Masarykova univerzita
Ekonomicko–správní fakulta

Finanční matematika

distanční studijní opora

František Čámský

Brno 2005

Socrates
Grundtvig

Tento projekt byl realizován za finanční podpory Evropské unie v rámci programu SOCRATES — Grundtvig.
Za obsah produktu odpovídá výlučně autor, produkt nereprezentuje názory Evropské komise a Evropská komise neodpovídá za použití informací, jež jsou obsahem produktu.

This project was realized with financial support of European Union in terms of program SOCRATES — Grundtvig.
Author is exclusively responsible for content of product, product does not represent opinions of European Union and European Commission is not responsible for any uses of informations, which are content of product

Recenzoval: prof. Ing. Jiří Dvořák, DrSc.

Finanční matematika
Vydala Masarykova univerzita
Ekonomicko–správní fakulta

Vydání první
Brno, 2005

ISBN 80-210-3479-3

Identifikace modulu

Znak

- KFFIMA

Název

- Finanční matematika

Určení

- Pro studenty 3. semestru kombinovaného studia oboru Peněžnictví, studijního směru Pojišťovnictví, Bankovnictví, Bc., oboru Management kombinovaného studijního programu a programu CŽV.

Garant

- Ing. František Kalouda, CSc., M.B.A.

Autor

- RNDr. František Čámský

Cíl

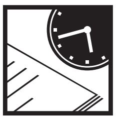
Vymezení cíle

Milí studenti,
cílem kurzu „Finanční matematika" je seznámit se s početními operacemi ve finanční matematice, kde předpokládané předcházející znalosti nepřekračují středoškolskou úroveň studentů. Struktura textu je členěna do jednotlivých kapitol, které vždy končí ukázkovými příklady pro lehčí pochopení závěrečných vztahů odvozených v těchto kapitolách. První část pojednává o jednoduchém úročení ať předlhůtním nebo polhůtním, výpočty jednotlivých hodnot, jako počátečního kapitálu, velikosti úrokové sazby, konečného kapitálu při známé úrokové sazbě a taktéž doby vkladu. V této části si vysvětlíme i důležitý pojem v ekonomice, diskontní faktor, využívaný zvláště u řešení problémů dluhopisů a derivátů finančních trhů. Další část je vymezena složenému úrokování kde je postup výkladu metodicky obdobný jako u jednoduchého úročení. Tato část je zakončena kombinací jednoduchého a složeného úročení, v praxi velmi používané metody při výpočtech jednotlivých hodnot. Jelikož se v běžné praxi i v ekonomických teoriích setkáváme s pojmy nominální, reálná a efektivní úroková sazba, jsou tyto pojmy podrobněji vysvětleny stejně jako úroková intenzita při úročení spojitém. Praxe, ať již v bankovnictví nebo pojišťovnictví je založena na spoření klientů, a z těchto důvodů si v další části vysvětlíme problémy spoření jak krátkodobého tak i dlouhodobého při spoření ročním, pololetním, čtvrtletním a měsíčním. Z odvozených výrazů můžeme vypočítat jednotlivé hodnoty, které jsou potřebné pro dosažení cílové částky spoření při známé úrokové sazbě finančních ústavů. V dalším pokračování studijní opory zaměříme svoji pozornost na otázku důchodů, dnes velmi diskutované problematiky. V návaznosti na to si vysvětlíme problematiku placení i velikost výplat důchodů doživotních a také dočasných. V této kapitole se též seznámíme i s otázkou důchodů věčných. Navazujícím problémem důchodů je pak otázka úvěrů a jednotlivé výpočty potřebných hodnot. Závěrem se pak v krátkosti seznámíme s některými

příklady využití finanční matematiky v praxi za použití různých metod, hlavně při vedení běžných účtů a taktéž vedení kontokorentních úvěrů. Velmi krátce se zmíníme o cenných papírech s výpočtem kurzu akcií. Otázka dluhopisů je pak probíraná v kurzu „Analýza dluhopisů“ a není proto v tomto studijním textu uvedena.

Dovednosti a znalosti

Po prostudování textu bychom měli být schopni řešit úlohy z jednoduchého a složeného úročení a tyto způsoby umět jednoduchým způsobem vysvětlit. Zvláště je třeba znát způsoby diskontování a z toho dovést vypočítat počáteční (současnou) hodnotu kapitálu. Stejně je nutno porozumět a prakticky spočítat úlohy kapitoly spoření, neboť klienty bude vždy zajímat úroková sazba, konečný kapitál, který naspoří a doba spoření. Vzhledem k reformě důchodového systému se budou klienti zajímat o možnosti zabezpečení důchodu, nebo-li navýšení důchodu ze státního důchodového fondu vlastním spořením se státním příspěvkem. Řešením praktických úloh a jejich vysvětlení klientům je předpokladem, že je dokážete na konkrétních příkladech pro takovouto formu spoření přesvědčit. Úročení na běžných účtech a kontokorentních úvěrech je předpokladem dobrého pracovníka finančních ústavů a zárukou, že v praxi budete umět tyto problémy samostatně řešit a také je klientům vysvětlit. Řešením úloh, které jsou uvedeny vždy na závěr každé kapitoly porozumíte studované problematice a později umožní i teorii spolehlivě interpretovat. Úlohy pro samostatné zpracování po vás požadované, budou vždy vybrány z úloh, které jsou uvedeny za každou kapitolou této studijní pomůcky.



Časový plán

Jelikož se jedná o kurz, kde je nutno umět řešit úlohy na základě studované problematiky a také závěry z řešení vysvětlit, je studium značně náročné na čas, neboť zahrnuje právě ono řešení úloh z jednotlivých kapitol předloženého textu. Text této publikace je nutno studovat po částech a k některým kapitolám se i vracet, neboť následující kapitoly svým obsahem navazují na předešlé. Vhodné je také používat i jiné prameny a zdroje pro pochopení a doplnění znalostí, které jsou potřebné pro běžnou praxi ve finanční sféře. Rozdělení studia je konstruováno na část prezenční a samostatné studium takto:

Časová náročnost

- prezenční část   6 hodin
- samostudium   78 hodin
- POT   6 hodin (2 POT vždy na konci větších celků)

Celkový sudijní čas

- 90 hodin

Harmonogram

Říjen:

1.–2. týden **samostudium** (seznámení se studijní pomůckou, jejím obsahem a jednotlivými kapitolami)
3. týden **tutoriál** (úvodní konzultace k prvním kapitolám kurzu „Finanční matematika“ a seznámení s požadavky, zadání témat a zdrojů pro samostudium, zadání **POT1**) – 2 hodiny

Listopad:

1. týden **samostudium** (kapitola 1) – 9 hodin
2. týden **samostudium** (kapitola 2) – 12 hodin
3. týden **samostudium** (kapitola 3) – 6 hodin
   vypracování **POT1** – 3 hodiny
4. týden **tutoriál** (odevzdání **POT1**, konzultace k problémovým tématům, úvod do dalších kapitol, zadání **POT2**) – 2 hodiny

Prosinec:

1. týden **samostudium** (kapitola 4) – 12 hodin
2. týden **samostudium** (kapitola 5) – 10 hodin
3. týden **samostudium** (kapitola 6) – 9 hodin
   vypracování **POT2** – 3 hodiny
4. týden **tutoriál** (odevzdání **POT2**, konzultace k problémovým tématům, požadavky ke zkoušce)
   2 hodiny

Leden:

1. týden **samostudium** (kapitola 7) – 8 hodin
2. týden **samostudium** (kapitola 8) – 6 hodin
3. týden **samostudium** (kapitola 9) – 6 hodin

Únor – březen:

Písemná zkouška (kapesní kalkulátor nebo na PC)

Způsob studia

Studium musí být zaměřeno nejen na pochopení jednotlivých kapitol studijního textu, ale též na zvládnutí praktických úloh, které jsou uvedeny na konci každé kapitoly této studijní pomůcky. Vyřešení těchto úloh nám navíc umožní pochopit použití teorie v praxi a tím získat potřebné znalosti z jednotlivých kapitol. U všech úloh je vždy uveden výsledek pro snadnější kontrolu úspěšnosti jejich řešení. Je velmi vhodné aby jste propočítali i ukázkové příklady, na kterých si uvědomíte pochopení nebo nepochopení studované problematiky. Je navíc velmi vhodné se mezitím vracet k těm tématům, které jsou nezbytně nutné pro pochopení dalších kapitol a tím si neustále upevňovat znalosti, které budou potřebné v závěrečném testu a zhodnocení studijní úspěšnosti z finanční matematiky. U této studijní pomůcky nejde pouze o pochopení teoretických základů, ale o jejich užití v běžné praxi bankovního nebo pojišťovacího pracovníka ve svém zařazení a také pochopení, že bez dobré znalosti a řešení problémů finanční matematiky se ztrácí na důvěryhodnosti ze strany klientů. V dalším máte uvedenou povinnou a doporučenou literaturu pro další prohloubení znalostí ze studované problematiky. Jedná se o rozšíření a také i jiné pohledy na problémy finanční matematiky i její užití v praxi. **POT1** bude individuálně zadán v prvním tutoriálu a **POT2** ve druhém tutoriálu. Budou obsahovat nejen teoretické studie, ale i řešení vybraných úloh z uvedených otázek k zamyšlení.

Studijní pomůcky

- Povinná literatura
  - ČÁMSKÝ, F.: *Finanční matematika*. 1. vydání, Brno, MU ESF 1997, ISBN 80-210-1509-8
  - CIPRA, T.: *Finanční matematika v praxi*. Edice HZ, Praha 1995
  - CIPRA, T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Edice HZ, Praha 1995
  - RADOVÁ, J., DVOŘÁK, P.: *Finanční matematika pro každého*. Grada, Praha 1993
  - SMÉKALOVÁ, D.: *Finanční a pojistná matematika*. Montanex, Ostrava–Vítkovice 1996
- Doporučená literatura
  - EICHLER, B.: *Úvod do finanční matematiky*. Septima, Praha 1993
  - MACHÁČEK, O.: *Finanční a pojistná matematika*. Prospektrum, Praha 1995
  - WALTER, J.: *Finanční a pojistná matematika*. VŠE, Praha 1992

Vybavení

- **PC** připojené k internetu vybavené programem MS EXCEL s finančními, matematickými a statistickými funkcemi (ve verzi 97 a vyšší)

Návod práce se studijními texty

Text nestudujte jako beletrii. Je potřebné se nejdříve seznámit s obsahem kapitoly jejím přečtením a potom podrobněji prostudovat. Doporučoval bych studovat tento kurz s papírem a tužkou v ruce. Až pochopíte teorii, přepočítejte si některý z ukázkových příkladů a potom si vyřešte některou úlohu z řady úkolů k zamyšlení za každou kapitolou. Čím více úloh vypočítáte, tím lépe pochopíte studovanou problematiku a budete znalosti z jednotlivých kapitol umět použít nejen na teoretické úrovni, ale i řešit konkrétní úlohy, s kterými se setkáte v běžné finanční praxi. Vhodným prostředkem pro rychlejší a spolehlivé řešení uvedených příkladů je softwarový produkt (program MS Excel), kde jsou uvedeny nejen funkce matematické, statistické, ale i finanční.

V uvedeném textu si dělejte vysvětlující poznámky, pokud pochopíte jednotlivé vztahy, a také poznámky z jiné povinné nebo doporučené literatury, čímž si umožníte studovat některé problémy více podrobněji a upevníte tak svoje znalosti.

V závěru tohoto studijního textu jsou v příloze uvedeny základní a odvozené výrazy z jednotlivých kapitol a mohou sloužit k jejich využití v běžné praxi. Tyto výrazy je možno doplňovat a vytvářet si bázi použitelných modifikovaných (upravených) vzorců pro vlastní potřebu, i takových, které se v běžné praxi nevyskytují často. Každý poznatek a připomínka k tomuto studijnímu textu budou vítány, neboť poslouží k zdokonalení výkladu a metod pro chápání obsahu dalším studentům.

Obsah

Stručný obsah

Kapitola 1

Potřebné základy z matematiky

Jelikož se objevují určité nedostatky z matematiky, jsou v této úvodní kapitole vysvětleny a uvedeny potřebné znalosti z matematiky pro studium dalších kapitol této studijní opory. Pojednává hlavně o procentovém počtu, vysvětluje základní pojmy funkcí a uvádí pouze ty funkce, které jsou důležité pro pochopení jednoduchého a složeného úročení. Též vysvětluje základní pojmy z posloupností a číselných řad, pomocí kterých se odvozují důležité vztahy v kapitolách složeného úročení, spoření a důchodů.

Kapitola 2

Jednoduché úročení

Zde si vysvětlíme základní pojmy jednotlivých typů úročení, hlavně jednoduchého úročení předlhůtního a polhůtního, výpočet úrokového čísla a úrokového dělitele, důležitých pojmů pro úročení běžných účtů a kontokorentních úvěrů, uvedeme si základní rovnice pro jednoduché úročení, vysvětlíme si důležitý pojem diskont a výpočty jednotlivých hodnot ze základních vztahů.

Kapitola 3

Složené úročení

V této kapitole se zaměříme na odvození základních vztahů pro složené úročení, kombinaci složeného a jednoduchého úročení i odvození výpočtů jednotlivých hodnot ze základních vztahů. Na závěr si porovnáme jednoduché a složené úročení, přičemž si uvedeme jejich jednotlivé výhody a nevýhody.

Kapitola 4

Nominální a reálná úroková sazba

V běžném životě i praxi nelze počítat s nominálními úrokovými sazbami, neboť jsou ovlivňovány jak mikroekonomickými, tak i makroekonomickými podmínkami. Z tohoto důvodu si vysvětlíme vztahy mezi nominální a reálnou úrokovou sazbou. Dále si vysvětlíme pojem efektivní úroková sazba a též pojem úroková intenzita i její vztah s efektivní úrokovou mírou. Stejně si uvedeme i vztah mezi nominální a reálnou úrokovou sazbou a jejich použití v praxi.

Kapitola 5

Spoření

Nejdůležitější pro praxi pracovníků finanční sféry je pochopení základů spoření, neboť se jedná o produkt, který finanční ústavy nabízí klientům. Zde si uvedeme základní pojmy ze spoření krátkodobého předlhůtního a polhůtního. Odvodíme si výpočet hodnot z těchto základních vztahů a také vysvětlíme výpočty konečného kapitálu v závislosti na vkladu a době dlouhodobého spoření. S těmito pojmy se určitě setkáváte v běžné praxi a často musíte odpovídat jakým způsobem spořit, abychom v určitém časovém horizontu při dané úrokové sazbě, naspořili námi požadovanou částku.

Kapitola 6

Důchody

Tato kapitola nepostrádá aktuálnosti v současné době, a proto výpočtům spoření si na důchod pravidelnými měsíčními, čtvrtletními, pololetními a ročními splátkami při požadované výplatě důchodu jako zlepšení důchodu starobního se budeme věnovat podrobněji. Je zřejmé, že možností je daleko více, ale o tuto problematiku se budeme zajímat také u pojistné matematiky. Seznámíme se též okrajově s důchody věčnými.

Kapitola 7
Umořování dluhů

V této kapitole se seznámíme se základními pojmy a principy úvěrů, kde si ukážeme jak vypočítat počet anuit při jejich konstantním zvyšováním každým rokem, jakým způsobem vypočítáme zbytek úvěru a také způsob konstrukce splátkového kalendáře jako nejvíce používaného způsobu při splácení úvěru.

Kapitola 8
Běžné účty

V této kapitole si vysvětlíme použití úrokového čísla a úrokového dělitele při vedení běžných účtů. K tomu budeme využívat metody, které používají jednotlivé finanční ústavy při vedení těchto účtů.

Kapitola 9
Kontokorentní úvěry

Vysvětlení pojmu „Kontokorentní úvěr“, úročení kontokorentních úvěrů a ukázková řešení hypotetických úloh.

Kapitola 10
Aktiva

Seznámení se základními pojmy z problematiky aktiv jako: hmotná aktiva, finanční aktiva a jejich členění. Výpočet kurzu akcie, výnosnost akcie, výplata dividend, řešení hypotetické úlohy.

Úplný obsah

Obsah

Úvod

Úvod

Studijní pomůcka slouží jako samostatná učebnice početních operací finanční matematiky. Obsahuje vedle výkladů výpočetních postupů i ukázkové příklady pro pochopení odvozených vztahů v této publikaci. Předpokládané znalosti z matematiky nepřekračují středoškolskou úroveň.

Každodenně se setkáváme s otázkami, jakou výši úroku obdržíme od banky za náš vklad, nebo jak dlouho musíme spořit, abychom naspořili námi stanovenou finanční částku, nebo kolik zaplatíme na úrocích při splácení úvěru a jak dlouho jej budeme splácet. S těmito a s řadou dalších podobných otázek se setkáváme každodenně. Pro studenty kombinovaného a distančního studia jsou znalosti z finanční matematiky o to důležitější, neboť vztahy odvozené v tomto studijním textu používají ve své každodenní praxi. Nejde pouze o používání vzorců, ale také porozumění vzájemných vztahů i vysvětlení, nejen pro potřeby kolegů, ale i klientů.

Předložený text obsahuje nejen odvození jednotlivých vztahů pro výpočet žádaných hodnot, ale i řadu ukázkových příkladů, které je nutno také spočítat, abyste pochopili praktické výpočty nutné pro běžnou praxi.

Může se stát, že některým výrazům, odvozením a vztahům neporozumíte. Proto je velmi vhodné si dělat průběžné poznámky a vaše připomínky k zdokonalení těchto textů budou vždy vítané a zlepší nejen metodiku, ale i obsah této studijní pomůcky. Na závěr je uvedeno shrnutí jednotlivých vzorců pro potřeby studentů a také pro rychlou orientaci v dané problematice.

- Procentový počet
- Funkce
- Posloupnosti a řady
- Průměry

1. Potřebné základy z matematiky

Cíl kapitoly

Cílem této kapitoly je seznámit se a zopakovat potřebné početní operace a pojmy z matematiky pro lepší pochopení studovaných problémů. Tato kapitola je pro studenty, kteří jsou již určitou dobu v praxi a na řadu základních poznatků z matematiky již zčásti pozapomněli. V této části nebudou uvedeny příklady pro cvičení, neboť bude sloužit pouze pro pochopení vztahů v příštích kapitolách a vždy se k ní můžete vracet a aplikovat tyto poznatky při studiu finanční matematiky. Jsou vždy za každou kapitolou uvedené ukázkové příklady, které postačují pro zopakování již zapomenutého.

Časová zátěž

Časová zátěž není uváděná a ani nutná, neboť se k této kapitole budete vracet pokud neporozumíte studovaným problémům finanční matematiky. Někdo se k této kapitole nebude muset vracet vůbec, neboť má ještě v dobré paměti jednotlivé vztahy a pojmy ze střední školy.

1.1 Procentový počet

Procento – vyjadřuje jednu setinu celku.

Pro jedno procento platí:

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ ze základu}$$
$$100\ \% = \text{jeden celek} = \text{celý základ}$$

V jednoduchých úlohách s procenty se setkáváme s těmito veličinami.

a) ***základ*** – *označujeme jej* $\boldsymbol{z}$
b) ***počet procent*** – *označujeme jej* $\boldsymbol{p}$
c) ***procentová část*** – *označujeme jí* $\boldsymbol{x}$

Obecně při řešení jednoduchých úloh většinou známe dvě hodnoty a chceme vypočítat třetí, kterou neznáme a podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh:

a) **výpočet procentové části:** $x = \dfrac{z \cdot p}{100}$

b) **výpočet základu:** $z = \dfrac{x \cdot 100}{p}$

c) **výpočet počtu procent:** $p = \dfrac{x \cdot 100}{z}$

K výpočtům bez použití uvedených vzorců můžeme použít úměru nebo trojčlenku.

Příklad 1.1.

Prodejna měla sjednaný podíl na zisku ve výši 10 % s prodejní ceny výrobku. Kolik je to procent z výrobní ceny výrobku, jestliže prodejní cena byla 115 % výrobní ceny?

Řešení.

Máme tedy zjistit, jak velkou část činí zisk ve výši 10 % z prodejní ceny vzhledem k výrobní ceně.

$z = 115$, $p = 10$ %, $x = ?$

$$x = \frac{z \cdot p}{100} = \frac{115 \cdot 10}{100} = 11{,}50$$

Zisk činil 11,50 % z výrobní ceny.

Příklad 1.2.

Daň z příjmu činila při daňové sazbě 25,5 % částku 1250 Kč. Jak vysoký byl příjem?

Řešení.

$x = 1\,250$ Kč, $p = 25{,}5$ %, $z = ?$

$$z = \frac{x \cdot 100}{p} = \frac{1\,250 \cdot 100}{25{,}5} = 4\,901{,}9608 \text{ Kč}$$

Tuto úlohu můžeme vypočítat též pomocí úměry:

$$\begin{array}{r} 25{,}5\ \% \ \ldots \text{ odpovídá } \ldots \ 1250 \text{ Kč} \\ 100\ \% \ \ldots \text{ odpovídá } \ldots \ z \qquad\quad \end{array}$$

Zapíšeme: $z : 1\,250 = 100 : 25{,}5$ nebo $\dfrac{z}{1\,250} = \dfrac{100}{25{,}5}$

Hrubý příjem činil 4 901,9608 Kč

1.2 Funkce

Pro pochopení závislostí ve finanční matematice si zopakujeme některé funkce, na které se budeme při vysvětlování finanční matematiky odvolávat.

1.2.1 Pojem funkce

Funkcí rozumíme předpis, kterým každému číslu x z určité množiny D přiřazujeme právě jedno číslo y z množiny M.
Veličinu x nazýváme **nezávisle proměnnou**.
Veličinu y nazýváme **závisle proměnnou** (závisí na volbě hodnoty x).
Množinu D všech čísel x, pro něž je funkce definovaná, nazýváme **definičním oborem funkce** f.
Množinu M všech čísel y, kterých daná funkce nabývá pro $x \in D$, nazýváme **oborem funkce** (oborem funkčních hodnot nebo závislým oborem) dané funkce f.

Poznámka. Říkáme, že dvě veličiny jsou přímo úměrné, jestliže podíl každých dvou odpovídajících si hodnot x_i, y_i je roven konstantě. Tedy:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k.$$

Zapisujeme: $\boldsymbol{y = f(x)}$

Příklad 1.3.

Cena za 1 kg pomerančů je 23 Kč. Jaká bude cena za 3 kg pomerančů?
Cena za 3 kg pomerančů je závisle proměnná, počet kilogramů závisí na naší volbě – hodnota nezávisle proměnná.

Potom zapíšeme: $y = 23 \cdot x = 23 \cdot 3 = 69$ Kč.

V matematice jste jistě probírali řadu funkcí jak na základní tak i na střední škole. Pro naši potřebu ve finanční matematice si vysvětlíme pouze ty funkce, které budeme potřebovat pro vysvětlení některých funkčních závislostí a vytvořili si potřebné předpoklady jejich pochopení.

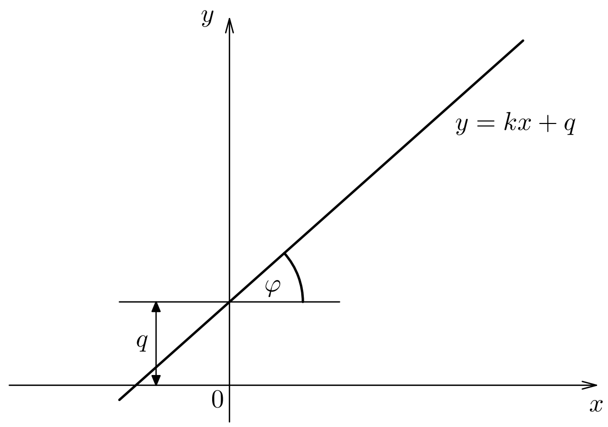
1.2.2 Lineární funkce

V ekonomických úvahách se často setkáme se závislostí, kterou nazýváme **přímá úměrnost**. Tato přímá úměrnost je znázorněna právě **lineární funkcí**.

Lineární funkci zapisujeme:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x + q, \qquad x \in R} \tag{1.1}$$

Tato lineární funkce představuje přímku v rovině, kde jsou k, q konstanty – k udává směrnici přímky a můžeme jí vyjádřit jako tg $\varphi =$ k, kde φ je úhel, který svírá přímka s osou x.
x je nezávisle proměnná, y je závisle proměnná.



Obrázek 1.1: Graf lineární funkce

1.2.3 Exponenciální funkce

Pod pojmem exponenciální funkce rozumíme takovou funkci, která má nezávisle proměnnou exponentu.

Exponenciální funkci zapisujeme:

$$\boldsymbol{y = a^x,} \tag{1.2}$$

kde definiční obor funkce je: $D(f) = (-\infty, \infty)$
$H(f) = (0, \infty)$

Pro $a > 1$ je funkce rostoucí.
Pro $0 < a < 1$ je funkce klesající.

