené obligace budeme reinvestovat a investorovi se připíše za dobu vkladu (například termínovaného vkladu) úrok na konci období, potom reinvestování výnosu obligace do doby splatnosti přináší zvýšený výnos z této obligace do doby splatnosti.. Jestliže tento vklad provedeme na začátku období **z** a vybereme jej na konci období **k**, přičemž vycházíme z tvrzení, že současný výnos do doby splatnosti p.a. z dlouhodobých dluhopisů (vkladů) je tvořen průměrem budoucích krátkodobých výnosů do doby splatnosti p.a., potom pro daný úrok bude platit:

$\mathbf{i_{1k}}$ - index **1-**úrokovací období 1 rok, **k**-konec úrokovacího období

$\mathbf{e_{zk}}$ **-** index **z**- začátek úrokovacího období v budoucnu a **z >1**

k - konec úrokovacího období a $\mathbf{k \geq z}$

$\mathbf{S_{zk}}$ - uložená částka na termínovaný vklad, kde **z** je začátek úrokovacího období a **k** konec úrokovacího období

$\{S_{z,k} | S_{k+1,b}\}$ - investor si na počátku období **z** uloží částku **S** a na konci období **k** si tuto zúročenou částku vybere a reinvestuje na začátku období **k+1**. Na konci období **b** tento vklad vybere.

Příklad:

$\mathbf{i_{14}}$ - uložíme termínově v 1. dnu 1. roku částku a na konci 4. roku ji vybereme. Výnos do doby splatnosti z termínového vkladu bude činit $\mathbf{i_{14}}$ %

$\mathbf{e_{24}}$ - očekávaný výnos do doby splatnosti (p.a.) z tříletého termínového vkladu uloženého na začátku 2. období (roku) a vyzvednutého na konci 4. roku.

Výnosy z takto reinvestovaného kapitálu pak budou:

$$\mathbf{i = \sum_{k=1}^{n} i_{1k}} \text{ , kde } \mathbf{i_{1k} - i_{1,\,k-1} < i_{1j} - i_{1,\,j-1}}$$

Pro termínované bankovní vklady platí:

$$\{S_{15}\} = \left\{ \underbrace{S_{12} | S_{33} | S_{45}}_{\mathbf{a}} \right\} = \left\{ \underbrace{S_{13} | S_{44} | S_{55}}_{\mathbf{b}} \right\} = \left\{ \underbrace{S_{12} | S_{35}}_{\mathbf{c}} \right\}$$

1) *Při jednoduchém úročení pak platí:*

a) $$\mathbf{i_{15} = \frac{2.i_{12} + e_{33} + 2.e_{45}}{5}}$$

b) $$\mathbf{i_{15} = \frac{3.i_{13} + e_{44} + e_{55}}{5}}$$

c) $$\mathbf{i_{15} = \frac{2.i_{12} + 3.e_{35}}{5}}$$

Současné dlouhodobé výnosy do doby splatnosti p.a. jsou tvořeny aritmetickým průměrem současných a budoucích výnosů do doby splatnosti.

2) Při složeném úročení pak platí:

a) $(1+i_{15})^5 = (1+i_{12})^2.(1+e_{33})^1.(1+e_{45})^2$

b) $(1+i_{15})^5 = (1+i_{13})^3.(1+e_{44})^1.(1+e_{55})^1$

c) $(1+i_{15})^5 = (1+i_{12})^2.(1+e_{35})^3$

Poznámka:
Logaritmováním se dá složené úročení převést na úročení jednoduché. Při odhadování budoucích výnosů je nutno si dávat bedlivý pozor, aby hledané výnosy bylo možno ze soustavy vypočítat.

Složené úročení můžeme obecně zapsat:

$$\begin{aligned}
(1+i_{11}).(1+e_{22}).(1+e_{33}) \cdots (1+e_{nn}) &= (1+i_{1n})^n \\
(1+i_{12})^2.(1+e_{33}) \cdots (1+e_{nn}) &= (1+i_{1n})^n \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\quad\ \vdots \\
(1+i_{1n-1})^{n-1}.(1+e_{nn}) &= (1+i_{1n})^n
\end{aligned} \tag{9.4}$$

Zavedeme-li substituci:

$$R_k = \ln(1+i_{1k})^k = k.\ln(1+i_{1k}) \tag{9.5}$$

$$E_k = \ln(1+e_{kk}) \text{, kde } k = 2, 3, 4, \ldots, n \tag{9.6}$$

Takže: $E_2 = \ln(1+e_{22})$; $E_3 = \ln(1+e_{33})$; $R_1 = \ln(1+i_{11})$; $R_4 = 4.\ln(1+i_{44})$
Pomocí této substituce můžeme soustavu rovnic přepsat do tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n & - & R_1 \\ R_n & - & R_2 \\ R_n & - & R_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_n & - & R_{n-1} \end{bmatrix}$$