Pro $x = 0$ je $y = 1$ u každé exponenciální funkce nechť je a (základ) jakékoliv reálné číslo.

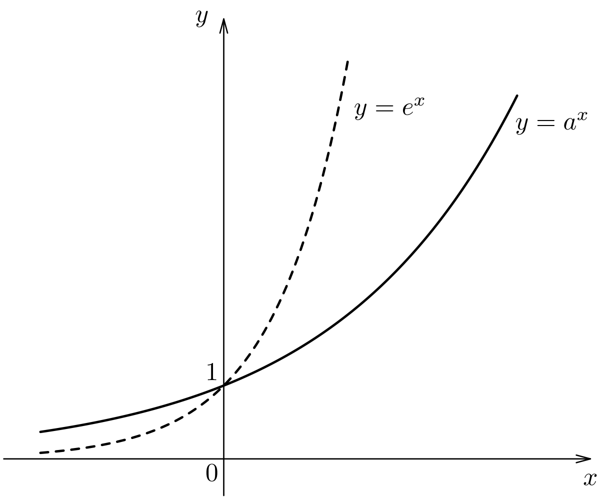
Funkční hodnoty exponenciální funkce jsou pro libovolné hodnoty nezávisle proměnné x vždy kladné.

Speciálním případem je exponenciální funkce:

$$\boldsymbol{y = e^x,} \tag{1.3}$$

jejímž základem je Eulerovo číslo **$e = 2{,}71828$, a je rostoucí pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$**.

Exponenciální funkcí můžeme znázornit složené úročení, jestliže nezávisle proměnou je čas t a závisle proměnnou je velikost zúročeného kapitálu K_t, při zvolené úrokové sazbě.



Obrázek 1.2: Graf exponenciální funkce

1.2.4 Logaritmická funkce

Ze střední školy je známo, že logaritmická funkce je inverzní funkcí k funkci exponenciální. Definiční obor exponenciální funkce je oborem funkčních hodnot funkce logaritmické a obor funkčních hodnot exponenciální funkce je definičním oborem funkce logaritmické.

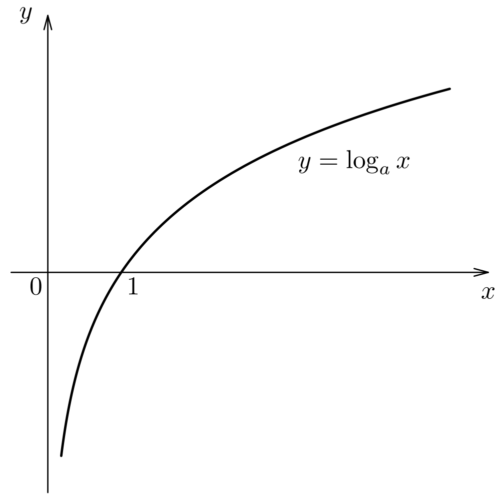
Tedy: $D(f) = (0, \infty)$
$H(f) = (-\infty, \infty)$

Logaritmickou funkci zapisujeme:

$$\boldsymbol{y = \log_a x,} \quad \text{kde } \boldsymbol{x \in (0, \infty).} \tag{1.4}$$

Platí též: $a^y = x$

Číslo x určíme, jestliže umocníme základ logaritmu na logaritmus čísla x.



Obrázek 1.3: Graf logaritmické funkce

Příklad 1.4.

Určete číslo x jestliže platí: $\log_2 x = 3$.

Řešení. $2^3 = 8$, $x = 8$

Tedy: $\log_2 8 = 3$

Pro početní úkony s logaritmy platí tato pravidla:

Jestliže x a y jsou libovolná čísla pak platí:

a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ b) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ d) $\log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$

Příklad 1.5.

$$\begin{aligned}\log x &= \log(134{,}678 \cdot 28{,}984) = \log 134{,}678 + \log 28{,}984\\ \log x &= 2{,}1292967 + 1{,}4621583 = 3{,}591455\\ x &= 3\,903{,}5075\end{aligned}$$

Příklad 1.6.

$$\begin{aligned}\log x &= \log(134{,}678/28{,}984) = \log 134{,}678 - \log 28{,}984\\ \log x &= 2{,}1292967 - 1{,}4621583 = 0{,}6671384\\ x &= 4{,}646633\end{aligned}$$

Příklad 1.7.

$$\begin{aligned}\log x &= \log 100^{0{,}05} = 0{,}05 \cdot \log 100 = 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}1\\ \log x &= 0{,}1\\ x &= 1{,}25893\end{aligned}$$

Příklad 1.8.

$$\log x = \log \sqrt[0{,}24]{45^{3{,}4}} = 3{,}4/0{,}24 \cdot \log 45 = 14{,}166667 \cdot 1{,}6532125 = 23{,}420511$$
$$\log x = 23{,}420511$$
$$x = 2{,}6333656^{2}3$$

Hodnoty logaritmů čísel nalezneme v logaritmických tabulkách, nebo je určíme pomocí kapesního kalkulátoru.

1.3 Posloupnosti a řady

Ve finanční matematice, pojistné matematice a ekonomických výpočtech se často setkáváme s aplikacemi posloupností a řad.

Základní pojmy:

Jestliže přiřadíme každému přirozenému číslu n určité číslo a_n, potom čísla: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ nazýváme ***posloupnost***.

Výraz (součet členů posloupnosti): $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \dots$ nazýváme ***řadou*** a čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ ***členy řady***.

Jestliže má řada konečný počet členů, nazývá se ***konečnou řadou***. Jestliže má řada nekonečný počet členů, nazývá se ***nekonečnou řadou***.

1.3.1 Aritmetická posloupnost

Posloupnost, u které rozdíl (**diference**) dvou po sobě jdoucích členů je ***konstantní***, se nazývá ***aritmetická posloupnost***.

$$a_{k+1} - a_k = k = d, \qquad \text{kde } k \text{ je konstanta.}$$

Odvození:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = \underbrace{a_1 + d}_{a_2} + d = a_1 + 2 \cdot d \\
&\ \vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d
\end{aligned}$$

Takže n-tý člen vypočítáme:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

a_1 – ***je první člen řady***	n – ***je počet členů***
a_n – ***je poslední člen řady***	d – ***je diference aritmetické řady***

Pro aritmetickou řadu platí, že každý její člen je ***aritmetickým průměrem*** svých sousedních členů.

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$$

Pro součet n členů aritmetické řady platí:

$$S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$$

Dosadíme-li do našeho výrazu za $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, můžeme součet n členů vyjádřit:

$$S_n = \frac{n}{2}\big(2 \cdot a + (n-1) \cdot d\big)$$

Ze vzorce vyplývá, že můžeme zpárovat vždy dva členy řady – ***první a poslední, druhý a předposlední atd.***, přičemž součty těchto dvojic jsou ***konstantní***. Takových dvojic můžeme sestavit polovinu z celkového počtu členů řady – $\frac{n}{2}$.

Příklad 1.9.

Aritmetická posloupnost má diferenci $d = -12$ a n-tý člen $a_n = 15$. Kolik prvních členů posloupnosti má součet $S_n = 456$? Kterému číslu se rovnán první člen?

Vycházíme ze součtu aritmetické řady a výrazu pro výpočet n-tého členu:

$$\begin{aligned} 456 &= \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)(-12)\big) \\ 15 &= a_1 + (n-1)(-12) \end{aligned}$$

Po úpravě budeme řešit jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\begin{aligned} 912 &= n(2a_1 - 12n + 12) \\ 15 &= a_1 - 12n + 12 \Longrightarrow a_1 = 12n + 3 \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice $912 = n\big(2(12n+3) - 12n + 12\big)$ a obdržíme:

$$\begin{aligned} 912 &= n(24n + 6 - 12n + 12) = n(12n + 18) = 12n^2 + 18n \\ 152 &= 2n^2 + 3n \\ 2n^2 + 3n - 152 &= 0 \end{aligned}$$

Řešíme jako kvadratickou rovnici:

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 152}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1225}}{4} = \begin{cases} 8 \\ -\frac{38}{8} \end{cases}$$

Počet členů aritmetické řady je $n = 8$.

Nyní dosadíme do výrazu: $a_1 = 12n + 3 \Longrightarrow a_1 = 12 \cdot 8 + 3 = 99$

První člen aritmetické řady se rovná číslu 99.

Příklad 1.10.

Máme vypočítat n-tý částečný součet, jestliže je $a_1 = 3$, $d = -1$.

Použijeme výraz pro výpočet součtu řady: $S_n = \frac{n}{2}\big(2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\big)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\big(2 \cdot 3 + (n-1)(-1)\big) = \frac{n}{2}(6 - n + 1) = \\
&= \frac{n}{2}(7 - n) \\
S_n &= \frac{n}{2}(7 - n)
\end{aligned}
$$

1.3.2 Geometrická posloupnost

Posloupnost, u níž podíl kterýchkoliv dvou po sobě jdoucích členů je ***konstantní***, se nazývá ***geometrická posloupnost***.

Podíl těchto dvou členů nazýváme ***kvocientem*** a značíme jej písmenem q.

Odvození:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}
$$

Takže n-tý člen vypočítáme:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Je-li $\boldsymbol{q > 1}$,	***je řada rostoucí***
Je-li $\boldsymbol{q \in (0, 1)}$,	***je řada klesající***
Je-li $\boldsymbol{q < 0}$,	***je řada alternující*** (střídavá)
Je-li $\boldsymbol{q = 1}$,	***řada obsahuje stejné členy***

Pro součet n členů geometrické řady pro $q \neq 1$ platí:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ pro } q > 1, \qquad S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \text{ pro } q \in (0, 1).$$

Každý člen geometrické řady je ***geometrickým průměrem*** z jeho dvou sousedních členů:

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

Příklad 1.11.

V geometrické posloupnosti je součet prvních dvou členů 4 a součet jejich druhých mocnin 10. Máme určit tuto posloupnost.

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 &= 4 \\
a_1^2 + a_2^2 &= 10
\end{aligned}
$$

Řešení.

Z první rovnice si vyjádříme a_2 a dosadíme do druhé rovnice, z níž vypočítáme kvocient a_1.

$$a_2 = 4 - a_1$$

Tento výraz dosadíme za a_2 do druhé rovnice a vypočítáme první člen a_1.

$$\begin{aligned} a_1^2 + (4 - a_1)^2 &= 10 \\ a_1^2 + 16 - 8a_1 + a_1^2 &= 10 \\ 2a_1^2 - 8a_1 + 6 &= 0 \\ a_1^2 - 4a_1 + 3 &= 0 \\ a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} &= \frac{3}{1} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$a_1 = 3$ nebo $a_1 = 1$, $a_2 = 4 - 3 = 1$, $a_2 = 4 - 1 = 3 \Longrightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$ nebo $q = \frac{3}{1} = 3$.

Příklad 1.12.

Máme vypočítat součet geometrické řady kde $n = 5$, $q = 1 + r$, $r = 3$ a $a_1 = 2\,000$.

$$S_n = 2\,000\frac{(1+3)^5 - 1}{(1+3) - 1} = 2\,000\frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 2\,000\frac{1023}{3} = 682\,000$$
$$S_n = 682\,000$$

1.4 Průměry

1.4.1 Aritmetický průměr

Aritmetický průměr $\overline{x}_a$ je pro n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definován jako součet těchto čísel dělený jejich počtem. Tedy:

$$\overline{x}_a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Jestliže jsou mezi danými čísly a_i stejná čísla, potom můžeme výpočet aritmetického průměru zjednodušit.

Mějme počet n_1 čísel a_1, n_2 čísel a_2, $\ldots n_r$ čísel a_r. Potom

$$\overline{x}_{av} = \frac{n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + \cdots + n_r \cdot a_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r},$$

kde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

V tomto případě mluvíme o ***váženém aritmetickém průměru***, kde čísla n_1, n_2,$\ldots$, n_r jsou váhy čísel a_1, a_2,$\ldots$, a_r.

S aritmetickým průměrem se setkáváme při výpočtu například střední doby splatnosti více pohledávek, očekávané výnosnosti cenných papírů atd.

1.4.2 Geometrický průměr

Druhým druhem průměru je ***geometrický průměr*** $\overline{x}_g$.

Mějme n kladných čísel a_1, a_2,..., a_n; potom je geometrický průměr definován jako n-tá odmocnina součinu n čísel.

$$\overline{x}_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n}$$

Jsou-li mezi danými čísly některá čísla stejná, můžeme stejně jako u aritmetického průměru definovat ***vážený geometrický průměr***.

$$\overline{x}_{gv} = \sqrt{a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot a_3^{n_3} \ldots a_k^{n_k}}$$

1.4.3 Harmonický průměr

Třetím druhem průměru je ***harmonický průměr*** $\overline{x}_h$, který je opět pro n čísel dán výrazem:

$$\overline{x}_h = \frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}).$$

Stejně jako v předchozích případech, jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, můžeme definovat vážený harmonický průměr vztahem:

$$\overline{x}_{hv} = \frac{1}{n} \cdot (\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \cdots + \frac{n_k}{a_k}).$$

Vztah mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem

Mezi aritmetickým, geometrickým a harmonickým průměrem existuje vzájemný vztah.

Pro všechna $a_i \neq a_j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, n$ vždy platí:

$$\overline{x}_a < \overline{x}_g < \overline{x}_h$$

- Základní pojmy
- Typy úročení

2. Jednoduché úročení

Cíl kapitoly

Cílem této první kapitoly je pochopit problémy jednoduchého úročení předlhůtního i polhůtního. Naučit se na základě odvozených výrazů vypočítat jednotlivé hodnoty a umět je v běžné praxi použít.Velmi důležitou částí je pojem úrokového čísla a úrokového dělitele, která slouží v praxi k výpočtu úroků při různé hodnotě vkladu a v odlišném čase. Dalším důležitým pojmem je diskontní faktor, který se v ekonomické praxi vyskytuje velmi často v pojmech současná hodnota, cena dluhopisu do doby splatnosti, cena dluhopisu atd. Této části je nutno věnovat patřičnou pozornost, spočítat ukázkové příklady a postup jejich řešení i spočítat příklady uvedené za touto kapitolou. Jedině umění prakticky používat odvozené výrazy budou svědčit o pochopení této kapitoly.

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 9 hod.

2.1 Základní pojmy

Úrok: je to odměna za dočasné užívání peněžité částky (kapitálu). Z pohledu vkladatele (věřitele) je **úrok odměnou**, kterou dostává za to, že poskytl svůj kapitál dočasně někomu jinému. Naopak z pohledu dlužníka je **úrok cena**, kterou platí dlužník za získání kapitálu (úvěru). Úrok se řídí procentním poměrem k užívané částce a dobou užívání této částky. Vyjádříme-li úrok v procentech z hodnoty kapitálu, obdržíme **úrokovou sazbu** (**úrokovou míru**).

Úrokové období: je to doba, za kterou se úroky pravidelně připisují. Úrokové období bývá zpravidla:

roční	a značí se **p. a.**	(per annum)
pololetní	a značí se **p. s.**	(per semestre)
čtvrtletní	a značí se **p. q.**	(per quartalae)
měsíční	a značí se **p. m.**	(per mensem)
týdenní	a značí se **p. sept.**	(per septimanam)
denní	a značí se **p. d.**	(per diem)

Pro vyjádření délky úrokového období se vychází z různých zvyklostí, z nichž se nejčastěji užívá

Anglická metoda: je založena na skutečném počtu dnů úrokového období a délce roku **365 dní**, v přestupném roce pak **366 dní**.

Francouzská metoda: je založena na skutečném počtu dnů úrokovacího období a délce roku **360 dní**, (**mezinárodní**).

Německá metoda: je založena na kombinaci započítávání celých měsíců jako 30 dní a délky roku pak **360 dní**, (**obchodní**).

V běžné praxi se můžeme setkat se všemi metodami. V našich úvahách a řešených příkladech pro jednoduchost budeme nejčastěji používat **německou metodu**.

2.2 Typy úročení

Rozlišujeme dva základní typy úročení:

a) **Jednoduché úročení**: úroky se počítají stále z původního kapitálu K_0.
b) **Složené úročení**: úroky se připisují k původnímu kapitálu (peněžní částce) a spolu s ním se dále úročí.

Úročení dělíme též podle toho, kdy dochází k placení úroku. Jestliže se úroky platí **na konci úrokového období**, mluvíme o **úrokování polhůtním – dekurzivním**.

Jestliže dochází k placení úroků **na začátku úrokovacího období**, mluvíme o **úrokování předlhůtním – anticipativním**.

2.2.1 Jednoduché úročení polhůtní

U jednoduchého úročení, jak bylo řečeno dříve, se úročí stále pouze základní kapitál (peněžní částka). Vyplácené úroky se k ní nepřičítají, nevzniká tedy úrok z úroků. Protože uvažujeme o úrokování polhůtním, úroky budou vypláceny vždy po uplynutí úrokového období, ke kterému se vztahují.

Označme si

u – úrok v Kč,
K – kapitál, peněžní částka v Kč,
p – úroková sazba v procentech,
d – doba splatnosti kapitálu ve dnech.

Potom úrok vypočítáme ze vztahu

$$u = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot 360}.$$

Jestliže vyjádříme

$$\frac{p}{100} = i \qquad \text{a} \qquad \frac{d}{360} = t,$$

potom obdržíme úrokovou sazbu jako desetinné číslo a splatnost v letech a úrok vypočítáme

$$u = K \cdot i \cdot t,$$

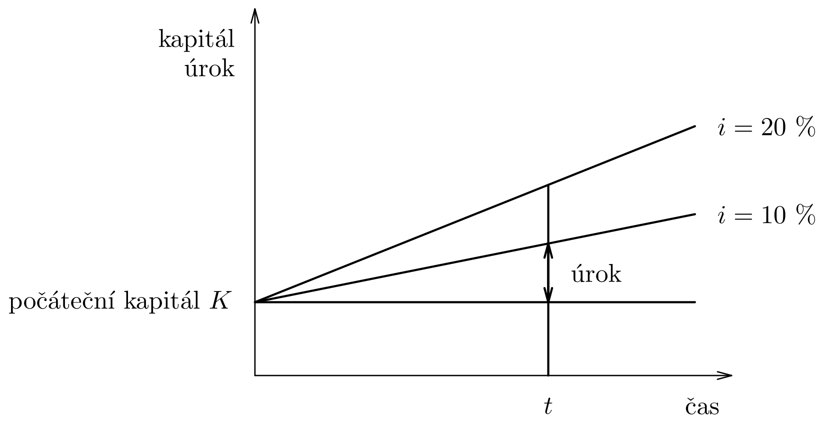
kde:

i – úroková sazba vyjádřená v setinách. Je to úrok z 1 Kč za 1 rok.
t – doba splatnosti vyjádřená v letech.

Z grafu na obrázku 2.1 je vidět, že **konečný kapitál** při stálé úrokové sazbě **je lineární funkcí** času (lineární funkce). Jestliže se bude měnit výše ukládaného kapitálu při stejné úrokové sazbě během úrokovacího období, potom pro výpočet úroků používáme tzv. **úrokových čísel** a **úrokových dělitelů**.

a) Úrokové číslo UC

$$UC = \frac{K \cdot d}{100},$$



Obrázek 2.1: Graf závislosti výše kapitálu na čase a výšce úrokové sazby

kde d je splatnost ve dnech a K kapitál.

b) Úrokový dělitel UD

Úrokový dělitel vyjadřuje počet dní, za které **získáme úrok 1 Kč ze 100 Kč**

$$UD = \frac{360}{p},$$

kde p je úroková sazba v %.

Potom úrok vypočítáme

$$u = \frac{UC}{UD}.$$

Příklad 2.1.

Jestliže částka K_1 je uložena a tedy úročena d_1 dní, částka K_2 je uložena a úročena d_2 dní, ..., částka K_n, d_n dní a přitom všechny při stejné úrokové sazbě p, potom úroková čísla budou

$$UC_1 = \frac{K_1 \cdot d_1}{100}, \quad UC_2 = \frac{K_2 \cdot d_2}{100}, \quad \ldots, \quad UC_n = \frac{K_n \cdot d_n}{100}.$$

Protože se nemění úrokový dělitel, můžeme jej vytknout před závorku a úrok vypočítat

$$u = \frac{1}{UD} \cdot (UC_1 + UC_2 + \cdots + UC_n)$$

nebo

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{n} UC_j}{UD}.$$

Tohoto způsobu se nejvíce využívá při výpočtu úroků na běžných účtech.

Příklad 2.2.

Podnikatel si postupně vypůjčil:

16.1. částku 60 000 Kč,
21.2. částku 40 000 Kč,
8.3. částku 30 000 Kč.

Roční úroková sazba u všech půjček je 12 %. Chceme zjistit, kolik zaplatí koncem roku na úrocích.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
&K_1 = 60\,000\ \text{Kč}, \quad d_1 = 16.1. - 30.12.\\
&K_2 = 40\,000\ \text{Kč}, \quad d_2 = 21.2. - 30.12.\\
&K_3 = 30\,000\ \text{Kč}, \quad d_3 = 8.3. - 30.12.\\
&d_1 = (12-1)\cdot 30 + (30-16) = 344\ \text{dní},\\
&d_2 = (12-2)\cdot 30 + (30-12) = 309\ \text{dní},\\
&d_3 = (12-3)\cdot 30 + (30-8) = 292\ \text{dní}.\\
&u = \frac{1}{UD}(UC_1 + UC_2 + UC_3) = \frac{p}{360}\left(\frac{K_1\cdot d_1}{100} + \frac{K_2\cdot d_2}{100} + \frac{K_3\cdot d_3}{100}\right) =\\
&\quad = \frac{12}{360}\left(\frac{60\,000\cdot 344}{100} + \frac{40\,000\cdot 309}{100} + \frac{30\,000\cdot 292}{100}\right) =\\
&\quad = \frac{206\,400 + 123\,600 + 87\,600}{30} = 13\,920.
\end{aligned}
$$

Podnikatel koncem roku zaplatí 13 920 Kč.

2.2.2 Základní rovnice pro jednoduché úročení

V předcházející kapitole jsme se seznámili, jakým způsobem vypočítáme výši úroku za určité období.

V praxi nás však zajímá výše zúročeného kapitálu (včetně úroků) po určitém období. Konečnou výši kapitálu (K_t) za období t obdržíme jako **součet počátečního kapitálu a úroků za toto období**.

Tedy

$$K_t = K_0 + u,$$

dosadíme-li do tohoto výrazu za $u = K_0 \cdot i \cdot t$, obdržíme

$$K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t),$$

kde

- K_0 – počáteční hodnota kapitálu (základní peněžní částka, základní kapitál),
- K_t – konečný kapitál za dobu t (stav kapitálu po zúročení za dobu t),
- i – roční úroková sazba v setinách,
- t – doba splatnosti kapitálu v letech.

Jestliže vyjádříme v našem výrazu splatnost ve dnech a úrokovou sazbu v procentech, obdržíme

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p\cdot d}{100\cdot 360}\right).$$

Jestliže zvolíme $K_0 = 1$ Kč a $t = 1$, bude $K_t = 1 + i$.

Výraz $1 + i$ se nazývá **úrokovací faktor** (úročitel). Udává, na kolik vzroste 1 Kč za 1 rok při úrokové sazbě i.

Ze základní rovnice můžeme vypočítat další důležité hodnoty: K_0, t, i.

a) **Výpočet počáteční hodnoty** K_0

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t} = \frac{u}{i \cdot t}.$$

Odvození: víme, že $K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$. Tento výraz roznásobíme a dostaneme

$$K_0 + K_0 \cdot i \cdot t = K_t \Rightarrow K_0 \cdot i \cdot t = K_t - K_0 = u.$$

Potom

$$K_0 = \frac{u}{i \cdot t}.$$

b) **Výpočet doby splatnosti (doby úročení)** t

$$t = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{u}{K_0 \cdot i}.$$

c) **Výpočet úrokové sazby** i

$$i = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot t} = \frac{u}{K_0 \cdot t}.$$

2.2.3 Diskont

Často ve finanční a ekonomické praxi se setkáváme s tím, že potřebujeme porovnat hodnoty kapitálu v čase. Kapitál v čase má různou hodnotu: čím dříve kapitál budeme mít, tím dříve jej můžeme investovat a za dobu t se nám zúročí – ponese nám úrok.

Abychom mohli porovnávat kapitál v čase, potřebujeme znát pojem **současná hodnota**.

Současnou hodnotou kapitálu rozumíme kapitál, který po zúročení v časovém období dosáhne **budoucí hodnotu**.

Jestliže označíme současnou hodnotu K_0 a budoucí hodnotu K_t, potom současnou hodnotu vypočítáme

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t}.$$

Výpočet současné hodnoty se nazývá též **diskontování**.

Jestliže je $K_t = 1$ Kč a i úroková sazba v setinách a $t = 1$ rok, potom K_0 udává současnou hodnotu 1 Kč splatné za rok při úrokové sazbě i.

Potom výraz $\frac{1}{1+i}$ nazýváme **diskontním faktorem** a udává současnou hodnotu 1 Kč splatné za 1 rok při úrokové sazbě i.

Příklad 2.3.

Co je výhodnější při koupi daru? Zaplatit za něj nyní v hotovosti 8 000 Kč nebo si na něj vypůjčit a zaplatit za rok s úrokem 8 300 Kč, když banka nabízí úrokovou sazbu 7 % p. a.?

Řešení.

$$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t},$$
$$K_0 = \frac{8\,300}{1 + 0{,}07 \cdot 1} = \frac{8\,300}{1{,}07} = 7\,757{,}0094 \cong 7\,757.$$

Porovnání obou způsobů:

a) platba v hotovosti 8 000 Kč
b) platba na půjčku 7 757 Kč
c) 8 000 Kč > 7 757 Kč

V tomto případě je výhodnější zažádat o půjčku, neboť současná hodnota 8 300 Kč, které máme zaplatit za rok, je právě dnes 7 757 Kč. Tedy, zaplatíme-li za rok 8 300 Kč, je to, jako bychom dnes zaplatili 7 757 Kč. Hotovostní způsob placení je méně výhodný.

Diskont je tedy **úrok ode dne výplaty do dne splatnosti**. Diskont můžeme počítat z **budoucí hodnoty** K_t nebo ze **současné hodnoty** K_0.

Podle způsobu výpočtu rozeznáváme:

a) **Diskont obchodní** D_{ob} – výpočet diskontu z budoucí hodnoty.
b) **Diskont matematický** D_{mat} – výpočet diskontu ze současné hodnoty.

a) Diskont obchodní

$$D_{\text{ob}} = K_t \cdot i_D \cdot t,$$

kde i_D je diskontní sazba v setinách.

Označme K_{ob} **obchodní kapitál** (částka, kterou banka vyplatí), potom

$$K_{\text{ob}} = K_t - D_{\text{ob}} = K_t - K_t \cdot i_D \cdot t = K_t \cdot (1 - i_D \cdot t).$$

Při zaplacení pohledávky banka nevyplatí věřiteli (klientovi) celou nominální hodnotu (budoucí hodnotu), ale hodnotu kapitálu sníženou o obchodní diskont D_{ob}.

Příklad 2.4.

Máme vypočítat, kolik dostane vyplaceno klient, jemuž banka eskontuje (zaplatí dříve) směnku o nominální hodnotě 20 000 Kč 35 dní před dobou splatnosti při diskontní sazbě 0,09 p. a. Předpokládáme, že banka neúčtuje další provize.

Řešení.

$$K_{\text{ob}} = ?, \quad K_t = 20\,000 \text{ Kč}, \quad i_D = 0{,}09, \quad t = 35 \text{ dní} = 0{,}0972 \text{ roků}.$$

Tedy

$$K_{\text{ob}} = K_t \cdot (1 - i_D \cdot t) = 20\,000 \cdot (1 - 0{,}09 \cdot 0{,}0972) = 20\,000 \cdot 0{,}9913 = 19\,826 \text{ Kč}.$$

Klient dostane peníze od banky o 35 dní dříve, ale místo 20 000 Kč pouze 19 826 Kč, neboť banka si započítala obchodní diskont.

b) Diskont matematický

Matematický diskont vypočítáme jako úrok ze současné hodnoty. Tedy

$$D_{\mathrm{mat}} = K_0 \cdot i_D \cdot t.$$

Jestliže do daného výrazu dosadíme za $K_0 = \frac{K_t}{1+i_D \cdot t}$, obdržíme

$$D_{\mathrm{mat}} = \frac{K_t \cdot i_D \cdot t}{1 + i_D \cdot t}.$$

Z obchodního diskontu víme, že $D_{\mathrm{ob}} = K_t \cdot i_D \cdot t$. Dosadíme-li tento vztah do čitatele z předcházejícího výrazu, obdržíme **vztah mezi matematickým a obchodním diskontem**.

$$D_{\mathrm{mat}} = \frac{D_{\mathrm{ob}}}{1 + i_D \cdot t} \Rightarrow D_{\mathrm{ob}} > D_{\mathrm{mat}}.$$

2.2.4 Jednoduché úročení předlhůtní

Někdy se setkáváme s úročením **předlhůtním** (anticipativním), kdy je **úrok placen na začátku úrokovacího období**. Příjemce kapitálu nedostává celou částku K_t, ale kapitál snížený o úrok, což je vlastně obchodní diskont. Předpokládejme, že doba splatnosti kapitálu bude jeden rok, **a proto zaplatíme úrok za tento jeden rok**.

Jestliže označíme

K_1 – kapitál splatný za jeden rok,
I – úroková sazba v setinách p. a.,
K_0 – vyplacený kapitál (hodnota dluhu na počátku),

potom

$$K_0 = K_1 - K_1 \cdot I = K_1 \cdot (1 - I) \Rightarrow K_1 = \frac{K_0}{1 - I}.$$

Jestliže chceme vyjádřit hodnotu kapitálu K_t v čase t, kde $t \in \langle 0, 1\rangle$, tedy v libovolném čase mezi dobou výplaty a dobou splatnosti při předlhůtním (anticipativním) úročení, bude platit

$$K_t = K_0 + K_1 \cdot I \cdot t.$$

Jestliže do naší rovnice dosadíme za $K_1 = \frac{K_0}{1-I}$, získáme základní rovnici pro jednoduché předlhůtní úročení ve tvaru

$$K_t = K_0 + \frac{K_0}{1 - I} \cdot I \cdot t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{I}{1 - I} \cdot t\right).$$

Porovnání jednoduchého polhůtního a předlhůtního úročení (dekurzivního a anticipativního):

Rovnice pro zúročený kapitál

Jednoduché polhůtní	**Jednoduché předlhůtní**
$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$	$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{I}{1-I} \cdot t\right)$ nebo $K_t = K_1 \cdot [1 + I \cdot (t - 1)]$

Z uvedených rovnic je vidět, že závislost konečného kapitálu resp. úroku je u obou rovnic lineární.

K_0 – počáteční kapitál, který je s časem t úročen
i – úroková sazba polhůtní (dekurzivní)

$$i = \frac{I}{1-I}$$

K_0 – kapitál, který obdrží klient a který se s časem t úročí a platí

$$K_0 = K_1 \cdot (1 - I)$$

I – úroková sazba předlhůtní (anticipativní)

Platí vztah

$$i = \frac{I}{1-I} \qquad \text{nebo} \qquad I = \frac{i}{1+i}$$

Závěr: Jestliže úročíme tentýž kapitál K_0 předlhůtně nebo polhůtně (s odpovídající úrokovou sazbou), výsledný zúročený kapitál je shodný. Úrokování se liší pouze způsobem připisování úroků.

Příklad 2.5.

$$K_t = ?, \quad K_0 = 100 \text{ Kč}, \quad i = 0{,}08, \quad I = \frac{i}{1+i}, \quad t = 9 \text{ měsíců}.$$

Řešení.

Polhůtně (dekurzivně)
$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$
$K_t = 100 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot 0{,}75) = 106$
$K_t = 106$ Kč

Předlhůtně (anticipativně)
$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{I}{1-I} \cdot t\right)$
$K_t = 100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}074074}{1-0{,}074074} \cdot 0{,}75\right) =$
$= 105{,}9999$
$K_t = 105{,}99$ Kč

Příklad 2.6.

Předpokládejme úvěr ve výši 100 Kč, splatný najednou za 1 rok při úrokové sazbě 10 % p. a. Jaký je rozdíl mezi polhůtním a předlhůtním úročením?

Řešení.

Polhůtní:
$K_0 = 100,\ i = 0{,}1,\ t = 1,\ K_t = ?$
$K_1 = K_0 \cdot (1 + i \cdot t) = 100 \cdot 1{,}1 =$
$= 110$ Kč
Na konci roku je nutno zaplatit celkem 110 Kč, to znamená 100 Kč úvěru plus 10 Kč úroku.

Předlhůtní:
$K_t = 100,\ I = 0{,}1,\ t = 1,\ K_0 = ?$
$K_0 = K_1 \cdot (1 - I) = 100 \cdot 0{,}9 =$
$= 90$ Kč
Při předlhůtním úročení z úvěru ve výši 100 Kč obdržíme pouze 90 Kč (100 Kč minus úrok) a po roce musíme zaplatit celých 100 Kč.

Příklad 2.7.

Kolik dostane vyplaceno klient, který si vypůjčil od banky 120 000 Kč při 15 % předlhůtní úrokové sazbě na dobu 1 roku? Kolik zaplatí bance, jestliže se rozhodne dluh vrátit již za 8 měsíců?

Řešení. Vyplacená částka úvěru bankou bude činit

$$K_0 = K_1 \cdot (1 - I) = 120\,000 \cdot (1 - 0{,}15) = 120\,000 \cdot 0{,}85 = 102\,000 \text{ Kč}.$$

Hodnota úvěru po 8 měsících bude

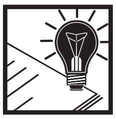
$$\begin{aligned} K_t &= K_1 \cdot [1 + (t-1) \cdot I] = 120\,000 \cdot [1 + (8/12 - 1) \cdot 0{,}15] = \\ &= 120\,000 \cdot (1 - 1/3 \cdot 0{,}15) = 114\,000 \text{ Kč}. \end{aligned}$$

Klient dostane vyplaceno 102 000 Kč a po 8 měsících zaplatí 114 000 Kč.

Poznámka. Hodnota dluhu se dá také vypočítat tak, že od nominální hodnoty dluhu odečteme obchodní diskont za 4 měsíce.

$$D_{\text{ob}} = K_t \cdot i_D \cdot t = 120\,000 \cdot 0{,}15 \cdot 4/12 = 120\,000 \cdot 0{,}15 \cdot 1/3 = 6\,000 \text{ Kč}.$$

Klient zaplatí za 8 měsíců 120 000 − 6 000 = 114 000 Kč.



Otázky k zamyšlení

1. Klient měl od 8.3.2000 do 5.5.2000 uloženo ve spořitelně 15 000,00 Kč na 8 % úrokovou sazbu p. a. Kolik Kč činil úrok za tuto dobu? [193,33 Kč]
2. Vypočítejte úrokový výnos a konečnou hodnotu při vkladu $K_0 = 3\,000$ Kč při 4 % p. a. za 2 roky. [$u = 240$ Kč, $K_t = 3\,240$ Kč]
3. Na jakou dobu musíme investovat 800 Kč při při úrokové sazbě 5 % p. a., abychom získali na úrocích 120 Kč? [$t = 3$ roky]
4. Jaká byla roční úroková míra při vkladu 700 Kč, abychom na úroku získali 42 Kč za 3 roky? [$i = 3\,\%$]
5. Vypočítejte současnou hodnotu K_0, jestliže za 2 roky při 6 % p. a. byla hodnota vkladu 784 Kč. [$K_0 = 700$ Kč]
6. Pan Vozáblo si vypůjčil 7 500 Kč při úrokové sazbě 7 % p. a. dne 10. dubna. 10. května splatil polovinu dluhu a celou částku úroku dlužnou k 10. květnu. Kolik celkem zaplatil bance? [3 794 Kč]
7. Vypočítejte úrok pomocí UC, UD, jestliže klient uložil do banky 4.1. částku 8 000 Kč, dne 18.2. částku 4 500 Kč a 14.4. částku 2 400 Kč. Úroková sazba byla 6 % p. a. Kolik Kč získal klient za tuto dobu na úrocích? [$u = 811{,}066$ Kč]
8. Na jakou hodnotu se zúročil vklad 120 000 Kč za 2 roky, 8 měsíců a 21 dní, je-li úročen v bance při úrokové sazbě 6 % p. a.? [$K_t = 140\,697{,}20$ Kč]
9. Podnikatel prodá bance směnku v nominální hodnotě 200 000 Kč, která je splatná za 2 roky. Podle stavu nabídky a poptávky po cenných papírech na burze jí banka kupuje s diskontní sazbou 15 % p. a. Kolik Kč obdrží podnikatel za směnku? [140 000 Kč]

10. Dlužník vystavil dlužní úpis na 20 000 Kč, splatných i s úrokem za 8 měsíců při 8 % p. a. Za měsíc po vystavení dlužního úpisu jej věřitel prodal jiné osobě, která diskontuje dlužní úpisy 9 % p. a. Kolik dostane věřitel za dlužní úpis? [20 015,84 Kč]

- Základní vztahy pro složené úročení
- Kombinace jednoduchého a složeného úročení
- Výpočet doby splatnosti při složeném úročení
- Výpočet současné hodnoty
- Výpočet úrokové sazby
- Výpočet úroku při složeném úročení
- Srovnání jednoduchého a složeného úročení

3. Složené úročení

Cíl kapitoly

V první kapitole jsme mluvili o jednoduchém úročení, kde se úroky počítali vždy z počátečního uloženého kapitálu. V následující kapitole se seznámíme s výpočtem úroků, kdy se tento úrok počítá již z úročeného kapitálu. To znamená, že koncem úrokovacího období se k vloženému kapitálu připočítá úrok a z takto již zúročeného kapitálu na konci dalšího úrokovacího období se vypočítá úrok nový. Cílem je tedy pochopit tento způsob úročení a uvědomění si, že lze roční úrokovací období rozdělit na období kratší než jeden rok a dokonce zavést i spojité úrokovací období, v teorii nejen finanční matematiky, ale i pojistné matematiky používané. Důležitou částí této kapitoly je z uvedených výrazů vypočítat pro nás potřebné hodnoty a v praxi je použít. Dalším důležitým pojmem je kombinace jednoduchého a složeného úročení a z odvozených výrazů výpočet jednotlivých hodnot, které jsou pro běžnou praxi potřebné.

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 12 hod.

Úvod

Doposud jsme vycházeli z toho, že se úroky počítají stále ze stejného základu – **úroky rostly lineárně**.

Složené úročení vychází z toho, že se úroky připočítávají k původnímu kapitálu a v následujícím období se tento zúročený kapitál bere jako základ pro další úročení. **Úročí se tedy zúročený kapitál**. Složené úročení je možno rozdělit na **úročení předlhůtní a polhůtní**.

3.1 Základní vztahy pro složené úročení

Označme

K_0 – původní (počáteční) kapitál,
i – úroková sazba v setinách,
t – doba splatnosti kapitálu v letech,
K_t – výše kapitálu v době $t = 1, 2, 3, \ldots$

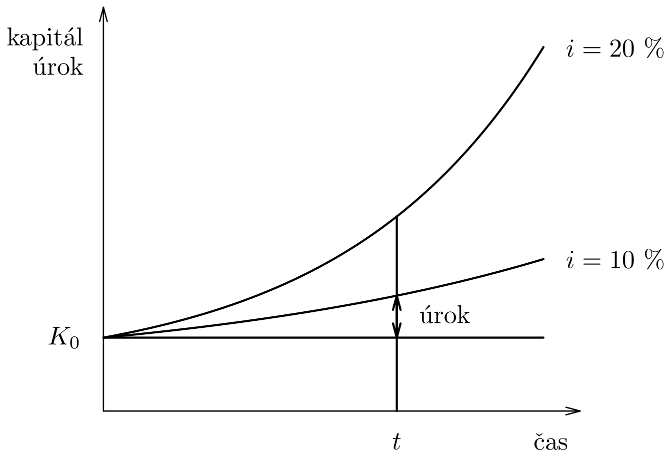
Rok	Stav kapitálu na konci roku	
1	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1+i)$	$= K_0.(1+i)$
2	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1(1+i) = K_0(1+i)(1+i)$	$= K_0(1+i)^2$
3	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2(1+i) = K_0(1+i)^2(1+i)$	$= K_0(1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$K_t = K_{t-1} + K_{t-1} \cdot i = K_0(1+i)^{t-1}(1+i)$	$= K_0(1+i)^t$

Z naší tabulky vidíme, že na konci jednotlivých let stavy kapitálu tvoří geometrickou posloupnost, kde se **kvocient rovná úrokovacímu faktoru** $1+i$.

Tedy $a_1 = K_0$ a $q = 1 + i$.

Přirozené mocniny úrokovacího faktoru se nazývají **uročitelé** a udávají, jak vzroste vklad 1 Kč za dobu t **při úrokové sazbě** i za předpokladu, že $K_0 = 1$ Kč.

Celkový úrokový výnos neroste jako u jednoduchého úročení lineárně, ale **exponenciálně**.



Obrázek 3.1: Závislost úroku a výše kapitálu na době splatnosti

Základní rovnice pro složené úročení tedy bude

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t.$$

Tato rovnice platí za předpokladu, že t je **celé kladné číslo a úročení probíhá koncem každého roku**.

Příklad 3.1.

Uložili jsme částku 12 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za 3 roky při složeném úročení, jestliže úroková sazba bude 5 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 \cdot (1 + i)^t, \\ K_t &= 12\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^3 = 12\,000 \cdot 1{,}157625 = 13\,891{,}50 \text{ Kč.} \end{aligned}$$

Konečná hodnota kapitálu bude 13 891,50 Kč.

Předpokládejme, že t je **celé kladné číslo**, ale **úrokovací období je kratší než jeden rok**. Úrokování probíhá **m-krát za rok**.

Označme opět

K_0 – původní (počáteční) kapitál,
i – roční úroková sazba v setinách,
$\frac{i}{m}$ – úroková sazba za jednu m-tinu roku,
K_m – stav kapitálu na konci m-té části roku.

Část roku	Stav kapitálu na konci m-té části roku	
1	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{i}{m} = K_0(1+\frac{i}{m})$	$= K_0(1+\frac{i}{m})$
2	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{i}{m} = K_1(1+\frac{i}{m}) = K_0(1+\frac{i}{m})(1+\frac{i}{m})$	$= K_0(1+\frac{i}{m})^2$
3	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot \frac{i}{m} = K_2(1+\frac{i}{m}) = K_0(1+\frac{i}{m})^2(1+\frac{i}{m})$	$= K_0(1+\frac{i}{m})^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$K_m = K_{m-1} + K_{m-1}\frac{i}{m} = K_{m-1}(1+\frac{i}{m})^{m-1}(1+\frac{i}{m})$	$= K_0(1+\frac{i}{m})^m$

Stav kapitálu úročený m-krát za rok bude na konci roku

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

a za t let bude

$$K_t = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right]^t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}.$$

Příklad 3.2.

Jako v předcházejícím příkladu jsme si uložili 12 000 Kč. Jaká bude výše kapitálu za 3 roky při složeném úročení polhůtním, jestliže úrokovací období bude čtvrtletní a úroková sazba činí 5 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned} K_t &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}, \\ K_t &= 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 12\,000 \cdot 1{,}0125^{12} = 12\,000 \cdot 1{,}1607545 = \\ &= 13\,929{,}054 \text{ Kč}. \end{aligned}$$

Konečná hodnota kapitálu při stanovených podmínkách bude 13 929,054 Kč.

3.2 Kombinace jednoduchého a složeného úročení

Ke kombinaci jednoduchého a složeného úročení dochází tehdy, jestliže jsou úroky připisovány po určitou dobu k počátečnímu vkladu a s ním dále úročeny (složené úročení), ale na konci je nutno vypočítat úrok za dobu kratší než je úrokovací období (kratší než jeden rok – jednoduché úročení).

Nechť platí podmínka

- $t \neq$ kladné celé číslo,
- $t = n + R$, kde n je číslo, které udává počet celých ukončených let a $R < 1$ (je číslo menší než 1), je číslo, které udává neukončené úrokovací období (část roku).

Počáteční kapitál K_0 nejprve úročíme složeným úročením po celou dobu n let

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n.$$

Tento kapitál K_n pak úročíme jednoduchým úročením po dobu R, tedy po dobu posledního neukončeného roku (po zbytek splatnosti, část roku).

$$K_t = K_n \cdot (1 + R \cdot i),$$
$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + R \cdot i).$$

Dosadíme-li za K_n předcházející výraz, obdržíme hodnotu kapitálu na konci úrokovacího období $t = n + R$.

Jestliže se úroky připisují m-krát do roka a doba t není celé číslo, potom můžeme dobu t opět zapsat $t = n + R$.

Konečnou hodnotu kapitálu za dobu t pak určíme podobným způsobem jako v předcházejícím vztahu.

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n.$$

Konečnou hodnotu kapitálu K_t pak vypočítáme jednoduchým úročením zúročené výše kapitálu K_n

$$K_t = K_n \cdot (1 + R \cdot i).$$

Jestliže dosadíme za K_n předcházející výraz, dostaneme konečný vztah pro výpočet kapitálu K_t

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n \cdot (1 + R \cdot i).$$

Jestliže úrokové období nebude roční, bude číslo n vyjadřovat počet ukončených úrokových období a číslo R pouze část úrokového období. Potom je nutno dělit roční úrokovou sazbu počtem úrokových období za rok.

Příklad 3.3.

Na kolik vzroste vklad 15 000 Kč uložený na 3 roky a 2 měsíce při úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení. $K_t = ?$, $K = 15\,000$, $i = 0{,}05$, $t = 3$ roky a 2 měsíce $= 3{,}16666$ roku, $n = 3$ roky, $R = 0{,}1666$ roku.

$$\begin{aligned}
K_t &= K_0 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + R \cdot i),\\
K_t &= 15\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^3 \cdot (1 + 0{,}16666 \cdot 0{,}05) = 15\,000 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}008333\\
&= 17\,509{,}072,\\
K_t &= 17\,509{,}072 \text{ Kč}.
\end{aligned}$$

Poznámka. Pokud bychom řešili tento příklad podle výrazu $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$, byl by výsledek následující

$$K_t = 15\,000 \cdot (1 + 0{,}05)^{3{,}16666} = 15\,000 \cdot 1{,}05^{3{,}16666} = 17\,506{,}147 \text{ Kč}.$$

3.3 Výpočet doby splatnosti při složeném úročení

Výpočet doby splatnosti při složeném úročení počítáme podle daných podmínek třemi způsoby:

a) t **je celé kladné číslo**, úročení roční p. a.
b) t **není celé kladné číslo**, úročení roční p. a.
c) t **není celé kladné číslo**, úročení je m-krát do roka.

a) $t \in \mathbb{N}$, úročení roční p. a.

Při této úloze vycházíme ze základního vzorce pro složené úročení $K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$. Jelikož chceme vypočítat t, celou rovnici zlogaritmujeme a z ní vypočítáme dobu t.

Odvození: rovnici logaritmujeme

$$\ln K_t = \ln K_0 + t \cdot \ln(1+i),$$

$$\ln K_t - \ln K_0 = t \cdot \ln(1+i) \Rightarrow t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{\ln(1+i)}.$$

b) $t \notin \mathbb{N}$, úročení roční p. a.

Jestliže t není celým kladným číslem, použijeme nejdříve rovnici předcházející pro výpočet celých roků a R dopočítáme podle jednoduchého úročení. n volíme jako **nejbližší nižší přirozené číslo**.

Označme $n = n_0$, potom

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i),$$

$$1 + R \cdot i = \frac{K_t}{K_0 \cdot (1+i)^{n_0}}$$

$$R \cdot i = \frac{K_t}{K_0 \cdot (1+i)^{n_0}} - 1$$

$$R = \frac{K_t}{i \cdot K_0 \cdot (1+i)^{n_0}} - \frac{1}{i} = \frac{K_t - K_0 \cdot (1+i)^{n_0}}{i \cdot K_0 \cdot (1+i)^{n_0}} = \frac{\frac{K_t}{K_0} - (1+i)^{n_0}}{i \cdot (1+i)^{n_0}}$$

Takže zbytek úrokovacího období (část úrokovacího období) vypočítáme

$$R = \frac{\frac{K_t}{K_0} - (1+i)^{n_0}}{i \cdot (1+i)^{n_0}}.$$

Jestliže je úrokovací období kratší než 1 rok, vycházíme pro výpočet doby t z výrazu $K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$. Rovnici upravíme logaritmováním na tvar

$$\ln K_t = \ln K_0 + m \cdot t \cdot \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right),$$

$$\ln K_t - \ln K_0 = m \cdot t \cdot \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right),$$

$$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{m \cdot \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)}.$$

Jelikož $t \notin \mathbb{N}$, rozložíme jej v součet $t = n_0 + R$.

Zbytek doby splatnosti R zpřesníme podle vztahu

$$R = \frac{\frac{K_t}{K_0} - (1 + \frac{i}{m})^{n_0}}{i \cdot (1 + \frac{i}{m})^{n_0}}.$$

Příklad 3.4.

Jak dlouho byl uložen kapitál 2 300 000 Kč, jestliže vzrostl při 9 % úroku p. a. při složeném úrokování na hodnotu 4 995 347 Kč?

Řešení.

$$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{\ln(1 + i)},$$

$$t = \frac{\ln 4\,995\,347 - \ln 2\,300\,000}{\ln(1 + 0{,}09)} = \frac{15{,}4240 - 14{,}6484}{0{,}0861} = 9{,}00.$$

Jednalo se o dlouhodobé uložení kapitálu na dobu 9 let.