Neznámé v rovnici jsou hodnoty E_k pro k = 2, 3, …, n.
K levé matici vypočítáme matici inverzní a obdržíme:

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} R_n & - & R_1 \\ R_n & - & R_2 \\ R_n & - & R_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_n & - & R_{n-2} \\ R_n & - & R_{n-1} \end{bmatrix} \tag{9.7}$$

Z dané soustavy vypočítáme neznámé E_k.

$$E_k = \ln(1+e_{kk}) = R_k - R_{k-1} = \ln(1+i_{1k})^k - \ln(1-i_{k-1})^{k-1}$$

Z uvedeného výrazu pak vypočítáme:

$$\ln(1+e_{kk}) = \ln\frac{(1+i_{1k})^k}{(1+i_{1k-1})^{k-1}} \qquad (9.8)$$

Daný výraz odlogaritmujeme a obdržíme:

$$1+e_{kk} = \frac{(1+i_{1k})^k}{(1+i_{1k-1})^{k-1}} = \left(\frac{1+i_{1k}}{1+i_{1k-1}}\right)^{k-1}.(1+i_{1k})$$

Z toho:

$$e_{kk} = \left(\frac{1+i_{1k}}{1+i_{1k-1}}\right)^{k-1}.(1+i_{1k})-1, \quad k=2, 3, \ldots, n \qquad (9.9)$$

Tento odhad krátkodobých výnosů do doby splatnosti je však poněkud nadhodnocen. Proto provedeme určitou modifikaci tohoto výrazu a potom dostaneme:

$$\frac{e_{Sk}}{e_{Mk}} = \frac{e_{kk}}{\bar{r}_{Sk}} \Rightarrow \bar{r}_{Sk} = \frac{e_{kk}.e_{Mk}}{e_{Sk}} \qquad (9.10)$$

kde:

e_{Sk} - skutečný roční výnos do doby splatnosti v minulosti

e_{Mk} - odhad ročního výnosu do doby splatnosti v minulosti

e_{kk} - odhadovaný roční výnos do doby splatnosti v současnosti pro budoucí období

Uvedený algoritmus lze použít i pro jiná úrokovací období, na která můžeme reinvestovat kupónové platby z dluhopisů. Je zřejmé, že krátkodobé předpovídané výnosy, pokud bude výnosová křivka rostoucí, budou vždy růst oproti současným s dobou splatnosti a naopak. Podle očekávání je zřejmé, že krátkodobé výnosy do doby splatnosti proti současným očekávaným, nejpravděpodobněji porostou (budou vyšší).

9.2 Sestavování obligačních portfolií

Cílem sestavování obligačních portfolií je nakoupit takovou kombinaci obligací, aby v okamžiku realizace portfolia byl co největší součet částek, které lze získat prodejem zbylých obligací za zůstatkovou cenu a částka z přijatých kupónových plateb naspořená na bankovních vkladech. Tento součet budeme nazývat ***realizační cenou portfolia.***

Realizační cena obligačního portfolia závisí na skutečných ročních výnosech do doby splatnosti obligací tvořících toto portfolio.

Jestliže investor chce svůj kapitál vložit do nákupu ***jednoho typu dluhopisu***, získaný dluhopis držet po dobu **m** období (let), a částky získané z kupónových plateb bude reinvestovat při ročním výnosu i do doby splatnosti, bude majetek investora na konci **m**-tého období (ekvivalentně na začátku **m+1**-ního období) tvořen součtem:

$$P_k(i).(1+i)^m = (1+i)^m.\sum_{t=1}^{N_k}\frac{S_{k_t}}{(1+i)^t} = \frac{S_{k_1}.(1+i)^m}{(1+i)^1} + \frac{S_{k_2}.(1+i)^m}{(1+i)^2} +$$

$$+\Lambda + \frac{S_{k_m}.(1+i)^m}{(1+i)^m} +$$

$$+\frac{S_{k_{m+1}}.(1+i)^m}{(1+i)^{m+1}} + \frac{S_{k_{m+2}}.(1+i)^m}{(1+i)^{m+2}} + \Lambda + \frac{S_{k_{N_k}}.(1+i)^m}{(1+i)^{N_k}} \qquad (9.11)$$

Po úpravě této rovnice obdržíme:

$$\mathbf{P_k(i).(1+i)^m = \{úspory\} + \{zůstatková\ cena\}} =$$

$$= \left\{S_{k_1}.(1+i)^{m-1} + S_{k_2}.(1+i)^{m-2} + \Lambda + S_{k_m}.(1+i)^0\right\} + \frac{S_{k_{m+1}}}{(1+i)^1} + \frac{S_{k_{m+2}}}{(1+i)^2} + \Lambda + \frac{S_{k_{N_k}}}{(1+i)^{N_k - m}}$$

celkem naspořená částka na konci m-tého období + ***zůstatková cena obligace na konci m-tého období (doba splatnosti*** $\geq$ ***m)*** (9.12)