Příklad 3.5.

Máme zjistit, jak dlouho byl uložen kapitál ve výši 15 000 Kč, jestliže při složeném úročení a úrokové sazbě 4 % p. a. vzrostl na 21 000 Kč.

Řešení.

$$t = \frac{\ln 21\,000 - \ln 15\,000}{\ln(1 + 0{,}04)} = \frac{9{,}9522 - 9{,}6158}{0{,}0392} = 8{,}5816.$$

Zpřesňujeme: $t = n_0 + R$, $n_0 = 8$.

$$R = \frac{\frac{K_t}{K_0} - (1 + i)^{n_0}}{i \cdot (1 + i)^{n_0}},$$

$$R = \frac{\frac{21\,000}{15\,000} - (1 + 0{,}04)^8}{0{,}04 \cdot (1 + 0{,}04)^8} = \frac{1{,}4 - 1{,}3685}{0{,}04 \cdot 1{,}3685} = 0{,}5754 \text{ let} = 0{,}5754 \cdot 360 \text{ dní}$$

$$= 207 \text{ dní} = 6 \text{ měsíců a } 27 \text{ dní}.$$

Za daných podmínek byl kapitál uložen 8 let 6 měsíců a 27 dní.

Příklad 3.6.

Máme určit dobu splatnosti kapitálu, který při složeném pololetním úročení vzrostl ze 150 000 Kč při úrokové sazbě 4 % p. s. na 180 000 Kč.

Řešení.

$$t = \frac{\ln K_t - \ln K_0}{m \cdot \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)},$$

$$t = \frac{\ln 180\,000 - \ln 150\,000}{2 \cdot \ln\left(1 + \frac{0{,}04}{2}\right)} = \frac{12{,}1007 - 11{,}9183}{2 \cdot 0{,}0498} = \frac{0{,}1824}{0{,}0396} = 4{,}606 \text{ let} =$$

$$= 4{,}606 \cdot 12 \text{ měsíců} = 55{,}2720 \text{ měsíců}.$$

1 úrokovací období = 6 měsíců, tedy máme 55,2720/6 = 9,2120 úrokovacích období; $n_0 = 9$. Zpřesňujeme:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\frac{K_t}{K_0} - (1+\frac{i}{m})^{n_0}}{i \cdot (1+\frac{i}{m})^{n_0}} \\
R &= \frac{\frac{180\,000}{150\,000} - (1+\frac{0{,}04}{2})^{9}}{0{,}04 \cdot (1+\frac{0{,}04}{2})^{9}} = \frac{1{,}2 - 1{,}195}{0{,}0478} = 0{,}1046 \text{ let} = 0{,}1046 \cdot 360 \text{ dní} = \\
&= 37{,}656 \text{ dní} = 38 \text{ dní} = 1 \text{ měsíc a } 8 \text{ dní.}
\end{aligned}$$

$t = n_0 + R = 9$ úrokovacích období + 1 měsíc a 8 dní = $9 \cdot 6$ měsíců + 1 měsíc + 8 dní = 55 měsíců a 8 dní = 4 roky 7 měsíců a 8 dní.

Aby za daných podmínek vzrostl počáteční kapitál na 180 000 Kč, musel by být uložen po dobu 4 let 7 měsíců a 8 dní.

3.4 Výpočet současné hodnoty

Značný význam pro nás má současná hodnota, neboť nám umožňuje porovnat hodnotu kapitálu v čase. V běžné praxi stojíme před úkolem zjistit, jakou výši kapitálu musíme uložit, abychom dosáhli v určitém čase t budoucí hodnotu kapitálu. Čím dříve máme potřebný kapitál, tím dříve jej můžeme uložit nebo investovat a přináší nám úroky.

Při výpočtu současné hodnoty kapitálu vycházíme ze základních výrazů pro složené úročení:

a) $t \in \mathbb{N}$, úročení roční p. a.

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t.$$

Z této rovnice vypočítáme K_0

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)}^{t}.$$

Jestliže $K_t = 1$, Kč potom výraz

$$\frac{1}{(1+i)^t}$$

nazýváme **odúročitel** a značí současnou hodnotu 1 Kč splatné za t let při úrokové sazbě i.

b) $t \notin \mathbb{N}$, úročení je m-krát do roka

Potom vycházíme ze vztahu

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} \Rightarrow K_0 = \frac{K_t}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}}.$$

c) $t \notin \mathbb{N}$, úročení roční p. a.

Jestliže chceme vypočítat současnou hodnotu při znalosti budoucí hodnoty a není-li doba splatnosti t vyjádřena celým kladným číslem, vypočítáme ji

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i)},$$

kde n_0 je nejbližší přirozené číslo k číslu t a $R = t - n_0$.

d) $t \notin \mathbb{N}$, úročení m-krát do roka

Potom

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{i}{m})^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i)},$$

kde n_0 je nejbližší celé kladné číslo k číslu t a $R = t - n_0$.

Příklad 3.7.

Kolik musíme uložit, abychom za 5 let při úrokové sazbě 5 % p. a. získali kapitál ve výši 100 000 Kč? Úročení je složené.

Řešení.

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{K_t}{(1+i)^t}, \\ K_0 &= \frac{100\,000}{(1+0{,}05)^5} = \frac{100\,000}{1{,}05^5} = 78\,352{,}614 \text{ Kč}. \end{aligned}$$

Abychom za 5 let měli kapitál 100 000 Kč, musíme dnes uložit 78 352,614 Kč.

Příklad 3.8.

Máme možnost koupit osobní automobil. Je pro nás výhodnější zaplatit hotově 240 000 Kč nebo dát přednost splátkovému způsobu platby a zaplatit zálohu hotově ve výši 120 000 Kč a za 3 roky doplatit zbytek ve výši 160 000 Kč při úrokové sazbě 8 % p. s. a při složeném úročení?

Řešení. Naším úkolem je porovnat oba způsoby:

a) zaplacení v hotovosti 240 000 Kč,
b) splátkový způsob placení: zálohou 120 000 Kč a splátkou, jejíž současná hodnota je

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{K_t}{(1+\frac{i}{m})^{m \cdot t}}, \\ K_0 &= \frac{160\,000}{(1+\frac{0{,}08}{2})^{2 \cdot 3}} = \frac{160\,000}{1{,}265319} = 126\,450{,}33 \text{ Kč}. \end{aligned}$$

Splátkový způsob platby = záloha + K_0 = 120 000 Kč + 126 450,33 Kč = 246 450,33 Kč.

$$240\,000 < 246\,450{,}33$$

Z numerického hlediska je výhodnější zaplatit ihned 240 000 Kč než splátkový způsob. Tento způsob platby je však výhodnější pro kupujícího, neboť vzhledem k ceně automobilu je cena vyšší o 6 450,33 Kč, což jsou pouze 2,68763 % z pořizovací ceny automobilu.

Příklad 3.9.

Kolik musíme dnes uložit korun, abychom za 5 let 3 měsíce a 24 dní měli na kontě částku ve výši 500 000 Kč, jestliže banka nabídla 5 % úrokovou sazbu p. a. a složené úročení?

Řešení. $n_0 = 5$ let, $R = (3 \cdot 30 + 24)/360 = 0{,}31666$

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{K_t}{(1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i)}, \\ K_0 &= \frac{500\,000}{(1+0{,}05)^5 \cdot (1 + 0{,}31666 \cdot 0{,}05)} = \frac{500\,000}{1{,}27628 \cdot 1{,}0158} = \\ &= 385\,668{,}56 \text{ Kč.} \end{aligned}$$

Při daných podmínkách musíme dnes uložit 385 668,56 Kč.

Příklad 3.10.

Použijme přecházejícího příkladu se čtvrtletním úročením, tedy $m = 4$.

Řešení. $t = 5 \cdot 12 + 3 + 24/30 = 60 + 3 + 0{,}8 = 63{,}8$ měsíců. $63{,}8/3 = 21{,}266667$, tedy $n_0 = 21$, $R = 0{,}266667$.

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{K_t}{(1+\frac{i}{m})^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i)} \\ K_0 &= \frac{500\,000}{(1+\frac{0{,}05}{4})^{21} \cdot (1 + 0{,}266667 \cdot 0{,}05)} = \frac{500\,000}{1{,}298063 \cdot 1{,}0133334} = \\ &= \frac{500\,000}{1{,}3153706} = 380\,121{,}01 \text{ Kč.} \end{aligned}$$

Abychom měli při daných podmínkách za 5 let 3 měsíce a 24 dní 500 000 Kč, musíme dnes uložit 380 121,01 Kč.

3.5 Výpočet úrokové sazby

Jestliže chceme zjistit, jaká je úroková sazba, vycházíme z podmínek, za kterých jsme ukládali nebo si vypůjčovali kapitál. Při řešení těchto úloh použijeme již dříve odvozené vztahy.

a) $t \in \mathbb{N}$, úročení je roční p. a.

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \Rightarrow (1+i)^t = \frac{K_t}{K_0} \Rightarrow 1 + i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} \Rightarrow i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1.$$

Tedy

$$i = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1.$$

b) $t \in \mathbb{N}$, úročení je m-krát do roka

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} \Rightarrow \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} = \frac{K_t}{K_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{i}{m} = \sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} \Rightarrow \frac{i}{m} = \sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1.$$

Z toho úroková sazba bude

$$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right).$$

c) $t \notin \mathbb{N}$, $t = n_0 + R$, úročení m-krát za rok

$$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right) \Rightarrow i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot (n_0 + R)]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right).$$

Příklad 3.11.

Jaká byla úroková sazba, jestliže kapitál 20 000 Kč vzrostl za 4 roky na 27 400 Kč? Úročení bylo složené.

Řešení.

$$\begin{aligned} i &= \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1, \\ i &= \sqrt[4]{\frac{27\,400}{20\,000}} - 1 = \sqrt[4]{1{,}37} - 1 = 1{,}0818 - 1 = 0{,}0818, \\ p &= 100 \cdot i = 8{,}18\,\%. \end{aligned}$$

Kapitál byl úročen úrokovou sazbou 8,18 %.

Příklad 3.12.

Kolika procenty byl úročen vklad 20 000 Kč, jestliže vzrostl na 30 000 Kč při složeném úročení dvakrát za rok ($m = 2$)?

Řešení.

$$\begin{aligned} i &= m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right), \\ i &= 2 \cdot \left(\sqrt[2 \cdot 4]{\frac{30\,000}{20\,000}} - 1 \right) = 2 \cdot \left(\sqrt[8]{1{,}5} - 1 \right) = 2 \cdot 0{,}0519 = 0{,}1038, \\ p &= 100 \cdot i = 10{,}38\,\%. \end{aligned}$$

Vklad byl za daných podmínek úročen sazbou 10,38 %.

Příklad 3.13.

Jaká je úroková sazba, jestliže kapitál 20 000 Kč vzrostl za 4 roky 2 měsíce a 21 dní na 30 000 Kč? Úročeno složeným kombinovaným způsobem 4-krát do roka.

Řešení.

$$\begin{aligned} i &= m \cdot \left(\sqrt[m \cdot (n_0 + R)]{\frac{K_t}{K_0}} - 1 \right), \\ i &= 4 \cdot \left(\sqrt[4 \cdot (4 + 0{,}225)]{\frac{30\,000}{20\,000}} - 1 \right) = 4 \cdot 0{,}0242821 = 0{,}0971284, \\ p &= 100 \cdot i = 9{,}7128\,\%. \end{aligned}$$

3.6 Výpočet úroku při složeném úročení

Stejně jako u jednoduchého úročení nás zajímá výše úroku, kterou nám připíše peněžní ústav za určitou dobu vkladu nebo kterou připočítá dlužníkovi k jeho úvěru. Podle daných podmínek potom vybíráme rovnici pro zúročený kapitál, z níž úrok odvozujeme.

a) $t \in \mathbb{N}$, úročení je roční p. a.

$$K_t = K_0 + u \Rightarrow u = K_t - K_0, \quad \text{kde } K_t = K_0 \cdot (1+i)^t.$$

Po dosazení za K_t dostaneme

$$u = K_0 \cdot (1+i)^t - K_0 = K_0 \cdot \left[(1+i)^t - 1\right].$$

b) $t \in \mathbb{N}$, úročení je m-krát do roka

$$u = K_t - K_0, \quad \text{kde } K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t},$$

takže

$$u = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} - K_0 = K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} - 1\right].$$

c) $t \notin \mathbb{N}$, úročení je roční p. a.

$$\begin{aligned}
u &= K_t - K_0, \quad \text{kde } K_t = K_0 \cdot (1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i),\\
u &= K_0 \cdot (1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i) - K_0,\\
u &= K_0 \cdot \left[(1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i) - 1\right].
\end{aligned}$$

d) $t \notin \mathbb{N}$, úročení je m-krát do roka

$$\begin{aligned}
u &= K_t - K_0, \quad \text{kde } K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i),\\
u &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i) - K_0,\\
u &= K_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i) - 1\right].
\end{aligned}$$

Příklad 3.14.

Jaká bude výše úroku za 3 roky z kapitálu 200 000 Kč, při úrokové sazbě 10,5 % p. a.? Úročení je složené.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
u &= K_0 \cdot \left[(1+i)^t - 1\right], \\
u &= 200\,000 \cdot \left[(1+0{,}105)^3 - 1\right] = 200\,000 \cdot 0{,}3492 = 69\,840 \text{ Kč.}
\end{aligned}
$$

Úrok bude činit 69 840 Kč, takže klient bude mít na kontě částku 269 840 Kč.

Příklad 3.15.

Použijeme stejného zadání jako v příkladu 3.14, ale úrokování probíhá čtvrtletně, tedy p. q.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
u &= K_0 \cdot \left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} - 1\right], \\
u &= 200\,000 \cdot \left[\left(1+\frac{0{,}105}{4}\right)^{4\cdot 3} - 1\right] = 200\,000 \cdot 0{,}3647 = 72\,940 \text{ Kč.}
\end{aligned}
$$

Bude-li úrok připisován čtvrtletně, jeho výše za 3 roky bude 72 940 Kč. Proti předcházejícímu příkladu bude rozdíl činit 72 940 − 69 840 = 3 100 Kč.

Příklad 3.16.

Jaká bude výše připsaného úroku za 3 roky 7 měsíců a 24 dní z vkladu 1 mil. Kč, jestliže se jedná o složené úročení při 10 % úrokové sazbě?

Řešení. $t = 3$ roky $+ \ 0{,}5833$ roku $+ \ 0{,}0666$ roku $= 3{,}6499$ roku. Tedy $n_0 = 3$ roky, $R = 0{,}6499$ roku.

$$
\begin{aligned}
u &= K_0 \cdot \left[(1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i) - 1\right], \\
u &= 1\,000\,000 \cdot \left[(1+0{,}1)^3 \cdot (1 + 0{,}6499 \cdot 0{,}1) - 1\right] = \\
&= 1\,000\,000 \cdot (1{,}331 \cdot 1{,}06499 - 1) = 1\,000\,000 \cdot 0{,}4175 = 417\,500.
\end{aligned}
$$

Za 3 roky 7 měsíců a 24 dní bude k původnímu kapitálu připsána částka 417 500 Kč.

Příklad 3.17.

Jak velký úrok je započítán klientovi k dluhu 250 000 Kč, který je splatný za 5 let 4 měsíce a 21 dní? Úrokování probíhá složeným způsobem pololetně p. s., při 12 % úrokové sazbě p. a.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
u &= K_0 \cdot \left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i) - 1\right], \\
u &= 250\,000 \cdot \left[\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{10} \cdot (1 + 0{,}7833 \cdot 0{,}12) - 1\right] = \\
&= 250\,000 \cdot (1{,}7908 \cdot 1{,}0939 - 1) = 250\,000 \cdot 0{,}9589 = 239\,725 \text{ Kč.}
\end{aligned}
$$

3.7 Srovnání jednoduchého a složeného úročení

Jednoduché úročení je dáno vztahem

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t).$$

Po roznásobení obdržíme

$$K_t = K_0 + K_0 \cdot i \cdot t,$$

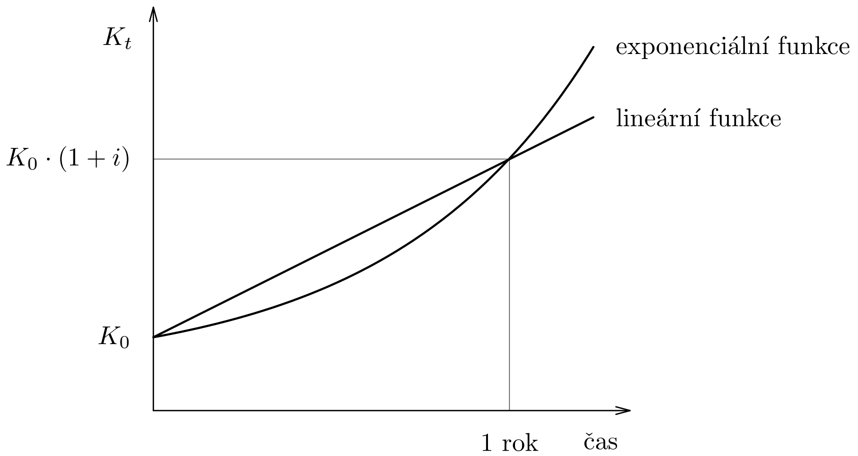
kde $K_0 \cdot i = k$, $K_0 = q$. Jedná se o lineární funkci, jejímž grafem je přímka.

Složené úročení je dáno vztahem

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t,$$

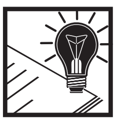
kde $K_0 \cdot (1 + i)$ je základ a t je exponent. Jedná se o exponenciální funkci, jejímž grafem je exponenciální křivka.

Z grafů obou funkcí vidíme, že pro $t \in (0, 1)$ jsou funkční hodnoty exponenciální funkce menší než hodnoty lineární funkce. Pro $t > 1$ je tomu naopak. Pro $t = 1$ jsou obě funkční hodnoty stejné.



Obrázek 3.2: Graf složeného a jednoduchého úročení

Z grafu je zřejmé, že pro $t \in (0, 1)$ je výhodnější pro klienta jednoduché úročení a pro dobu $t > 1$ rok budou úroky při složeném úročení vyšší než při úročení jednoduchém.



Otázky k zamyšlení

1. Určete výši zúročeného kapitálu 12 000 Kč, je-li úroková sazba 12,5 % p. a. při složeném úročení, jestliže úročení je pololetní a tato částka je uložená 3 roky. [17 264,53 Kč]
2. Jak dlouho byl uložený kapitál 2 300 000 Kč jestliže při složeném úročení vzrostl na hodnotu 4 995 347 Kč při úrokové sazbě 9 % p. a.? [8 let, 11 měsíců, 29 dní]

3. Kolik musíme dnes uložit, abychom za 5 let, 3 měsíce a 24 dní měli na kontě 1 mil. Kč? Úrokování je složené při úrokové sazbě 4 % p. a.

[811 646,25 Kč]

4. Jak dlouho bylo uloženo 15 000 Kč, jestliže tento vklad vzrostl na 21 000 Kč při složeném úročení a 4 % úrokové sazbě p. a.?

[8 let, 6 měsíců, 27 dní]

5. Určete úrokovou míru p. a., při které se zvýší:

a) 4 400 Kč na 8 500 Kč za 16 let při čtvrtletním složeném úročení,
b) 4 000 Kč na 15 000 Kč za 20 let při pololetní složeném úročení,
c) počáteční hodnota kapitálu na svůj dvojnásobek za 16 let, při měsíční úročení.

[a) $p = 4{,}1366\,\%$, b) $p = 6{,}7\,\%$, c) $p = 4{,}4\,\%$]

6. Určete počet let (se zaokrouhlením na poslední čtvrtletí, měsíc, tam kde je to potřebné) za jaký se zvýší:

a) 1 000 Kč na 1 500 Kč při čtvrtletním složeném úročení a úrokové sazbě 4 % p. a.,
b) 2 000 Kč na 4 000 Kč při složeném měsíčním úročení a roční úrokové sazbě 5 %,
c) počáteční hodnota kapitálu na svůj trojnásobek při ročním složeném úročení s úrokovou sazbou 4 %.

[a) $n \approx 10\frac{1}{4}$ roku, b) $n \approx 13\frac{3}{4}$ roku, c) $n = 28$ let]

7. Před osmi lety uložil otec synovi kapitál na $3\frac{1}{4}\,\%$ p. a. při čtvrtletním složeném úročení. Jestliže syn na konci osmého roku vybral 8 091,90 Kč jako konečnou hodnotu včetně úrokového výnosu, jaká byla počáteční hodnota? [$K_0 = 6\,245{,}831$ Kč]

8. Když klient uložil 1.1.1989 v bance 10 000 Kč, měla banka $2\frac{3}{4}\,\%$ p. a. úrokovou sazbu a úrokovací období bylo pololetní. K 1.1.1994 banka oznámila, že počínaje tímto datem bude úroková sazba 3 % p. a. při složeném čtvrtletním úročení. Jakou hodnotu bude mít uložený kapitál k 1.1.1999? [$K_0 = 13\,310{,}97196$ Kč]

9. Jestliže si vypůjčí klient 8 900 Kč při $5\frac{1}{4}\,\%$ p. a. úrokové sazbě při složené ročním úročení a jestliže splatí na konci prvního roku 2 000 Kč a na konci druhého roku 3 000 Kč, kolik činí zůstatek dluhu splatného za 3 roky? [$I = 0{,}0525$; $5\,003{,}63$ Kč]

10. Dva kapitály, jejichž součet je 12 000 p. j., jsou uložené za těchto podmínek:

a) na jednoduchý úrok při 12 % roční úrokové sazbě,
b) na složený úrok při 8 % roční úrokové sazbě.

Po deseti letech budou mít stejnou hodnotu. Vypočítejte jejich velikost.

[$A = 5\,943{,}5$; $B = 6\,056{,}5$]

11. Jan vložil do banky 3 000 Kč, po dvou letech vložil dalších 5 000 Kč. Po dalších dvou letech měl na kontě 12 088,05 Kč. Jaká byla roční úroková sazba při pololetním složeném úročení? [$p = 10\,\%$]

- Efektivní úroková sazba
- Úroková intenzita
- Nominální a reálná úroková sazba

4. Nominální a reálná úroková sazba

Cíl kapitoly

V této části studijního textu se seznámíme s vlivem inflace na nominální úrokovou sazbu a uvedeme si problematiku pojmů reálná úroková sazba, efektivní úroková sazba a úroková intenzita. Znalost těchto pojmů nám usnadní chápání důležitých pojmů v jiných ekonomických kurzech na této fakultě.

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 6 hod.

4.1 Efektivní úroková sazba

V předcházejících úlohách jsme viděli, že při stejné roční nominální úrokové sazbě je pro vkladatele výhodnější, jestliže se úroky připisují vícekrát ročně než jednou za rok, neboť se tento již zúročený kapitál opět úročí.

Připisují-li se úroky na konci každé $1/m$ roku, bude celkový úrok při stejné úrokové sazbě (za předpokladu dalšího úročení těchto úroků) vyšší než v případě, že se úroky připisují pouze jednou na konci roku. Jestliže má být dosaženo při obou způsobech připisování úroků stejného finančního efektu, musí být nominální úroková sazba při ročním úrokovacím období vyšší než při úrokovacím období kratším než jeden rok. Takovou roční úrokovou sazbu budeme nazývat **efektivní úrokovou sazbou**.

Jestliže má být výše kapitálu na konci roku stejná při obou způsobech úročení, musí pro efektivní úrokovou sazbu platit vztah

$$1 + i_{\text{efekt.}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m, \quad \text{kde } i_{\text{efekt.}} \text{ je } \textbf{efektivní úroková sazba}.$$

Potom

$$i_{\text{efekt.}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1.$$

Příklad 4.1.

Máme najít efektivní úrokovou sazbu, která odpovídá 10 % nominální úrokové sazbě, jestliže jsou úroky připisovány: a) pololetně, b) čtvrtletně, c) měsíčně.

Řešení.

a) $m = 2$

$$i_{\text{efekt.}} = 1{,}05^2 - 1 = 0{,}1025.$$

Efektivní úroková sazba je 10,25 %.

b) $m = 4$

$$i_{\text{efekt.}} = 1{,}025^4 - 1 = 0{,}1038.$$

Efektivní úroková sazba je 10,38 %.

c) $m = 12$

$$i_{\text{efekt.}} = 1{,}0083^{12} - 1 = 0{,}1047.$$

Efektivní úroková sazba je 10,47 %.

Z uvedeného příkladu je vidět, že čím častěji se během roku úročí, tím je pro klienta toto úročení výhodnější, neboť efektivní úroková sazba s počtem úrokovacích období roste.

4.2 Úroková intenzita

Doposud jsme časové intervaly uvažovali odděleně (diskrétně). Předpokládejme, že počet úrokovacích období, v kterých se připisují úroky, poroste až do **nekonečna** a jejich délka se zkracuje a teoreticky **klesá k nule**. V takovém případě mluvíme o **spojitém úročení**. **Úroková sazba**, která odpovídá tomuto případu, se nazývá **úroková intenzita**.

Pro úrokovací intenzitu platí

$$1 + i_{\text{efekt.}} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m.$$

Z matematiky víme, že $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828$ – **Eulerovo číslo**.

Z tohoto výrazu je vidět, že hodnota 1 Kč vzroste při 100 % úrokové sazbě za 1 rok při spojitém úročení na 2,71828 Kč.

Použijme tohoto vztahu pro výpočet limity

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = \lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^i = e^i, \quad \text{respektive } e^f,$$

kde f je úroková intenzita.

Vztah mezi efektivní úrokovou mírou a intenzitou:

$$i_{\text{efekt.}} = e^f - 1 \Rightarrow f = \ln(1 + i_{\text{efekt.}}).$$

Při spojitém úročení potom platí

$$K_t = K_0 \cdot e^{f \cdot t} \Rightarrow K_0 = \frac{K_t}{e^{f \cdot t}}.$$

Příklad 4.2.

Jaká je úroková intenzita při efektivní úrokové sazbě 10 %?

Řešení.

$$f = \ln(1 + i_{\text{efekt.}}) = \ln(1 + 0{,}10) = 0{,}0953.$$

Úroková intenzita bude 9,53 %.

Příklad 4.3.

Na kolik vzroste kapitál 10 000 Kč za 5 let při spojitém úročení a úrokové sazbě 5 %?

Řešení.

$$K_t = K_0 \cdot e^{f \cdot t} = 10\,000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 5} = 12\,840{,}254.$$

Kapitál při spojitém úročení vzroste na 12 840,254 Kč.

Příklad 4.4.

Jaká je současná hodnota kapitálu, který za 3 roky vzroste na 25 000 Kč při 12,5 % úrokové intenzitě?

Řešení.

$$K_0 = \frac{K_t}{e^{f \cdot t}} = \frac{25\,000}{e^{0{,}125 \cdot 3}} = 17\,182{,}123.$$

Dnes musíme uložit 17 182,123 Kč, abychom za 3 roky při spojitém úročení měli 25 000 Kč.

4.3 Nominální a reálná úroková sazba

Doposud jsme mluvili o nominální úrokové sazbě, to znamená takové, u které jsme neuvažovali inflaci. Každá inflace znehodnocuje nejen kapitál, ale také úroky. Jestliže budeme do hodnoty úrokové sazby zahrnovat i inflaci, budeme hovořit o **reálné úrokové míře** (reálném úroku).

Označme

K_0 – kapitál na počátku úrokovacího období,
K_r – reálná výše kapitálu na konci úrokovacího období,
i – nominální úroková sazba v setinách,
i_r – reálná úroková sazba v setinách,
$i_{\text{inf.}}$ – míra inflace.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že úrokovací období je roční, počáteční kapitál budeme úročit na konci úrokovacího období nominální úrokovou sazbou a pak diskontovat mírou inflace.

$$K_r = K_0 \cdot \frac{1+i}{1+i_{\text{inf.}}}.$$

Na základě reálného kapitálu si vypočítáme reálnou úrokovou sazbu i_r jako poměr výše úroku a počátečního kapitálu.

$$i + r = \frac{K_r}{K_0} - 1 \Rightarrow K_0 \cdot i_r = K_r - K_0 \Rightarrow K_0 \cdot (i_r + 1) = K_r.$$

Dosadíme-li tento vztah do přecházejícího výrazu za K_r, obdržíme

$$K_0 \cdot (i_r + 1) = K_0 \cdot \frac{1+i}{1+i_{\text{inf.}}} \Rightarrow i_r + 1 = \frac{1+i}{1+i_{\text{inf.}}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i_r + i_r \cdot i_{\text{inf.}} + i_{\text{inf.}} + 1 = 1 + i \Rightarrow i = i_r + i_{\text{inf.}} + i_r \cdot i_{\text{inf.}}.$$

Tento vztah se nazývá **Fischerovou rovnicí**.

Poznámka. Při nízké míře inflace a nízké reálné úrokové míře zanedbáváme někdy součin $i_r \cdot i_{\text{inf.}}$ a vztah mezi reálnou a nominální úrokovou mírou volíme $i = i_r + i_{\text{inf.}}$.

Příklad 4.5.

Jestliže zapůjčíme kapitál s tím, že nám bude vrácen za jeden rok a předpokládáme-li nominální úrokovou míru 10 % a míru inflace nulovou, získáme za rok reálně o 10 % více. Jestliže bude míra inflace 15 %, máme za rok reálně o 5 % méně. Získali jsme sice kapitál zvýšený o 10 %, ale za zboží a služby vydáme o 15 % více než dříve.

Otázky k zamyšlení

1. Obligace na 1 000 Kč má nominální úrokovou míru 0,04 p. a. Je-li úrok vyplácen pololetně, jaká je efektivní úroková míra?
 [1 040,40 Kč, $i_{\text{efekt.}} = 4{,}04\,\%$]
2. Jaká je efektivní úroková míra vkladového certifikátu na $p = 5\,\%$ p. a., jsou-li úroky vypláceny čtvrtletně? [$i_{\text{efekt.}} = 5{,}095\,\%$]
3. Klient, který chce uložit 100 000 Kč, se může rozhodnout mezi vkladem na vkladní knížku, která vynáší 2 % p. a. při složeném měsíčním úročení a nákupem obligace (dluhopisu), která vynáší $2\frac{1}{2}\,\%$ p. a. ve dvou stejných pololetních splátkách. Která z těchto alternativ nabízí vyšší výnos? [vkladní knížka 2,02 %, obligace 2,52 %]
4. Jaká roční efektivní úroková míra je ekvivalentní 8 % p. a. při měsíční frekvenci? [8,3 %]
5. Jaká je reálná hodnota kapitálu 35 560 Kč při složeném pololetním úročení kde $p = 2{,}5\,\%$ p. s. za dva roky, jestliže roční míra inflace bude po tyto dva roky konstantní a bude rovna $i_{\text{inf.}} = 0{,}03$? Jaká by byla konečná hodnota vkladu, bude-li míra inflace rovná nule a kolik ztrácíme vlivem inflace na našem vkladu?
 [hodnota s inflací 36 954,38 Kč, bez inflace 39 204,52 Kč, rozdíl 2 250,52 Kč]

- Spoření krátkodobé
- Spoření dlouhodobé
- Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

5. Spoření

Cíl kapitoly

Tato kapitola je velmi důležitá, neboť se v ní seznámíme s problémy opakovaných plateb při různé roční frekvenci, hlavně pak u spoření klientů a vysvětlíme si jednotlivé vztahy i výpočty hodnot z těchto vztahů. Jedná se o nejpoužívanější formu hromadění vlastního kapitálu při konstantních vkladech se střednědobým nebo dlouhodobým horizontem jeho užití. Jedná se tedy o stejné částky ve stejném časovém intervalu. Tyto platby jsou nejjednodušším případem, kdy známe datum první a poslední úložky (platby) a interval úložky je většinou shodný s periodicitou úročení. Platby nastávají buď na konci nebo na počátku úrokovacího období a nebývají spojeny s žádnou podmínkou jako v pojišťovacích ústavech (podmínka dožití se určitého věku, případ smrti atd.).

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 12 hod.

Úvod

V přecházející části jsme se seznámili, jak zjistit konečnou nebo počáteční hodnotu kapitálu, přičemž se jeho hodnota v průběhu času t nezvyšovala ani nesnižovala.

Při výkladu spoření budeme předpokládat, že ukládáme kapitál (peněžní částku) v pravidelných intervalech a naším úkolem bude zjistit, kolik uspoříme i s úroky za určitou dobu.

Toto spoření rozdělíme na:

a) **spoření krátkodobé**
b) **spoření dlouhodobé**

5.1 Spoření krátkodobé

Předpokládejme, že

a) **úrokovací období je jeden rok** – úroky jsou připisovány najednou vždy na konci roku,
b) **pravidelné částky budeme ukládat m-krát za rok** ($m = 2$, $m = 4$, $m = 12$).

Podle toho, zda budeme kapitál ukládat na počátku každé m-tiny roku nebo na konci každé m-tiny roku, budeme rozlišovat:

1) **spoření předlhůtní**
2) **spoření polhůtní**

5.1.1 Spoření krátkodobé předlhůtní

Předpoklady

a) výše vkladu bude **při m úložkách $1/m$ Kč**,

b) **na počátku každé m-tiny** roku budeme **ukládat $1/m$ Kč** při úrokové sazbě i,

c) celková roční naspořená částka se bude rovnat **1 Kč + úrok**.

Úroky z jednotlivých splátek budou:

Pořadí úložky	Úrokovací období	Úrok
1	$m \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m}{m} = \frac{m}{m^2} \cdot i$
2	$(m-1) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{m-1}{m^2} \cdot i$
3	$(m-2) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{m-2}{m^2} \cdot i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$1 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \cdot i$

Celkový úrok počítáme jako součet úroků z jednotlivých vkladů. Tedy

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot [m + (m-1) + (m-2) + \cdots + 1] = \frac{i}{m^2} \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2} = \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i,$$

kde výraz $m + (m-1) + (m-2) + \cdots + 1$ je aritmetická posloupnost. Ze střední školy známe, že součet aritmetické posloupnosti je

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

kde a_1 je první člen aritmetické posloupnosti a a_n je n-tý člen aritmetické posloupnosti. Tento součet lze vypočítat vztahem

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

kde n je počet členů posloupnosti. Součet dané aritmetické posloupnosti tedy bude

$$S_m = \frac{m}{2} \cdot (m+1),$$

neboť $a_1 = m$ je první člen posloupnosti a $a_n = 1$ je poslední člen posloupnosti.

Celková uspořená částka S_1 za **1 rok**, jestliže spoříme každou **$1/m$ roku $1/m$ z 1 Kč**, bude

$$S_1 = 1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i.$$

Jestliže spoříme **x Kč každou $1/m$ roku**, potom můžeme celkovou částku naspořenou za jeden rok vyjádřit

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right).$$

Víme-li, kolik bude činit celková uspořená částka z 1 Kč, potom z částky $x \cdot m$ bude celková naspořená částka $x \cdot m$-krát větší.

Příklad 5.1.

Kolik uspoříme včetně úroků do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové sazbě 5 %?

Řešení.

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

$$S_x = 12 \cdot 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}05\right) = 14\,400 \cdot 1{,}0270833 = 14\,790.$$

Do konce roku uspoříme 14 790 Kč.

5.1.2 Spoření krátkodobé polhůtní

Jestliže budeme ukládat peněžní částky **vždy na konci určitého období**, mluvíme o spoření **polhůtním**. Úrokovací období je opět roční.

Předpoklady

a) výše vkladu bude **při *m* úložkách 1/*m* Kč**,
b) **na konci každé *m*-tiny** roku budeme **ukládat 1/*m* Kč** při úrokové sazbě i,
c) celková roční naspořená částka se bude rovnat **1 Kč + úrok**.

Úroky z jednotlivých splátek budou:

Pořadí úložky	Úrokovací období	Úrok
1	$(m-1) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{m-1}{m^2} \cdot i$
2	$(m-2) \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m-2}{m} = \frac{m-2}{m^2} \cdot i$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$1 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot \frac{m}{m} = \frac{1}{m^2} \cdot i$
m	$0 \cdot \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m} \cdot i \cdot 0$

Tím, že částky jsou ukládány vždy na konci příslušného období (části roku), je oproti předlhůtnímu spoření počet těchto období (po které je vklad úročen) o jednotku nižší. Z poslední úložky již nebudeme mít žádný úrok, neboť bude uložena na konci roku.

Celkový úrok vypočítáme stejně jako u předlhůtního spoření

$$u = \frac{i}{m^2} \cdot [(m-1) + (m-2) + \cdots + 1 + 0] = \frac{i}{m^2} \cdot \frac{m \cdot (m-1)}{2} = \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i,$$

kde výraz $(m-1)+(m-2)+(m-3)+\cdots+1+0$ je aritmetická posloupnost a její součet bude

$$S_m = \frac{m}{2} \cdot [(m-1) + 0],$$

neboť $a_1 = m - 1$ a $a_n = 0$.

Celková uspořená částka za 1 rok S_1', jestliže spoříme koncem každé $1/m$ roku $1/m$ z 1 Kč, bude:

$$S_1' = 1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i.$$

Jestliže spoříme x Kč každou $1/m$ roku, potom můžeme celkovou částku naspořenou za jeden rok vyjádřit

$$S_x' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right).$$

Víme-li, kolik bude činit celková uspořená částka z 1 Kč, potom z částky $x \cdot m$ bude celková naspořená částka $x \cdot m$-krát větší.

Příklad 5.2.

Kolik uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme koncem každého měsíce 1 200 Kč při 5 % úrokové sazbě?

Řešení.

$$\begin{aligned} S_x' &= m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right), \\ S_x' &= 12 \cdot 1\,200 \cdot \left(1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}05\right) = 14\,400 \cdot 1{,}0229167 = 14\,730. \end{aligned}$$

Do konce roku při polhůtním spoření uspoříme 14 730 Kč.

Ze základních vzorců můžeme odvodit další výrazy, které používáme podle potřeby pro výpočet výše vkladu a dosažení naspořené částky na konci roku nebo pro výpočet úrokové sazby.

a) Výpočet výšky vkladu

$$\text{předlhůtní:} \quad x = \frac{S_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}, \qquad \text{polhůtní:} \quad x = \frac{S_x'}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}.$$

b) Výpočet úrokové sazby

$$\text{předlhůtní:} \quad i = \frac{S_x - m \cdot x}{m \cdot x} \cdot \frac{2 \cdot m}{m+1}, \qquad \text{polhůtní:} \quad i = \frac{S_x' - m \cdot x}{m \cdot x} \cdot \frac{2 \cdot m}{m-1}.$$

Příklad 5.3.

Kolik musíme spořit na počátku každého měsíce, abychom za rok naspořili 10 000 Kč při 5 % úrokové sazbě?

Řešení.

$$\begin{aligned} x &= \frac{S_x}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}, \\ x &= \frac{10\,000}{12 \cdot \left(1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}05\right)} = \frac{10\,000}{12{,}325} = 811{,}359. \end{aligned}$$

Abychom za rok uspořili 10 000 Kč, musíme ukládat začátkem každého měsíce 811,359 Kč.

Příklad 5.4.

Jaká je procentní úroková sazba, jestliže za jeden rok uspoříme 10 000 Kč a ukládáme každé čtvrtletí 2 400 Kč?

Řešení.

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{S'_x - m \cdot x}{m \cdot x} \cdot \frac{2 \cdot m}{m-1}, \\
i &= \frac{10\,000 - 4 \cdot 2\,400}{4 \cdot 2\,400} \cdot \frac{8}{3} = 0{,}0416666 \cdot 2{,}6666 = 0{,}1111.
\end{aligned}
$$

Požadovanou částku uspoříme za rok při úrokové sazbě 11,11 %.

5.2 Spoření dlouhodobé

O dlouhodobém spoření hovoříme tehdy, jestliže trvá déle **než jeden rok**. Budeme předpokládat, že v rámci úrokovacího období ukládáme peněžní částku vždy na začátku nebo na konci úrokovacího období, tedy na začátku nebo na konci roku. Daná peněžní částka bude vždy stejná.

5.2.1 Spoření dlouhodobé předlhůtní

Na počátku každého úrokovacího období (v našem případě na počátku každého roku) ukládejme částku a. Naším úkolem bude zjistit, kolik činí **úspory na konci n-tého období** při úrokové sazbě i. Pro určení celkové uspořené částky včetně úroků na konci n-tého období vypočítáme výši vkladů za každý rok, až po n-tý rok, a tyto uspořené částky sečteme.

Odvození výpočtu uspořené částky:

Pořadí úložky	Počet období uložení peněžní částky	Celková hodnota na konci n-tého období
1	n	$a \cdot (1+i)^n$
2	$n-1$	$a \cdot (1+i)^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	$a \cdot (1+i)$

Konečný stav úspor S vypočítáme jako součet hodnot jednotlivých úložek na konci n-tého období.

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1\right].$$

Výraz v závorce je geometrická řada, kde $a_1 = a \cdot (1+i)$ a kvocient pak $q = 1 + i$.

Ze středoškolské matematiky víme, že pro součet geometrické řady platí

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

pro $q > 1$, neboť jde o spoření a vždy $q = 1 + i > 1$. Potom

$$S = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Jestliže $a = 1$ Kč, potom výraz

$$(1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = s'_n$$

nazýváme **střadatelem předlhůtním** a udává, kolik ušetříme za ***n* období** při úrokové sazbě i, jestliže na počátku každého období uložíme 1 Kč. Potom pro výši konečné hodnoty můžeme využít zkráceného vzorce

$$S = a \cdot s'_n.$$

Výpočet velikosti vkladu (splátky, úložky):

$$a = \frac{S \cdot i}{(1+i) \cdot [(1+i)^n - 1]} = \frac{S}{s'_n}.$$

Příklad 5.5.

Kolik uspoříme za 8 let, jestliže budeme ukládat na počátku každého roku 5 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned} S &= a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \\ S &= 5\,000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{0{,}05} = 5\,250 \cdot \frac{0{,}4774554}{0{,}05} = 50\,132{,}817. \end{aligned}$$

Za 8 let uspoříme 50 132,817 Kč.

5.2.2 Spoření dlouhodobé polhůtní

Jestliže ukládáme peněžní částky na konci úrokovacího období (v našem případě na konci roku), hovoříme o spoření polhůtním. Chceme vypočítat kolik uspoříme za ***n* období**, jestliže ukládáme na konci každého období peněžní částku a.

Odvození výpočtu uspořené částky:

Pořadí úložky	Počet období uložení peněžní částky	Celková hodnota na konci n-tého období
1	$n-1$	$a \cdot (1+i)^{n-1}$
2	$n-2$	$a \cdot (1+i)^{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	1	$a \cdot (1+i)$
n	0	a

Konečný stav vkladů S' na konci n-tého období je opět dán součtem geometrické řady

$$S' = a \cdot \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1\right],$$

kde $q = 1 + i$, $a_1 = a$. Potom součet geometrické řady bude

$$S' = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Jestliže $a = 1$ Kč, potom výraz

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = s''_n$$

nazýváme **střadatelem polhůtním** a udává, kolik ušetříme za n období při úrokové sazbě i, jestliže na konci každého období uložíme 1 Kč. Potom pro výši konečné hodnoty můžeme využít zkráceného vzorce

$$S' = a \cdot s''_n.$$

Výpočet výše vkladu (splátky, úložky):

$$a = \frac{S' \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{S'}{s''_n}.$$

Výpočet doby spoření n:

$$S' = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow S' \cdot i = a \cdot [(1+i)^n - 1] \Rightarrow \frac{S' \cdot i}{a} = (1+i)^n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S' \cdot i}{a} + 1 = (1+i)^n \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{S' \cdot i}{a}\right) = n \cdot \ln(1+i).$$

Potom doba spoření bude

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{S' \cdot i}{a}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Příklad 5.6.

Za jak dlouho uspoříme 50 000 Kč, jestliže koncem každého roku ukládáme 7 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení.

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{S' \cdot i}{a}\right)}{\ln(1+i)},$$

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{50\,000 \cdot 0{,}05}{7\,000}\right)}{\ln(1 + 0{,}05)} = \frac{0{,}3053816}{0{,}0487901} = 6{,}2590894.$$

$n = 6$ let, $0{,}2590894 \cdot 360 = 93{,}27218 = 3$ měsíce a 3 dny.

Abychom uspořili 50 000 Kč při daných podmínkách, musíme spořit 6 roků, 3 měsíce a 3 dny.

5.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

Z praxe víme, že spoříme více roků a peněžní částky většinou ukládáme pravidelně každý měsíc – tedy m-krát za rok. Stejně jako u předcházejících úloh rozdělíme toto spoření na spoření předlhůtní a polhůtní podle toho, kdy budeme peněžní částky ukládat.

5.3.1 Kombinované spoření předlhůtní

Chceme zjistit kolik uspoříme do konce n-tého roku, jestliže budeme ukládat peněžní částku na počátku každé m-tiny roku x Kč.

Nejdříve vypočítáme, kolik uspoříme včetně úroků na konci prvního roku, což zjistíme ze vztahu pro krátkodobé předlhůtní spoření. Tím jsme převedli úlohu na případ, kdy koncem každého roku **uložíme částku** a, kterou jsme uvažovali u dlouhodobého spoření. Tuto částku a nahradíme uspořenou částkou S_x.

$$\boxed{S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$$

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Tedy

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Z daného výrazu vidíme, že jsme pro výpočet celkové uspořené částky použili dlouhodobého polhůtního spoření, i když jsme jednotlivé částky ukládali na počátku každé m-tiny roku. Je to dáno tím, že naspořená částka S_x je vlastně ukládána vždy na konci každého roku.

Výpočet výše vkladu x:

$$x = \frac{S}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}.$$

Příklad 5.7.

Kolik uspoříme za 10 let, jestliže spoříme začátkem každého čtvrtletí 2 500 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned}
S &= m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},\\
S &= 4 \cdot 2\,500 \cdot \left(1 + \frac{5}{8} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 10\,000 \cdot 1{,}03125 \cdot 12{,}577893 =\\
&= 129\,709{,}52.
\end{aligned}$$

Při stanovených podmínkách uspoříme za 10 let 129 709,52 Kč.

Příklad 5.8.

Kolik musíme spořit počátkem každého měsíce, abychom za 10 let uspořili 1 mil. Kč při neměnné úrokové sazbě 5 %?

Řešení.

$$x = \frac{S}{m \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}},$$

$$x = \frac{1\,000\,000}{12 \cdot \left(1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05}} = \frac{1\,000\,000}{12{,}325 \cdot 12{,}577893} = 6\,450{,}6753.$$

Při stanovených podmínkách musíme měsíčně spořit 6 450,6753 Kč.

5.3.2 Kombinované spoření polhůtní

Při řešení této úlohy budeme postupovat obdobným způsobem jako při spoření předlhůtním. Opět nahradíme částku a spořením krátkodobým polhůtním S'_x.

$$\boxed{S'_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$$

$$S' = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Tedy

$$S' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Výpočet výše vkladu x:

$$x = \frac{S'}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}.$$

Výpočet doby spoření n:

$$S' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S' \cdot i = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot [(1+i)^n - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S' \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1 = (1+i)^n.$$

Tento výraz zlogaritmujeme a obdržíme

$$\ln\left[\frac{S' \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right] = n \cdot \ln(1+i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left[\frac{S' \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right]}{\ln(1+i)}.$$

Stejným způsobem vypočítáme i dobu n spoření předlhůtního:

$$n = \frac{\ln\left[\frac{S \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right]}{\ln(1+i)}.$$

Příklad 5.9.

Kolik musíme spořit koncem každého měsíce, abychom za 10 let uspořili 1 mil. Kč při neměnné úrokové sazbě 5 %?

Řešení.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{S'}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}} \\
x &= \frac{1\,00\,000}{12 \cdot \left(1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05}} = \frac{1\,000\,000}{12{,}275 \cdot 12{,}577893} = \\
&= \frac{1\,000\,000}{154{,}39363} = 6\,476, 9512.
\end{aligned}$$

Při uvedených podmínkách je nutno měsíčně ukládat 6 476,9512 Kč.

Příklad 5.10.

Jak dlouho musíme spořit koncem každého měsíce 500 Kč, aby uspořená částka byla ve výši 100 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned}
n &= \frac{\ln\left[\frac{S' \cdot i}{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)} + 1\right]}{\ln(1+i)}, \\
n &= \frac{\ln\left[\frac{100\,000 \cdot 0{,}05}{12 \cdot 500 \cdot \left(1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}05\right)} + 1\right]}{\ln(1{,}05)} = \frac{\ln 1{,}814664}{\ln 1{,}05} = \frac{0{,}5959003}{0{,}0487901} = 12{,}213549 \text{ let.}
\end{aligned}$$

Uvedenou částku při stanovených podmínkách uspoříme za 12 roků, 2 měsíce a 16 dní.

Otázky k zamyšlení

1. Kolik uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč, při úrokové sazbě 9 % p. a.? [15 102 Kč]
2. Kolik musíme ukládat koncem každého měsíce, abychom za rok naspořili 21 000 Kč při úrokové sazbě 6 % p. a.? [1 703,16 Kč]
3. Za jak dlouho naspoříme 50 000 Kč při ročních polhůtních vkladech a neměnné úrokové sazbě 6 % p. a.? [7 let, 7 měsíců, 19 dní]
4. Kolik musíme spořit počátkem každého měsíce, abychom za 10 let při neměnné úrokové sazbě 9 % p. a. obdrželi 1 milion Kč? [5 230,04 Kč]
5. Jak dlouho musíme spořit koncem každého měsíce 500 Kč, abychom uspořili 50 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 8 % p. a.? [6 let, 5 měsíců, 1 den]

6. Při měsíční předlhůtním spoření 10 Kč a úrokové sazbě 3 % p. a. určete uspořenou částku za 13 let. [1 905,05 Kč]

7. Pan Vocásek plánuje nákup nového auta za 3 roky a počítá s nákupní cenou 320 000 Kč. Svoje současné auto staré dva roky hodlá prodat na protiúčet a odhaduje jeho cenu na 80 000 Kč. Na zbytek ceny nového vozu chce pan Vocásek ukládat na začátku každého čtvrtletí stejnou potřebnou částku, na svůj účet v bance, při úrokové sazbě 12 % p. a. Kolik bude činit tento vklad? [16 910,90 Kč]

8. Klient ukládal po dobu deseti let koncem roku 10 000 Kč na vkladní knížku. V té době spořitelna úročila vklady první 4 roky 10 % p. a. a $9\frac{1}{2}$ % p. a. posledních 6 let. Jaká je hodnota naspořené částky pět let po posledním vkladu, jestliže úroková sazba $9\frac{1}{2}$ % p. a. trvá? [244 038,14 Kč]

9. Na schůzce 5 let po promoci se absolventi fakulty dohodli, že příští schůzku 10 let po promoci uspořádají jako jubilejní a slavnostní, v luxusním podniku. Na krytí předpokládaných nákladů souhlasili s tím, že každý pošle pokladníkovi ročníku pololetně 20 Kč. Jestliže všech 100 absolventů fakulty tento závazek dodrží při dožití všech a pokladní svěří správu fondu bance při úrokové sazbě 4 % p. a. úročeno pololetně, jaké výše dosáhne hodnota fondu na konci 10. roku po promoci? [21 899,44 Kč]

10. Otec od narození dcery ukládal počátkem každého měsíce 150 Kč při neměnné úrokové sazbě 4,5 % p. a. s podmínkou, že si dcera tento vklad vybere koncem roku, ve kterém dovrší 18 let, Jaká byla hodnota naspořené částky v této době? [49 517,42 Kč]

- Problematika důchodů
- Důchod bezprostřední
- Důchod odložený
- Důchod věčný

6. Důchody

Cíl kapitoly

V této kapitole budeme řešit úlohy v podstatě spořením na důchod, kdy jsou částky důchodů vypláceny ročně, pololetně, čtvrtletně nebo měsíčně, což je nejčastější případ výplaty důchodů. Zde jde o pochopení problému důchodového zabezpečení, kdy klient si k důchodu poskytované z důchodového fondu zvyšuje tento důchod o uspořenou částku, kterou uspořil tím, že si založil toto spoření v určitém věku. Je nutno pochopit, že je daleko více možností jakým způsobem se klient rozhodne zabezpečit svůj důchodový věk, neboť v současné době je řada možností jakým způsobem bude každý myslet na důchodový věk v současném věku. Například je možno uzavřít pojistnou smlouvu u životních pojišťoven a odepisovat si pojistnou částku ze základu daně. Další možností je zabezpečení u vzniklých penzijních fondů, což je v současné době riziková investice, vzhledem k tomu, že již mnoho penzijních fondů zaniklo. Je nutno dobře zvažovat svoje důchodové zabezpečení a snižovat tak riziko ztráty uspořené částky.

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 10 hod.

6.1 Problematika důchodů

Důchodem rozumíme pravidelné výplaty, které obvykle nazýváme **anuity** (výplaty důchodů) a budeme je značit a.

Podle toho, kdy jsou anuity placeny, rozlišujeme důchod:

- **předlhůtní** – anuity jsou placeny vždy na počátku určitého časového intervalu
- **polhůtní** – anuity jsou placeny vždy na konci určitého časového intervalu

Pro začátek budeme předpokládat, že úrokovací období a časový interval k výplatě důchodů jsou stejné.

Podle toho, jak dlouho se bude důchod vyplácet, rozlišujeme důchod:

- **věčný** – je vyplácen neomezeně dlouho
- **dočasný** – je vyplácen pouze po určitou pevně stanovenou dobu

Podle toho, kdy se začne důchod vyplácet, rozlišujeme důchod:

- **bezprostřední** – s výplatou důchodu se začne okamžitě po podepsání smlouvy
- **odložený** – s výplatou se začne až po uplynutí určité doby (karenční doby)

V souvislosti s důchody budeme počítat:

a) **počáteční hodnotu důchodu** $\boldsymbol{D}$ – je to součet současných hodnot všech v budoucnu získaných výplat důchodu. Počáteční hodnota důchodu tedy udává, kolik si musíme dnes uložit, abychom si zajistili při dané úrokové sazbě vyplácení příslušného důchodu.

b) **konečná hodnota důchodu S** – je to součet všech výplat důchodu přepočtených ke konci posledního roku, kdy se důchod vyplácí. Konečná hodnota důchodu udává, kolik bychom celkem získali ke konci posledního roku, kdybychom všechny výplaty důchodu okamžitě po jejich vyplacení při dané úrokové sazbě uložili.

Mezi konečnou a počáteční hodnotou platí vztah $S = D \cdot (1+i)^n$.

6.2 Důchod bezprostřední

U důchodu bezprostředního výplata začíná ihned v daném období. Podle toho, zda budou výplaty probíhat na počátku nebo na konci tohoto období, rozlišujeme důchod předlhůtní a důchod polhůtní.

6.2.1 Důchod bezprostřední předlhůtní

Naším úkolem bude vypočítat počáteční hodnotu důchodu a vypláceného vždy počátkem úrokovacího období po n období při úrokové sazbě i. Potom počáteční hodnota důchodu se rovná součtu všech výplat důchodu.

Z předcházejících kapitol víme, že současnou hodnotu vypočítáme

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i)^t}.$$

Podle toho současnou hodnotu vypočítáme tak, že každou výplatu důchodu a diskontujeme diskontním faktorem $\frac{1}{1+i} = v$ k výchozímu datu (k první výplatě důchodu).

Pořadí výplaty	Současná hodnota
1	a
2	$a \cdot v$
3	$a \cdot v^2$
$\vdots$	$\vdots$
n	$a \cdot v^{n-1}$

Součet současných hodnot všech výplat důchodu tvoří konečnou geometrickou řadu

$$a + a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^{n-1},$$

kde $a_1 = a$, $q = v$ a $v = \frac{1}{1+i}$ diskont. Jelikož $0 < q < 1$, bude součet konečné geometrické řady

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Neboť $\frac{1}{1+i}$ bude vždy menší než 1, protože úroková sazba nikdy nebude rovna nule. Potom tedy součet současných hodnot všech výplat důchodu bude

$$D = a \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = a \cdot \frac{1-v^n}{\frac{1+i-1}{1+i}} = a \cdot \frac{1-v^n}{i \cdot \frac{1}{1+i}} = a \cdot \frac{1-v^n}{v \cdot i}.$$

Tím jsme získali výraz pro určení kapitálu D, který musíme vložit, abychom mohli začátkem každého období pobírat důchod a. Tuto peněžní částku tedy vypočítáme

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{v \cdot i}.$$

Jestliže $a = 1$ Kč, potom výraz

$$\frac{1 - v^n}{v \cdot i} = a_n'$$

se nazývá **zásobitel předlhůtní** a udává počáteční hodnotu důchodu 1 Kč vypláceného vždy počátkem úrokového období po dobu n let při úrokové sazbě i.

Příklad 6.1.

Jaká částka nám zajistí roční bezprostřední předlhůtní důchod ve výši 16 000 Kč po dobu 20 let při neměnné úrokové sazbě 4 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned} D &= a \cdot \frac{1 - v^n}{v \cdot i}, \\ D &= 16\,000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{20}}{\frac{0{,}04}{1{,}04}} = 226\,143{,}03. \end{aligned}$$

Jestliže dnes uložíme 226 143,03 Kč, zajistí nám předlhůtní roční důchod ve výši 16 000 Kč po dobu 20 let.

6.2.2 Důchod bezprostřední polhůtní

Stejně jako u důchodu předlhůtního nám jde o to vypočítat hodnotu důchodu ve výši a vypláceného vždy koncem úrokového období po n období při úrokové sazbě i.

Budeme postupovat obdobným způsobem jako u důchodu předlhůtního.

Pořadí výplaty	Současná hodnota
1	$a \cdot v$
2	$a \cdot v^2$
3	$a \cdot v^3$
$\vdots$	$\vdots$
n	$a \cdot v^n$

Součet všech současných hodnot výplat důchodu je opět dán konečnou geometrickou řadou

$$a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^n,$$

kde $a_1 = a \cdot v$ a $q = v$. Potom pro daný součet platí

$$D' = a \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+i}} = a \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1 - v^n}{\frac{1+i-1}{1+i}} = a \cdot v \cdot \frac{1 - v^n}{i \cdot v} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}.$$

Tím jsme získali výraz pro určení kapitálu, který musíme vložit, abychom mohli koncem každého roku pobírat důchod a.

Tuto peněžní částku vypočítáme

$$D' = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}.$$

Výraz

$$a''_n = \frac{1 - v^n}{i}$$

se nazývá **zásobitel polhůtní** a udává počáteční hodnotu důchodu 1 Kč vypláceného vždy koncem úrokového období po n let při úrokové sazbě i.

Příklad 6.2.

Jaká částka nám zajistí roční bezprostřední polhůtní důchod ve výši 16 000 Kč po dobu 20 let při neměnné úrokové sazbě 4 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned} D' &= a \cdot \frac{1 - v^n}{i}, \\ D' &= 16\,000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{20}}{0{,}04} = 217\,445{,}28. \end{aligned}$$

Jestliže dnes uložíme 217 k445,28 Kč, zajistí nám tato částka výplaty důchodu podle zadaných podmínek.

6.2.3 Důchody vyplácené m-krát ročně

Stejně jako u spoření může docházet k tomu, že výplaty důchodu jsou častěji než jednou za rok. Budeme předpokládat, že na počátku (konci) m-tiny roku jsou vypláceny splátky důchodu ve výši x Kč. Pro výpočet počáteční hodnoty takového důchodu použijeme výraz pro předlhůtní (polhůtní) důchod s tím, že musíme nejdříve vypočítat, jaká bude celková hodnota důchodu na konci roku. Celkovou hodnotu výplat důchodu na konci roku vypočítáme pomocí krátkodobého předlhůtního nebo polhůtního spoření. Nyní jsme nahradili m výplat důchodu ve výši x jednou výplatou důchodu ve výši S_x (S'_x).

Počáteční hodnota důchodu se pak vypočítá

a) **předlhůtní**

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i},$$

b) **polhůtní**

$$D' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}.$$

U předlhůtního důchodu vidíme, že používáme zásobitel polhůtní a nikoliv předlhůtní, i když jednotlivé výplaty důchodu jsou uskutečněny na počátku každé m-tiny roku. Je to z toho důvodu, že při předlhůtním spoření vypočítáme vlastně výplatu důchodu, kterou bychom získali na konci roku.

Příklad 6.3.

Jaká je počáteční hodnota důchodu 6 000 Kč, který se vyplácí na počátku každého čtvrtletí po dobu 10 let při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení.

$$
\begin{aligned}
D &= m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}, \\
D &= 4 \cdot 6\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{10}}{0{,}05} = 191\,112{,}94.
\end{aligned}
$$

Počáteční hodnota důchodu při zadaných podmínkách bude 191 112,94 Kč.

Příklad 6.4.

Jaká je počáteční hodnota důchodu 6 000 Kč, jestliže se důchod vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu 10 let při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.?

Řešení.

$$
\begin{aligned}
D' &= m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}, \\
D' &= 4 \cdot 6\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{10}}{0{,}05} = 188\,796{,}42.
\end{aligned}
$$

Počáteční hodnota důchodu při zadaných podmínkách bude 188 796,42 Kč.

6.3 Důchod odložený

V předcházející části jsme mluvili o bezprostředním důchodu. To znamená, že se důchod začal vyplácet bezprostředně po zaplacení potřebné peněžní částky ve sjednané době. Odložený důchod se začíná vyplácet až po určité dohodnuté době, kterou nazýváme též karenční dobou k. Stejně jako u důchodu bezprostředního rozdělujeme odložený důchod na důchod předlhůtní a polhůtní.

6.3.1 Důchod odložený předlhůtní

Důchod odložený předlhůtní je vyplácen vždy na začátku určitého časového intervalu a jeho vyplácení je odloženo o k let. Úkolem bude vypočítat počáteční hodnotu takového důchodu, který je vyplácen po n let při úrokové sazbě i. Při výpočtu budeme vycházet z bezprostředního předlhůtního důchodu. Víme, že počáteční hodnota D bezprostředního předlhůtního důchodu ve výši a se vypočítá jako součet současných hodnot budoucích anuit (výplat). U odloženého předlhůtního důchodu jde o to, že současnou hodnotu výplaty důchodu, která má být vyplacena v k-tém roce splatnosti důchodu, vypočítáme tak, že hodnotu této výplaty diskontujeme k výchozímu datu. To znamená, že diskontní faktor umocníme na k. Potom počáteční hodnota odloženého předlhůtního důchodu K se vypočítá

$$K = v^k \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{v \cdot i} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^{k-1}.$$

Počáteční hodnota K odloženého důchodu je vlastně diskontovaná počáteční hodnota bezprostředního důchodu D k výchozímu datu. Jde v podstatě o případ, jako bychom uložili částku D na k let a po této době jsme si zaplatili bezprostřední důchod.

Jestliže dochází k výplatám důchodu na začátku každé m-tiny roku, vypočítáme stejně jako v případě bezprostředního předlhůtního důchodu. Využijeme tedy vztah pro krátkodobé spoření předlhůtní.

Potom počáteční hodnota tohoto důchodu bude

$$K = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^k.$$

Příklad 6.5.

Máme v hotovosti 30 000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční předlhůtní důchod na 5 let s tím, že s jeho výplatou začneme za dva roky. V jaké výši budou výplaty tohoto důchodu při neměnné roční úrokové sazbě 5 %?

Řešení.

$$\begin{aligned} a &= \frac{k \cdot i}{v^{k-1} \cdot (1 - v^n)}, \\ a &= \frac{30\,000 \cdot 0{,}05}{\frac{1}{0{,}05} \cdot (1 - \frac{1}{0{,}05^5})} = \frac{1\,500}{0{,}2061656} = 7\,275{,}7064. \end{aligned}$$

Vyplacená částka bude činit 7 275,7046 Kč.

Příklad 6.6.

Jak velkou částku musíme dnes při neměnné úrokové sazbě 10 % p. a. uložit novorozenému dítěti, aby v 18 letech mělo takový kapitál, který by mu zabezpečil po dobu 10 let čtvrtletní předlhůtní důchod ve výši 2 000 Kč?

Řešení.

$$\begin{aligned} K &= m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^k, \\ K &= 4 \cdot 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{8} \cdot 0{,}1\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{1{,}1^{10}}}{0{,}1} \cdot \left(\frac{1}{1{,}1}\right)^{18} = \\ &= 8\,500 \cdot 6{,}144568 \cdot 0{,}1798587 = 9\,393{,}81. \end{aligned}$$

K zabezpečení uvedeného důchodu musíme uložit 9 393,81 Kč.

6.3.2 Důchod odložený polhůtní

Vzhledem k tomu, že všechny úvahy jsou stejné jako u důchodu odloženého předlhůtního, uvedeme si pouze základní vzorce.

Počáteční hodnota odloženého polhůtního důchodu K' se vypočítá

$$K' = v^k \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{i}.$$

Je to vlastně diskontovaná počáteční hodnota D' bezprostředního polhůtního důchodu diskontovaného k výchozímu datu a zásobitel polhůtní je vynásoben diskontním faktorem umocněným na dobu odložení k. V případě, že se důchod vyplácí m-krát za rok, bude počáteční hodnota takovéhoto důchodu vypočítána na základě krátkodobého polhůtního spoření a zásobitele polhůtního. Součin těchto výrazů násobíme diskontním faktorem umocněným na dobu odložení k.

$$K' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^k.$$

6.4 Důchod věčný

Je to důchod, jehož výplata není časově omezena ($n \to \infty$). S tímto důchodem se můžeme setkat u některých cenných papírů, které nemají splatnost, ale majitel má nárok na výplatu důchodu po neomezenou dobu. Stejně jako u předcházejících důchodů hovoříme též o důchodu věčném polhůtním a věčném předlhůtním. I důchod věčný může být bezprostřední nebo odložený.

6.4.1 Důchod věčný předlhůtní

Počáteční hodnotu D věčného předlhůtního důchodu vypočítáme jako limitu počáteční hodnoty bezprostředního předlhůtního důchodu.

Protože $D = a \cdot \frac{1-v^n}{i \cdot v}$, bude pro $n \to \infty$

$$D = \lim_{n \to \infty} a \cdot \frac{1 - v^n}{i \cdot v} = \frac{a}{i \cdot v}.$$

Upravíme-li tento výraz

$$\frac{a}{i \cdot v} = \frac{a}{\frac{1}{1+i}} = a \cdot \frac{1+i}{1} = a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right),$$

obdržíme výpočet hodnoty bezprostředního předlhůtního věčného důchodu

$$D = a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right).$$

Jestliže vyplácení tohoto důchodu odložíme o k let, potom tento vztah musíme opět vynásobit diskontním faktorem umocněným na hodnotu doby odložení.

$$K = a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right) \cdot v^k.$$

Je-li věčný důchod vyplácen m-krát za rok, postupujeme stejně jako u předcházejících důchodů.

Jde-li o důchod odložený vyplácený m-krát za rok, musíme tento výraz

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

násobit diskontem umocněným na dobu odložení k.

$$K = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right) \cdot v^k.$$

Příklad 6.7.

Jak vysoká částka nám zajistí výplatu věčného předlhůtního ročního důchodu ve výši 10 000 Kč od našeho 60. roku, je-li nám dnes 30 let a úroková sazba je 5 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned} K &= a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right) \cdot v^k \\ K &= 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{0{,}05}\right) \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{30} = 210\,000 \cdot 0{,}2313774 = 48\,589{,}254. \end{aligned}$$

Abychom si zajistili tuto výplatu důchodu, musíme dnes složit částku ve výši 48 589,254 Kč.

6.4.2 Důchod věčný polhůtní

Stejně jako u důchodu věčného předlhůtního odvodíme pomocí limity důchod věčný polhůtní z důchodu bezprostředního polhůtního.

$$D' = \lim_{n \to \infty} a \cdot \frac{1 - v^n}{i} = \frac{a}{i}.$$

Bude-li věčný polhůtní důchod odložený o k let, musíme tento výsledný vztah vynásobit diskontním faktorem umocněným na dobu odložení k.

$$K' = \frac{a}{i} \cdot v^k.$$

Je-li věčný důchod vyplácen m-krát za rok, potom počáteční hodnota polhůtního důchodu bude

$$D' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{i}.$$

Je-li důchod věčný, odložený, vyplácený m-krát za rok, potom počáteční hodnota tohoto důchodu bude

$$K' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{v^k}{i}.$$

Příklad 6.8.

Jaká částka nám a našim pozůstalým zajistí čtvrtletní polhůtní důchod ve výši 5 000 Kč při neměnné úrokové sazbě 7 % p. a.?

Řešení.

$$\begin{aligned} D' &= m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{i}, \\ D' &= 4 \cdot 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}07\right) \cdot \frac{1}{0{,}07} = 293\,214{,}29. \end{aligned}$$

Při zadaných podmínkách je nutno složit částku 293 214,29 Kč.

Příklad 6.9.

Kolik musíme koncem každého měsíce ukládat po dobu 10 let, abychom si zajistili po dobu dalších 15 let čtvrtletní polhůtní důchod 5 000 Kč při úrokové sazbě 7 % p. a.?

Řešení. Musíme porovnat hodnotu úspor, které získáme za 10 let, s počáteční hodnotou důchodu vypláceného po dobu příštích 15 let.

Nejdříve musíme 10 let spořit každý měsíc. Potom čtvrtletně vyplácet důchod po dobu 15 let.

Spoření:	Důchod:
$m_1 = 12$	$m_2 = 4$
$n_1 = 10$	$n_2 = 15$
$i_1 = 0{,}07$	$i_2 = 0{,}07$
$x_1 = ?$	$x_2 = 5\,000$ Kč

$$m_1 \cdot x_1 \cdot \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} \cdot \left(1 + \frac{m_1 - 1}{2 \cdot m_1} \cdot i\right) = \frac{1 - v^{n_2}}{i} \cdot m_2 \cdot x_2 \cdot \left(1 + \frac{m_2 - 1}{2 \cdot m_2} \cdot i\right)$$

$$12 \cdot x_1 \cdot \frac{1{,}07^{10} - 1}{0{,}07} \cdot \left(1 + \frac{11}{24} \cdot 0{,}07\right) = \frac{1 - \frac{1}{1{,}07^{15}}}{0{,}07} \cdot 4 \cdot 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{8} \cdot 0{,}07\right)$$

Z dané rovnice vypočítáme x_1

$$x_1 = 1\,092{,}47 \text{ Kč}.$$

Abychom dostávali čtvrtletně důchod po dobu 15 let, musíme spořit každý měsíc po dobu 10 let 1 092,47 Kč.

Otázky k zamyšlení

1. Jaká částka nám zajistí roční bezprostřední polhůtní důchod ve výši 16 000 Kč po dobu 20. let při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.? [199 395,36 Kč]
2. Jaká je počáteční hodnota důchodu 6 000 Kč, který se vyplácí na konci každého čtvrtletí po dobu 10. let při neměnné úrokové sazbě 5 % p. a.? [188 796 Kč]
3. Jakou částku musíme uložit synovi ve stáří 10 let, aby od 20. let dostával měsíčně předlhůtně po dobu 5 let částku 2 500 Kč při neměnné úrokové sazbě 8 % p. a.? [142 939,85]
4. Jaká částka nám, nebo našim pozůstalým zajistí čtvrtletní předlhůtní věčný důchod při neměnné úrokové sazbě 8 % p. a.? [283 500 Kč]
5. Určete celkový objem plateb za 10 let, je-li roční nominální důchod 3 200 Kč vyplácený čtvrtletně, při 4 % p. a. a čtvrtletním složeným úročením. [39 109,10 Kč]
6. Pojistník (pojištěnec) má pojistnou smlouvu na dožití, jejíž hodnota v době, kdy dosáhne věku 65 let, mu zabezpečí roční důchod 15 000 Kč

po dobu 15. let. První výplata důchodu bude na 66. narozeniny. Jestliže pojišťovna garantuje úrokovou sazbu ve výši 6 % p. a. ročně, jaká bude hodnota důchodu klienta ve věku 65 let? [145 683,73 Kč]

7. Dědic bude pobírat důchod (rentu) 7 000 Kč pololetně po dobu 15 let. První výplata bude za 6 měsíců. Jaká je nominální hodnota dědictví při úrokové sazbě 10 % p. a. pololetně úročeného? [107 607,16 Kč]

8. Pojistná smlouva na dožití 65 let zní na 100 000 Kč. Jaká bude vyplácená hodnota důchodu (renty) po dobu 15. let, jestliže úroková sazba je 6 % p. a. s měsíčním úročením? [843,86 Kč]

9. Klient se rozhodl ve věku 30 let vytvořit penzijní fond pravidelnými vklady na konci každého roku ve výši 10 000 Kč po dobu 35 let. Počínaje 66 rokem svých narozenin chce vybírat z tohoto fondu koncem každého roku po dobu 15 let. Řešte:

a) Jestliže platí po dobu celých 50. let existence fondu úroková sazba 8 % p. a. ročně, kolik bude moci klient ze svého fondu ročně vybírat, mezi 66. a 80. rokem svého věku?

b) Jak se změní částka ročního důchodu, jestliže sníží peněžní ústav po 10. letech od zahájení výplat z fondu, úrokovou sazbu z 8 na 6 % p. a. ročně, jestliže má být dodržená lhůta výplat 15 let?

[a) 201 316,94 Kč, b) 157 763,95]

10. Zemřelý zanechal kapitál ve výši 50 000 Kč, který je investován při 12 % p. a. úrokové sazbě úročeného měsíčně. Kolik měsíčních výplat o výši 750 Kč obdrží dědici a kolik bude činit závěrečná výplata?

[počet výplat 110, zůstatek činí 308,12 Kč]

11. Jakou částku musíme uložit při narození dítěte, aby poskytla 8 pololetních výplat 15 000 Kč ke krytí nákladů na studium, přičemž první výplata se předpokládá na 19. narozeniny budoucího studenta? Finanční ústav jako správce fondu zhodnocuje tento vklad úrokovou sazbou 9 % p. a. pololetně. [19 411,61 Kč]

12. Klient vyhrál ve sportce 100 000 Kč. Vybral z výhry pouze 20 000 Kč a zbytek 80 000 Kč investoval v bance při úrokové míře 0,08 p. a. měsíčně s tím, že mu bude banka vyplácet měsíční rentu po dobu 15 let. První výplat bude za 4 roky od dnešního dne. Určete, kolik bude činit částka jedné výplaty. [1 044,76 Kč]

- Umořování dluhu nestejnými splátkami
- Umořování dluhu stejnými anuitami
- Určování počtu anuit

7. Umořování dluhů

Cíl kapitoly

V této kapitole se seznámíme s metodikou umořování dluhů (úvěrů) a s výpočty jednotlivých hodnot jako anuity, úmor dluhu, úrok z úvěru a výpočtem zůstatkové části. Ukážeme si na podobný způsob jejich výpočtů, stejných jako u výpočtu důchodu. Je-li úvěr umořován stejnými částkami ve stejných intervalech, je možno jej chápat jako diskontovanou hodnotu objemu opakovaných plateb, a k výpočtu hodnoty plateb (splátek) použít dosud vysvětlené postupy. Navíc zůstatek úvěru při pravidelných splátkách se neustále zmenšuje, čímž klesá i výše úroku tohoto úvěru a tím se v určité míře odlišuje od vyplácení důchodů.

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 9 hod.

Úvod

Úvěr (dluh, půjčka) je důležitý finanční nástroj. Úvěrem rozumíme poskytnutí kapitálu na určitou dobu za odměnu – úrok. Ačkoliv je možné umořování dluhu z pohledu věřitele považovat za příjem důchodu, ukážeme si některé odlišnosti, které postup při splácení dluhu má.

Podle doby splatnosti rozdělujeme úvěry:
- **krátkodobé** – doba splatnosti nepřesahuje jeden rok
- **střednědobé** – doba splatnosti je od jednoho roku do pěti let
- **dlouhodobé** – doba splatnosti je delší než pět let

Hlavní způsoby umořování (splácení) dluhu můžeme rozdělit následovně:
- Půjčka je uzavřena na neurčitou dobu. Musí být splacena najednou po výpovědi při zachování výpovědní lhůty. Úroky se platí ve sjednaných lhůtách jejich splatnosti.
- Umořování dluhu se provádí od začátku pravidelnými platbami. Tyto platby (anuity) mohou být stále stejné (částí platby se umořuje dluh a částí platby se platí úrok), nebo se mohou zvyšovat.

V tom případě je možno část anuity (splátky), která připadne na umoření dluhu, určit kvótami nebo procenty a k nim připojit splátky na úrok. Je zřejmé, že rychlejší umořování dluhu bude zvyšováním těchto kvót každým rokem. Toto umořování dluhu můžeme zvyšovat konstantními částkami, nebo ve smlouvě zakotvit i jiné splácení dluhu po vzájemné dohodě se souhlasem věřitele.

Přehled výšky anuit (splátek dluhu) včetně úroků z hlediska jejich časového rozložení sestavují banky pro své klienty do tzv. **umořovacích plánů**.

Umořovací plány se mohou lišit:

- **typem splátek** (polhůtní, předlhůtní)
- **způsobem úročení** (polhůtní, předlhůtní)
- **obdobími splátek** (stejná nebo odlišná od úrokového období)

V dalších úvahách se budeme zabývat umořováním dlouhodobých úvěrů při polhůtním úročení. Umořovací plán obsahuje pro každé období, pro které se sestavuje a v němž je dluh splácen:

- **výši anuity (splátky)**
- **výši úroku z dluhu**
- **výši úmoru**
- **stav dluhu po odečtení úmoru**

Vždy platí: anuita = úmor + úrok

7.1 Umořování dluhu nestejnými splátkami

Umořování dluhu nestejnými splátkami si vysvětlíme na příkladu a některé závěry zobecníme.

Příklad 7.1.

Úvěr ve výši 280 000 Kč má být splacen polhůtními splátkami. První úmor má být ve výši 10 000 Kč a každý následující je o 10 000 Kč vyšší. Kromě toho je nutno platit běžný úrok. Sestavme umořovací plán při úrokové sazbě 10 % p. a.

Řešení. Při sestavování umořovacího plánu budeme předpokládat, že uvedené hodnoty se budou vztahovat vždy na konec úrokovacího období.

UMOŘOVACÍ PLÁN

období	**anuita**	**úrok**	**úmor**	**stav dluhu**
0				280 000
1	38 000	28 000	10 000	270 000
2	47 000	27 000	20 000	250 000
3	55 000	25 000	30 000	220 000
4	62 000	22 000	40 000	180 000
5	68 000	18 000	50 000	130 000
6	73 000	13 000	60 000	70 000
7	77 000	7 000	70 000	0

Postup při sestavování umořovacího plánu:

Nejprve vyplníme sloupec nazvaný **úmor**, a to tak, že v prvním období bude úmor 10 000 Kč, v druhém období o 10 000 Kč vyšší, tedy 20 000 Kč atd. Jak je vidět za 7 období splatíme celý úvěr. Do sloupce **úrok** vždy zapíšeme úrok ze stavu dluhu. **Úrok + úmor** udává **anuitu** (splátku). Od stavu dluhu odečteme vždy úmor a z této částky vypočítáme úrok.

Z našeho příkladu, kde se úmor pravidelně zvyšuje o pevnou částku, můžeme počet anuit vypočítat pomocí aritmetické posloupnosti, neboť víme, že $a_1 = 10\,000$ a $d = 10\,000$, $S_n = 280\,000$.

Víme, že platí

$$a_1 = a_1,$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d, \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d, \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d,
\end{aligned}
$$

kde $d = a_k - a_{k-1}$ je diference (rozdíl dvou po sobě jdoucích členů, který je konstantní). Z kapitoly o spoření víme, že pro součet aritmetické posloupnosti platí

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Jestliže nahradíme člen $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, obdržíme pro součet

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d].$$

Úpravou této rovnice obdržíme kvadratickou rovnici, z které vypočítáme n

$$n^2 \cdot d + (2 \cdot a_1 - d) \cdot n - 2 \cdot S_n = 0.$$

Jestliže dosadíme za a_1, d, S_n konkrétní hodnoty a vyřešíme kvadratickou rovnici, dostaneme dobu splatnosti úvěru. Počítáme pouze kladný kořen této rovnice.

7.2 Umořování dluhu stejnými anuitami

Předpokládejme, že dluh D má být splacen i s úroky n stejnými splátkami a splatnými vždy na konci úrokovacího období při neměnné roční úrokové sazbě i. Jak známe z důchodu, počáteční hodnotu dluhu můžeme pokládat za počáteční hodnotu důchodu a jednotlivé anuity za výplaty důchodu, který si věřitel zajistil poskytnutím úvěru.

Abychom určili výši anuity, je nutno si uvědomit, že počáteční hodnota dluhu se musí rovnat současné (diskontované) hodnotě všech anuit.

Platí tedy jako u důchodu rovnice

$$D = a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^n,$$

kde $v = \frac{1}{1+i}$ – diskontní faktor, D – počáteční výše dluhu, a – anuita.

Víme, že pro výpočet počáteční hodnoty důchodu platí

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} = a \cdot a''_n,$$

kde a''_n je zásobitel polhůtní. Z dané rovnice vypočítáme anuitu

$$a = \frac{D \cdot i}{1 - v^n}.$$

Výraz $\frac{i}{1-v^n}$ je převrácená hodnota zásobitele a nazývá se **umořovatel** a udává výši polhůtní anuity nutnou k tomu, aby se zaplatil dluh 1 Kč za

n období při úrokové sazbě i. Pro umořování dluhu potřebujeme sestavit umořovací plán. K jeho sestavení potřebujeme znát kromě hodnoty anuity též hodnotu úmoru a úroku. Nyní si uvedeme výpočet těchto hodnot.

Původní stav dluhu D_0 je současná hodnota všech anuit, tedy

$$D_0 = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} = a \cdot a''_n.$$

Z první anuity připadá na úrok U_1 částka $D_0 \cdot i$, kterou můžeme vyjádřit vztahem

$$U_1 = D_0 \cdot i = a \cdot (1 - v^n).$$

Na úmor dluhu M_1 pak zbývá částka

$$M_1 = a - U_1 = a - a \cdot (1 - v^n) = a \cdot v^n.$$

Předpokládejme nyní, že po zaplacení r splátek má zbytek dluhu výší D_r. Protože D_r je rovný současné hodnotě zbývajících $n - r$ splátek, můžeme odvodit pro výši úroku U_{r+1} v období $r + 1$ a výši úmoru M_{r+1} ve stejném období analogické vztahy jako pro výši úroku U_1 a úmoru M_1 v prvním období splácení dluhu. Pro výši úroku v $(r+1)$-ním období platí

$$U_{r+1} = a \cdot (1 - v^{n-r}) = D_r \cdot i.$$

Je to v podstatě úrok ze stavu dluhu na konci předcházejícího období.

Pro výši úmoru v $(r+1)$-ním období platí

$$M_{r+1} = a \cdot v^{n-r} = a - D_r \cdot i.$$

Je to anuita minus úrok.

Z uvedeného je vidět, že umořovací splátky tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $v = \frac{1}{1+i}$. Sestavme umořovací plán na základě předcházejících vztahů.

Postup:

V umořovacím plánu vyplníme nejprve počáteční stav dluhu a potom celý sloupec s anuitami. Pak v každém řádku vypočítáme výši úroku a výši úmoru.

Tento výpočet je možno provést dvěma způsoby:

Úrok:
– z předcházejícího stavu vkladu
– z výše anuity

Úmor:
– rozdílem anuita minus úrok
– úročením úmoru z předcházejícího období, což je vlastně diskontování anuity

Provedeme kontrolní výpočet pro $r = 3$, $n = 6$

$$
\begin{aligned}
U_3 &= D_2 \cdot i = 3\,546,\\
U_3 &= a \cdot (1 - v^{n-2}) = 9\,729 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{1{,}12}\right)^4\right] = 3\,546,\\
M_3 &= a - U_3 = 9\,729 - 3\,546 = 6\,183,\\
M_3 &= a \cdot v^{n-2} = 9\,729 \cdot \left(\frac{1}{1{,}12}\right)^4 = 6\,183,\\
D_3 &= a \cdot \frac{1 - v^{n-3}}{i} = 9\,729 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}12}\right)^3}{0{,}12} = 23\,368.
\end{aligned}
$$

Výsledné hodnoty jsou zaokrouhlené.

7.3 Určování počtu anuit

Máme vyřešit úlohu, kdy dluh (úvěr) D je splácen pevnou anuitou při úrokové sazbě i. Máme určit, jak dlouho se bude splácet tento dluh a jak vysoká bude poslední splátka. Vyjdeme ze vztahu pro výši počátečního dluhu

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}.$$

Tento výraz zlogaritmujeme a obdržíme

$$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{D \cdot i}{a}\right)}{\ln v}.$$

Z tohoto výrazu vypočítáme období n, což nemusí být celé číslo. Určíme tedy nejbližší nižší celé číslo n_0. Z uvedeného vyplývá, že budeme dluh splácet n_0 celých období a potom ještě poslední splátku b, která bude nižší než vypočítaná anuita a.

Potom pro počáteční hodnotu dluhu obdržíme vztah

$$D = a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i} + b \cdot v^{n_0+1}.$$

Poslední splátku dluhu b pak vyjádříme vztahem

$$b = \left(D - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i}\right) \cdot (1 + i)^{n_0+1}.$$

Poslední splátka se také skládá z úmoru a úroku. Stav dluhu po n_0-té splátce má hodnotu $b \cdot v$. Poslední výše úmoru má také hodnotu $b \cdot v$.

$$M_{n_0+1} = b \cdot v.$$

Poslední výše úroku je úrokem z dluhu D_{n_0}, tedy také z hodnoty úmoru M_{n_0+1}. Tento úrok můžeme vyjádřit

$$U_{n_0+1} = b \cdot v \cdot i.$$

Příklad 7.2.

Dluh 45 000 Kč se má splácet ročními anuitami ve výši 8 000 Kč při roční úrokové sazbě 14 %. Máme určit počet anuit, výši poslední splátky a sestavit umořovací plán.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{\ln\left(1-\frac{D\cdot i}{a}\right)}{\ln v},\\
n &= \frac{\ln\left(1-\frac{45\,000\cdot 0{,}14}{8\,000}\right)}{\ln\frac{1}{1{,}14}}.
\end{aligned}
$$

Počet splátek je 12; $n_0 = 11$. Poslední splátka obecně bude

$$
\begin{aligned}
b &= \left(D - a\cdot\frac{1-v^{n_0}}{i}\right)\cdot(1+i)^{n_0+1},\\
b &= \left[45\,000 - 8\,000\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}14}\right)^{11}}{0{,}14}\right]\cdot 1{,}14^{12} = 6\,639{,}73.
\end{aligned}
$$

Poslední splátka bude ve výši 6 639,73 Kč.

Určeme hodnoty za 11 období:

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= M_1\cdot 1{,}14^{10} = 6\,302,\\
U_{11} &= 8\,000 - 6\,302 = 1\,698,\\
D_{10} &= 1\,698\cdot\frac{1}{1{,}14} = 12\,129,\\
D_{11} &= D_{10} - M_{11} = 12\,129 - 6\,302 = 5\,827.
\end{aligned}
$$

Poslední řádek doplníme již známým postupem. Přesvědčíme se, že platí vztahy

$$
\begin{aligned}
U_{n_0+1} &= b\cdot v\cdot i = 6\,640\cdot\frac{1}{1{,}14}\cdot 0{,}14 = 815{,}4,\\
M_{n_0+1} &= b\cdot v = 6\,640\cdot\frac{1}{1{,}14} = 5\,825.
\end{aligned}
$$

UMOŘOVACÍ PLÁN

období	anuita	úrok	úmor	stav dluhu
0		0		45 000
1	8 000	6 300	1 700	43 300
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11	8 000	1 698	6 302	5 827
12	6 640	816	5 827	0

Z příkladu je vidět postup při tvorbě umořovacího plánu v případě dané anuity. Dosud jsme řešili případy, kdy jsme spláceli dluh na konci každého úrokovacího období. Jestliže dochází ke splácení dluhu vícekrát za úrokovací období, vypočítáme nejdříve hodnotu splátek do konce roku podle vztahu

$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$ a na základě tohoto výpočtu pak sestavíme umořovací plán.

Otázky k zamyšlení

1. Klient má splatit hypotéku 4 000 000 Kč měsíčními splátkami ve stálé výši a ve lhůtě 25 let, při 10 % úrokové sazbě p. a. s pololetní frekvencí. Určete částku měsíční splátky a sestavte dílčí umořovací plán pro prvních dvanáct (12) splátek. Jaká část dluhu bude prvními dvanácti splátkami umořená? [úmor = 39 169,23 Kč, úrok = 390 184,63 Kč]
2. Klient za objekt v ceně 560 000 Kč mohl zaplatit 60 000 Kč v hotovosti a na zbytek ceny si vypůjčil na hypotéku při 10 % p. a. s pololetní frekvencí (s pololetním úročením). Úvěr bude splácet po dobu 25 let měsíčními splátkami ve stálé výši. Určete výši měsíční splátky a sestavte dílčí umořovací plán pro prvních šest měsíců. Jaká část úvěru bude za prvních 6 měsíců splacena jak vysoká je hodnota úroku? [splátka = 4 472,44 Kč, úmor = 2 388,39 Kč, úrok = 24 446,25 Kč]
3. Úvěr ve výši 500 000 Kč má být splacený polhůtními anuitami. První umoření úvěru bude 20 000 Kč a další následující vždy o 10 000 Kč vyšší. Úroková sazba bude 15 % p. a. Jaký je počet anuit – sestavte umořovací plán. [8,61 = 9 splátek]
4. Půjčka 20 000 Kč při 12 % p. a. s měsíčním úročením se má splatit měsíčními splátkami ve stálé výši polhůtně po dobu jednoho a půl roku. Určete zůstatek dluhu koncem 8. měsíce od jeho vzniku. [11 551,59 Kč]
5. 15. července si klient vypůjčil 1 milion Kč při 15 % p. a. s měsíčním úročením (s měsíční frekvencí). Klient zamýšlí splácet dluh měsíčními splátkami ve stálé výši polhůtně po dobu 8 let. První splátka byla 15. srpna 2002. Určete:
   a) Jakou část dluhu splatil klient do konce roku 2002?,
   b) kolik zaplatil do konce roku na úrocích?
   [a) 27 916,26 Kč, b) 61 810,79 Kč]
6. Dluh 100 000 Kč se splácí čtvrtletními platbami ve stálé výši po dobu 10 let při 10 % p. a. čtvrtletně. Jaký je zůstatek dluhu na konci 6. roku? [52 006,21 Kč]
7. Klient koupil chladničku v ceně 12 000 Kč na splátky a zavázal se splatit dluh měsíčními splátkami ve stálé výši během 3 let, při úrokové sazbě 18 % p. a. s měsíčním úročením. Kdyby chtěl splatit dluh v kratší lhůtě, musel by zaplatit přirážku ve výši trojnásobku částky měsíčního úroku ze zůstatku dluhu ke dni předčasného splacení. Po zaplacení 12 splátek zjišťuje klient, že místní pobočka banky nabízí půjčky se splatností za 2 roky při úrokové sazbě 12 % p. a. s měsíčním úročením. Bylo by výhodné pro klienta vypůjčit si na zbytek dluhu v bance a splatit dluh na začátku druhého roku najednou? [ano, 5 358,68 Kč může klient ušetřit]

■ Metody výpočtu úroků

8. Běžné účty

Cíl kapitoly

V minulých kapitolách jsme se seznámili s jednoduchým i složeným úročením, což budeme aplikovat při úročení běžných účtů při nepravidelném vkladu v daném časovém období. Jedná se o způsob použití úrokového čísla a úrokového dělitele v praxi při vedení běžných účtů klientů kdy vycházíme ze znalosti různých metod výpočtu úroků na těchto účtech.

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 8 hod.

Úvod

V dalších kapitolách si vysvětlíme některá použití finanční matematiky v běžné praxi ve finanční sféře. V prvním případě si uvedeme užití finanční matematiky při vedení běžných účtu a jejich úročení.

Běžný účet je v současné době základním bankovním produktem, který slouží k provádění bankovních operací na účtech klientů bankou. Běžný účet můžeme považovat za účet, který vede banka svému klientovi, přičemž jeho hlavní funkcí je uskutečňovat platební styk s ostatními finančními ústavy a jeho klienty. Pokud stav na po dohodě s finančním ústavem může vykazovat i záporný (debetní) zůstatek, nazýváme takovýto účet **kontokorentní** a čerpaný úvěr jako kontokorentní úvěr.

8.1 Metody výpočtu úroků

Na běžných účtech se velmi často mění výše vkladu a zůstatku podle toho, zda držitel tohoto účtu zvyšuje kapitál svými vklady nebo prováděnými úhradami jeho pohledávek a nebo se výše kapitálu snižuje provedením platebních příkazů k úhradě. Na konci úrokovacího období klientovi banka připíše úroky z částek, které na tomto běžném účtu byly uloženy. K tomuto účelu používáme úrokové číslo a úrokový dělitel.

Pro výpočet těchto úroků se běžně používají tyto metody:
- **zůstatková** (anglická)
- **zpětná** (francouzská)
- **postupná** (německá)

8.1.1 Zůstatková metoda

U tohoto způsobu vedení běžného účtu se úroky počítají vždy za dobu, kdy se stav účtu nezměnil. Úrokové číslo se vždy určí z hodnoty zůstatku na účtu a z počtu dní, kdy tato hodnota zůstala nezměněná. Získaná úroková čísla se na konci úrokovacího období sečtou a tento součet vydělíme úrokovacím dělitelem. Získáme tak úrok, který připočítáme klientovi k zůstatku na běžném účtu. Nejlépe si tuto metodu vysvětlíme na názorném příkladu.

Příklad 8.1.

Předpokládejme, že úrokovací období je jeden rok a úroková sazba je 2,5 %, která se během roku nemění. Máme určit, jaký bude stav na běžném účtu na konci roku, jestliže na něm byl následující pohyb:

1.1.	stav účtu byl	5 000 Kč
12.4.	vklad	2 000 Kč
15.7.	výběr	1 500 Kč
14.10.	vklad	4 000 Kč

Řešení. Budeme vycházet z německé metody: rok 360 dní a měsíc 30 dní. Nebudeme uvažovat zdanění úroků.

Den	**Pohyb na účtu**	**Má dáti**	**Dal**	**Zůsta-tek**	**Počet dní**	**Úrokové číslo**
1.1.	Zůstatek			5 000	102	5 100
12.4.	Vklad		2 000	7 000	93	6 510
15.7.	Výběr	1 500		5 500	89	4 895
14.10.	Vklad		4 000	9 500	76	7 220
31.12.	Zůstatek			9 500		23 725
31.12.	Úrok		164,7569			
1.1.	Zůstatek			9 664,7569		

Připomeneme si, že pro výpočet úrokového čísla jsme použili vztah $UC = \frac{K \cdot d}{100}$, přičemž za K dosazujeme zůstatek na účtu. Úrokový dělitel pak ze vztahu $UD = \frac{360}{p}$ a výpočet úroku za úrokovací období pak ze vztahu $u = \frac{1}{UD} \sum UC$.

8.1.2 Zpětná metoda

Jestliže jsou vedeny běžné účty zpětnou metodou, musíme si nejprve zvolit výchozí datum (počáteční datum). Úroková čísla se pak počítají z každé změny (z hodnoty vkladu nebo výběru) a to od výchozího data do doby změny. Úroková čísla při zvýšení stavu kapitálu (vkladu) na běžném účtu budeme označovat zápornými znaménky a úroková čísla při snížení kapitálu (výběru) pak znaménky kladnými. Na závěr vypočítáme úrokové číslo z konečného zůstatku od výchozího dat do konce úrokovacího období (v úvahu bereme úroková čísla jak se zápornými tak i kladnými znaménky). Stejně jako u zůstatkové metody součet úrokových čísel na konci úrokovacího období vydělíme úrokovacím dělitelem a vypočítaný úrok připočítáme k zůstatku běžného účtu.

Pro ilustraci použijeme příkladu 8.1 jako v předcházející metodě.

Den	Pohyb na účtu	Má dáti	Dal	Zůsta-tek	Počet dní	Úrokové číslo
1.1.	Zůstatek			5 000	0	
12.4.	Vklad		2 000	7 000	102	−2 040
15.7.	Výběr	1 500		5 500	195	2 925
14.10.	Vklad		4 000	9 500	284	−11 360
31.12.	Zůstatek	9 500			360	34 200
						23 725
31.12.	Úrok		164,7569			
1.1.	Zůstatek		9 664,7569			

8.1.3 Postupná metoda

Postupný způsob výpočtu úroku při běžném účtu spočívá v tom, že úrokové číslo vypočítáme od data každé změny až do konce roku. Úrokové číslo při vkladu označíme nyní kladným znaménkem a úrokové číslo při výběru pak záporným znaménkem. Stejně jako v předcházejících metodách takto vzniklá úroková čísla za celé úrokovací období sečteme a vydělíme úrokovým dělitelem. Tím opět získáme úrok, který připočítáme ke konečnému stavu běžného účtu.

Pro ilustraci opět použijeme stejný příklad.

Den	Pohyb na účtu	Má dáti	Dal	Zůsta-tek	Počet dní	Úrokové číslo
1.1.	Zůstatek		5 000	5 000	360	18 000
12.4.	Vklad		2 000	7 000	258	5 160
15.7.	Výběr	1 500		5 500	165	−2 475
14.10.	Vklad		4 000	9 500	76	3 040
						23 725
31.12.	Úrok		164,7569			
1.1.	Zůstatek		9 664,7569			

Z uvedených metod vidíme, že při výpočtu úroku u běžných účtů obdržíme stejné výsledky. Je tedy naprosto jedno, kterou metodu při výpočtu použijeme.

Otázky k zamyšlení

1. Každý student si připraví ukázkové řešení všemi metodami hypotetické úlohy s nejméně 10 od sebe různými účtovanými položkami (vklady) klientů a s různými intervaly jednotlivých vkladů.

■ Úročení kontokorentních úvěrů

9. Kontokorentní úvěry

Cíl kapitoly

Zde si vysvětlíme smysl dnes nejužívanějšího způsobu krátkodobých bankovních úvěrů a pochopení jejich úročení na základě řešení hypotetických příkladů.

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 6 hod.

Úvod

Kontokorentní úvěry dnes představují jeden z nejvýznamnějších krátkodobých bankovních úvěrů, které mají velmi široké použití nejen u podnikatelů, ale zvláště u klientů, kteří potřebují finanční prostředky v krátkodobém časovém horizontu. Smysl kontokorentního úvěru spočívá v tom, že umožňuje klientovi přecházet na svém běžném (kontokorentním) účtu do debetu (do záporných hodnot). Z toho vyplývá, že klient může čerpat úvěr pokud jej bude potřebovat ze svého běžného účtu kdy na něm nemá dostatečné finanční prostředky. Maximální výše tohoto úvěru je daná dohodnutým rámcem, který udává maximální výši záporného zůstatku na tomto účtu. Finanční ústav umožňuje klientům krátkodobě i překročení této maximální výše, což bývá spojeno s dodatečnými úrokovými náklady (tzv. sankčními). Finanční ústav poskytuje kontokorentní úvěr na základě smlouvy uzavřené s klientem. Tato smlouva vychází z platného obchodního zákona a součástí v této smlouvě jsou i obecné podmínky pro poskytování úvěru.

Náležitosti této smlouvy jsou zejména

- **obecně platné podmínky,**
- **dohodnutý úvěrový rámec,**
- **splatnost úvěru,**
- **podmínky při překročení úvěrového rámce,**
- **výše a způsob určení úrokové sazby,**
- **zajištění.**

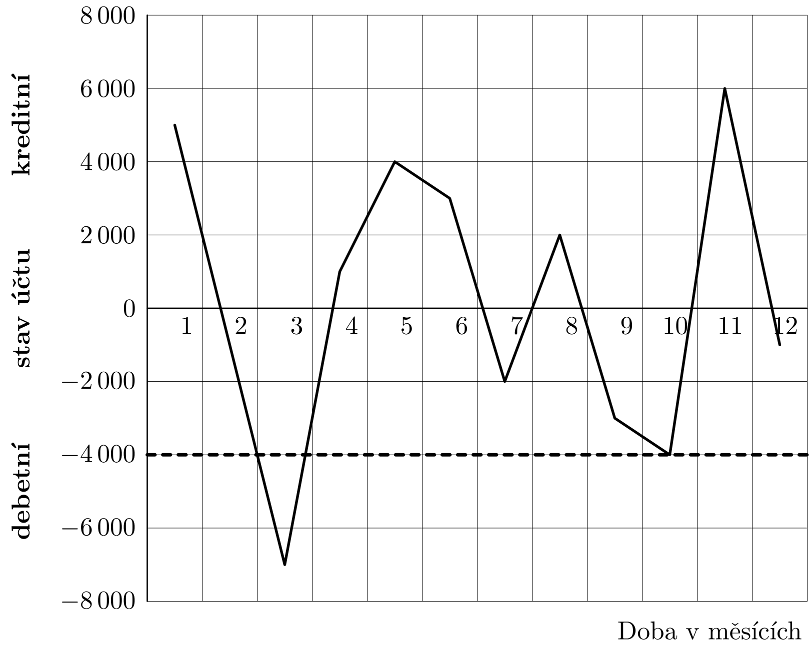
9.1 Úročení kontokorentních úvěrů

S kontokorentním úvěrem jsou spojeny určité náklady klienta, které se skládají

- **z úroků za čerpání úvěru,**
- **z nákladů, které souvisejí s vedením účtu,**
- **z nákladů na prováděné platby atd.**

Tyto náklady mohou v sobě zahrnovat přímo či nepřímo položky, které ovlivňují náklady klienta u kontokorentního účtu podle dohodnuté smlouvy mezi ním a finančním ústavem. Jestliže podrobněji rozebereme klientovy náklady lze je rozčlenit na tyto položky:

a) **Debetní úroky** – tyto úroky platí klient ze skutečné výše čerpání úvěru v rozsahu sjednaného úvěrového rámce. Jejich výpočet je shodný s výpočtem, který byl naznačený u běžných účtů.



Obrázek 9.1: Graf kontokorentního úvěru

b) **Pohotovostní provize** – pokrývá náklady finančního ústavu, které mu vzniknou v důsledku přiznaného, ale nečerpaného úvěru. Tyto náklady vznikají proto, že tyto finanční prostředky musí banka (finanční ústav) držet, neboť klient má právo tento smluvně dohodnutý úvěr kdykoliv čerpat. Je to z toho důvodu, že z této finanční hotovosti má finanční ústav nižší výnos, neboť klient platí úroky pouze ze skutečně čerpaného úvěru. Tato pohotovostní provize může mít různé podoby:

- **provize z úvěrového rámce** – tato provize je určována v procentech p. a. z celkového využitého sjednaného úvěrového rámce. Výše této provize za dané období je však nezávislá na skutečné výši čerpaného úvěru. Potom

$$UC_{Ur_d} = \frac{Ur \cdot d}{100},$$

  kde
  UC_{Ur_d} – úrokové číslo z celkového sjednaného úrokového rámce,
  Ur – sjednaný úrokový rámec,
  d – počet dní.

  Výši provize (úroku) pak obdržíme, jestliže dělíme toto úrokové číslo úrokovým dělitelem.
- **provize z nečerpaného úvěrového rámce** – je většinou určována v procentech p. a. z té části úvěrového rámce, která není skutečně čerpána klientem. Tento nečerpaný úvěrový rámec je dán rozdílem mezi přiznaným (smluvně dohodnutým) a skutečně čerpaným úvěrem v daném období . Nečerpaný úvěrový rámec lze

vypočítat

$$NU_r = \sum_{k=1}^{d} NU_k = \sum_{k=1}^{d} (Ur_k - U_k) = d \cdot U_r - \sum_{k=1}^{d} U_k.$$

Potom úrokové číslo z nečerpaného úvěrového rámce, pokud tento úvěrový rámec nepřekročíme, můžeme vypočítat

$$UC_{NU_r} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{d} NU_k}{100} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{d} (Ur_k - U_k)}{100} = \frac{d \cdot U_r - \sum\limits_{k=1}^{d} U_k}{100},$$

kde
NUr_k – nečerpaný úvěrový rámec,
Ur_k – přiznaný úvěrový rámec,
U_k – skutečně čerpaný úvěr,
UC_{NUr} – úrokové číslo nečerpaného úvěrového rámce.

Úrok pak vypočítáme pokud hodnotu UC_{NUr} vydělíme úrokovým dělitelem.

Jestliže bude překročen úvěrový rámec, potom od součtu úrokových čísel z debetních zůstatků musíme odečíst součet úrokových čísel, které vypočítáme z počtu dní ve kterých byl tento úvěrový rámec překročen. Absolutní výši pohotovostní provize získáme, jestliže součet úrokových čísel vydělíme příslušným úrokovým dělitelem.

- **provize za překročení úvěrového rámce** – je určována jako přirážka k debetní úrokové sazbě, kterou je úročená část úvěru při překročení úvěrového rámce, a to po dobu (počet dní) jeho překročení. Provize je stanovena v procentech roční úrokové sazby nebo i denní úrokové sazby. Jde vždy o smluvní vztah mezi peněžním ústavem a klientem. Součet úrokových čísel z částky, která přesahuje úvěrový rámec, můžeme vyjádřit následujícím vztahem

$$UC_{pr} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{d} (U_k - U_r)}{100}$$

pro všechny hodnoty $U_k > U_r$.

Výši provize vypočítáme stejně jako u předcházejících tím, že výslednou hodnotu dělíme úrokovým dělitelem.

Příklad 9.1.

U kontokorentního úvěru by smluvně dohodnut úvěrový rámec ve výši 40 000 Kč. Kreditní zůstatky jsou úročeny 3 % p. a. a debetní zůstatky pak 16 % p. a. Banka na základě dohody dovoluje krátkodobé překročení tohoto úvěrového rámce a účtuje si úrokovou přirážku 5 % p. a. k debetnímu úroku. Banka si dále účtuje provizi z nevyužitého úvěrového rámce 0,4 % p. a. Udělejme uzávěrku tohoto účtu na základě uvedené tabulky (ostatní provize a zdanění úroku nebudeme uvažovat).

Den	**Příjmy na účet**	**Výdaje z účtu**	**Zůstatek**
30.6.		15 000	−15 000
16.7.		9 000	−24 000
1.9.	5 000		−19 000
15.10.		25 000	−44 000
20.11.	30 000		−14 000
10.12.	20 000		6 000
31.12.			6 000

Řešení. K řešení této úlohy sestavíme přehledné tabulky a později provedeme výpočet pomocí úrokových čísel a úrokového dělitele.

Počet dní	**Zůstatek**		**Nevyužitý rámec**	**Překročený rámec**
	kreditní	debetní		
16		15 000	25 000	
47		24 000	16 000	
44	5 000	19 000	21 000	
36		44 000		4 000
20		14 000	26 000	
21	6 000		40 000	

Počet dní	**Úroková čísla**			
	kreditní	debetní	z překročeného rámce	z nevyužitého rámce
16		2 400		4 000
47		11 280		7 520
44		8 360		9 240
36		15 840	1 440	
20		2 800		5 200
11	1 260			4 400
$\sum$	1 260	40 680	1 440	30 360

Debetní výše úroku

$$u_d = \frac{40\,680}{360} \cdot 16 = 1\,808 \text{ Kč}.$$

Kreditní úrok

$$u_{kr} = \frac{1\,260}{360} \cdot 3 = 10{,}50 \text{ Kč}.$$

Úrok za překročení rámce

$$u_{pr} = \frac{1\,440}{360} \cdot 5 = 20{,}00 \text{ Kč}.$$

Úrok za nevyužitý rámec

$$u_{nr} = \frac{30\,360}{360} \cdot 0{,}4 = 33{,}\overline{733} \text{ Kč}.$$

Banka bude za dané období klientovi účtovat

- **úrokové náklady a provize**: 1 808,00 + 20,00 + 33,733 = 1 861,733 Kč,
- **úrokové výnosy**: 10,50 Kč,
- **čisté náklady na klienta budou**: 1 861,733 − 10,50 = 1 851,233 Kč.

Konečný zůstatek na účtu bude: 6 000 − 1 851,233 = 4 148,767 Kč

Otázky k zamyšlení

1. Vypracovat ukázkové řešení všemi metodami hypotetické úlohy s nejméně 10 od sebe různými účtovanými položkami (vklady a výběry) klientů a s různými intervaly jednotlivých vkladů a výběrů. Vypočítat všechny hodnoty uvedené v této kapitole (provize z úvěrového rámce, provize z nečerpaného úvěrového rámce, provize za překročení úvěrového rámce).

- Hmotná aktiva
- Finanční aktiva
- Akcie

10. Aktiva

Cíl kapitoly

Vzhledem k tomu, že se těmito základními pojmy bude zaobírat kurz „Finanční trhy“ je v této části věnována pouze okrajová pozornost s tím, aby studenti pochopili význam aktiv pro jejich obchodování na různých aukcích a dovedli je začlenit do forem získávání kapitálu a jeho dalšího zhodnocování. Cvičení k této kapitole není bezprostředně nutné. Podrobněji se touto problematiku zabývá také kurz „Teorie portfolia“.

Jelikož o této problematice pojednává kurz „Finanční trhy“ daleko podrobněji, jsou v této kapitole uvedeny pouze ty nejzákladnější pojmy potřebné pro pochopení navazujících kurzů v kombinovaném studiu a celoživotním vzdělávání. Nejsou zde uvedeny pojmy jako odhady výnosností akcií, riziko změny výnosnosti akcií v čase atd. Proto cílem této kapitoly je seznámit se velmi stručně pouze se stanovením kurzu akcie neboť další podrobnosti budou probrány v jiných budoucích kurzech na této fakultě.

Časová zátěž

- Prostudování a pochopení vztahů této kapitoly vyžaduje 6 hod.

Jelikož předmětem finanční matematiky jsou i aktiva, uděláme si stručný přehled základních typů aktiv a ukážeme si, jakým způsobem můžeme vypočítat jejich současné hodnoty a z nich v budoucnu plynoucí příjmy.

Aktivum je cokoliv, co je předmětem vlastnictví, například

- **cenné papíry** (akcie, obligace, podílové listy),
- **nemovitosti** (obytné a kancelářské budovy, výrobní objekty, pozemky),
- **movitý majetek** (automobily, zásoby materiálu a surovin).

Investice je aktivum, které přináší svému majiteli tok důchodů. Tento tok důchodů může být i záporný.

Členění aktiv:

- **hmotná** – movitosti (zboží na skladě, automobil, zásoby surovin a polotovarů, stroje a zařízení atd.)
- **nehmotná** – know-how, software atd.
- **finanční** – peníze v hotovosti a na účtech, nakoupené cenné papíry směnky, dluhopisy atd.

Nyní si podrobněji probereme jednotlivé druhy aktiv a s některými se podrobněji seznámíme z pohledu finanční matematiky.

10.1 Hmotná aktiva

Hmotnými aktivy se nebudeme zaobírat. Tento typ majetku se však často používá za spekulačními účely (očekávaný růst jeho ceny v budoucnu, výnosy získané jeho pronájmem, očekávané zvýšení cen starožitností atd.) a také za účelem zajištění (ochrana před inflací, zástava za úvěr).

a) Movitý majetek

- **sbírkové předměty** – většinou jde o historické předměty se značnou historickou nebo uměleckou cenou, různé sbírky (známky, mince, šperky, knihy atd.)
- **zvířata** – drůbež, dobytek, dostihoví koně a chrti, chov exotických zvířat atd.
- **stroje a zařízení budov** – soustruhy, frézy, zařízení pro truhlářskou výrobu, zařízení obchodu nebo výrobny atd.

b) Nemovitý majetek

- **obytné budovy** – hlavním zdrojem zisku je příjem z prodeje nemovitosti. Dalším zdrojem důchodů jsou nájmy, které jsou však nevýhodné, neboť legislativou je omezená možnost volně s touto nemovitostí disponovat (vystěhovat nájemníky) a libovolně zvyšovat nájem. Obecně platí, že nákup obytných budov přináší malý výnos.
- **kancelářské budovy** – nejvýnosnější typ podnikání (pronájem kancelářských budov nebo místností) v oblasti nemovitostí.
- **výrobní budovy** – pronájem nemovitostí je typickým příkladem hlavně pro skladovací prostory.
- **pozemky** – vlastnictví lesní a zemědělské půdy je obvykle velmi málo výnosné. Výjimku tvoří ta půda, která byla vyjmuta z půdního fondu a má sloužit pro výstavbu nemovitostí. S vlastnictví takovéto půdy se velmi často spekuluje pro získání značného zisku z prodeje, zvláště ve velmi lukrativních oblastech nebo místech.

10.2 Finanční aktiva

Finanční aktiva mají v praxi nezastupitelné místo a dominantní postavení. Tato finanční aktiva ještě dělíme na:

a) Hotovost a depozita

- **hotovost** – udržovat větší objem hotovostních prostředků v portfoliu není ekonomické a ani obvyklé
- **depozita** – některé fondy kolektivního investování musí mýt dostatek dostupných prostředků na běžných nebo termínových účtech pro zajištění likvidity aktiv ve svém portfoliu (příklad: otevřené podílové fondy).

b) Cenné papíry

a) **majetkové** – majiteli cenného papíru dávají právo na podíl z majetku a na jeho správě.

- **akcie** – je cenný papír, kterým emitent (firma, společnost, finanční ústav atd.) umožňuje (osvědčuje) akcionáři:
  - právo spolupodílet se na řízení společnosti
  - právo podílet se na zisku společnosti většinou formou dividend
  - právo podílet se na likvidační kvótě z majetku společnosti

- **druhy akcií**
  - kmenové – jedná se o standardní akcie emitované pro získání nebo zvýšení základního kapitálu
  - prioritní – zajišťují výplatu držiteli akcií v podobě pevně daných dividend
  - úrokové – vynášejí majiteli pevný úrok nebo i podíl na zisku
- **účast** – jde o cenný papír, který majiteli potvrzuje právo podílet se na vytvořeném zisku a na likvidačním zůstatku společnosti nebo firmy. Proti akcii zde chybí právo podílet se na rozhodování společnosti. Tyto akci emitují většinou firmy nebo společnosti, kterým zákon neumožňuje emitovat akcie.
- **podílové listy** – jde o cenný papír, který zajišťuje majiteli podíl v instituci kolektivního investování. Tento typ cenného papíru je svým charakterem velmi blízký účasti. V ČR jednotlivé investiční společnosti vytvářejí podílové fondy a podílové listy těchto fondů pak opravňují majitele pobírat podíl na majetku v tomto fondu.

b) Dluhové cenné papíry

- **směnka** – je listina, která obsahuje zákonem vymezené náležitosti a jejímu majiteli z ní vyplývá právo na zaplacení peněžní pohledávky, která je na směnce uvedena. Tuto částku musí vystavovatel této směnky zaplatit tomu, kdo na tuto listinu napsal svůj závazek a podepsal jej.
- **splatné cenné papíry a kupóny** – jedná se o splatné kupóny akcií a dluhopisů, neboť se obchoduje i s dluhopisy, které dospívají během jednoho roku.
- **obligace (dluhopis, bond)** – je cenný papír, na němž se vystavovatel zavazuje jeho majiteli vyplatit dlužnou nominální částku a vyplácet výnosy tohoto cenného papíru k určitému, na daném CP uvedenému, datu.
- **Obligace emitují:**
  - **stát** – státní obligace (dluhopisy)
  - **průmyslové podniky** – průmyslové (podnikové) obligace
  - **banky** – bankovní obligace
  - **orgány státní správy** – regionální, místní nebo městské obligace

- **Druhy obligací:**
  - **ziskové** – majitel obligace má právo pobírat i část zisku z emitentovy firmy.
  - **diskontované** – z těchto obligací se nevyplácí úrok, ale prodávají se za menší hodnotu něž nominální (face value)
  - **prémiové** – tyto obligace většinou mají menší úrokovou sazbu, ale za určitý počet let, pevně daný, se vyplácí prémie
  - **indexované** – velikost úroku těchto obligací závisí na velikosti inflace (velikost inflace je většinou měřena indexem spotřebitelských cen)
  - **prioritní** – při likvidaci firmy dávají majiteli přednostní právo na vyplacení této obligace (přednostní vypořádání).

- **zástavní listy (hypoteční listy)** – je to obligace, u které je splacení závazků emitenta zabezpečeno hypotekárně jištěnými pohledávkami. Případný emitentův věřitel má při nesolventnosti emitenta možnost získat pohledávky prodejem nemovitosti emitenta.
- **státní dluhopisy** – dlouhodobější cenný papír, jejichž emitováním si organizace (firma, banka, stát) může opatřit potřebný kapitál. Základní dělení obligací je na obligace s nulovým kupónem (zero-coupon bonds, pure-discount bonds) a kupónové obligace (coupon bonds). Kupónové obligace nepřinášejí úrok a jsou emitovány s diskontem. Této diskont je součástí nominální hodnoty obligace, která musí být proplacena majiteli obligace k předem stanovenému datu. Obvyklejší jsou však kupónové obligace, které přinášejí úrok. Úrok je vyplácen ve formě pravidelných kupónových plateb, jejichž výplata je předem stanovena a je udávaná ve formě procent z nominální hodnoty obligace, tak zvaná kupónová sazba.
- **vkladové listy (depozitní certifikáty)** – je krátkodobý obchodovatelný zúročitelný cenný papír, který vydávají banky výměnou za termínované vklady. Doba splatnosti se pohybuje od jednoho do několika měsíců, i když někdy se také emitují střednědobé depozitní certifikáty s dobou splatnosti větší než jeden rok. Prodej depozitních certifikátů je většinou založen na diskontním principu.
- **pokladniční poukázky ČNB** – je cenný papír, který slouží ke krytí deficitu státního rozpočtu. Dávají jej do oběhu ministerstva financí. Ve srovnání s jinými cennými papíry mají největší likviditu. Kalkulace zisku spojeného s koupí poukázky je téměř bez rizika, neboť je zde státní garance a vzhledem ke krátké době splatnosti se redukuje i vliv inflace a změn úrokových sazeb.

c) Nárokové cenné papíry

- **pojistná smlouva** – je smlouva uzavřená mezi subjekty, kdy jeden subjekt je oprávněn požadovat plnění od jiného subjektu, jestliže nastane smlouvou konkrétně specifikovaná událost (např. smlouva na smíšené pojištění, dovršení určitého věku atd.).
- **termínové kontrakty** – (někteří autoři považují tyto smlouvy za cenné papíry, kdežto jiní je chápou jako typ uzavřeného obchodu). Jedná se především o termínové kontrakty typu:
  - **forward** – vzniká na základě domluvy mezi účastníky obchodu o množství, ceně, druhu zboží a na termínu dodání tohoto zboží. Tento druh je uváděn proto, že mnoho portfolií je svázáno termínovými smlouvami, které chrání portfolio před nepředvídanými událostmi (např. změna měnového kurzu).
  - **futures** – vysoce standardizovaný forward, což umožňuje jeho obchodování na specializovaných burzách. Často se říká, že futurem je forward obchodovaný na burze.
  - **Option** (česky: opce) – termínová transakce, při níž získává držitel (majitel) opce právo koupit určité zboží ve vymezeném termínu od emitenta opce (kupní opce-call options). Emitent opce má po-

vinnost dodat zboží, pokud držitel kupní opce má o toto zboží zájem, nebo prodat určité zboží ve vymezeném termínu emitentovi opce (prodejní opce-put options). Znamená to, že emitent opce má povinnost odkoupit toto zboží, pokud držitel opce bude mít o tento prodej zájem. Opce můžeme ještě rozdělit podle času plnění a to na: americkou opci, kdy majitel smí požadovat plnění kdykoliv před vypršením termínu opce, nebo evropská opce, kdy majitel smí požadovat plnění po vypršení termínu opce.

10.3 Akcie

Běžně při zkoumání akcií přistupujeme dvěma způsoby. Buď pomocí fundamentální analýzy, nebo technické analýzy. Budeme se zabývat pouze fundamentální analýzou (fundamentálním analytickým modelem). Tato analýza je založena na rozboru budoucích výsledků společností (např. tržeb, výnosů, nákladů, dividend atd.). Tyto analýzy jsou podkladem pro hodnocení akcií, jako je zjišťování ceny a výnosnosti akcie. Akcie jsou vedle své funkce dokladu o kapitálovém podílu také předmětem burzovních obchodů. Jejich obchodní hodnota závisí na nabídce a poptávce a je vyjadřována jako **kurz akcie**. Proti stálé nominální hodnotě je kurzovní hodnota akcie **proměnlivá**. Nabídka i poptávka po akciích jsou ovlivňovány nejen faktory, které souvisejí s jejich výnosností a výkonností akciové společnosti, ale také nejrůznějšími událostmi v národní a mezinárodní ekonomice i politice.

Ke stanovení teoretické ceny akcie používáme nám již známý výraz výpočtu počáteční hodnoty kapitálu.

$$PV = \sum_{t=1}^{T} \frac{\text{příjem}}{(1+i)^t}.$$

Jestliže místo příjmu dosadíme výši dividendy na akcii d a za předpokladu, že dividenda bude vyplácená každý rok (můžeme počítat i pro $t \to \infty$), obdržíme tak zvaný dividendový model (dividend model, dividend discount model), který nám bude určitě připomínat výraz pro výpočet věčného důchodu, neboť dividenda nám představuje výplatu důchodu (dividendy o stejné výši) v každém roce.

Teoretická cena akcie pak bude

$$P = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d_t}{(1+i)^t} = \frac{d_1}{1+i} + \frac{d_2}{(1+i)^2} + \frac{d_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{d_\infty}{(1+i)^\infty}.$$

V tomto případě budou výplaty jednotlivých dividend různé podle hospodářských výsledků společnosti. Pokud budou dividendy v jednotlivých létech stejné, což znamená, že $d_0 = d_1 = d_2 = \cdots = d_\infty$, potom se daný výraz redukuje na tvar

$$P = \frac{d_0}{i}.$$

Opět si vzpomeňme na věčný důchod, kde $D = \dfrac{a}{i}$, a byla výše vypláceného důchodu a v našem případě je tímto důchodem vyplácená dividenda d_0. Jestliže bude dividenda vyplácená vícekrát za rok, potom uvedený výraz (kurz akcie) bude vyjádřen ve tvaru $P = \dfrac{d_0}{r}$, kde $r = \dfrac{p}{100 \cdot m} = \dfrac{i}{m}$, kde m je počet (frekvence) výplat dividend za rok a $m > 1$.

Pokud se bude pravidelně zvyšovat hodnota dividendy o konstantní hodnotu k (rychlost nebo tempo růstu vyplácených dividend), potom daný výraz bude udávat cenu akcie ve tvaru:

$$P = \frac{d_0 \cdot k}{r - k + 1}, \qquad k = \frac{d_{t+1}}{d_t}, \qquad 0 \leq k \leq 1, \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

kde $r = \dfrac{p}{110 \cdot m} = \dfrac{i}{m}$.

V našich případech jsme předpokládali, že akcie bude poskytovat nekonečný počet dividendových příjmů. Většina investorů však posuzuje investici–akcii z kratšího časového horizontu, který označíme písmenem T. Zároveň kromě dividendového příjmu očekává i kapitálový zisk z prodeje této akcie za cenu P_T. Tuto cenu akcie nazýváme též tržní cenou, která je dána nabídkou a poptávkou po této akcii. Proto pro výpočet volíme vhodnější výraz z časově omezené doby

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{d_t}{(1+i)^t} + \frac{P_T}{(1+i)^T} = \frac{d_1}{1+i} + \frac{d_2}{(1+i)^2} + \frac{d_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{d_t + P_T}{(1+i)^T}.$$

Příklad 10.1.

Jaký kurz má akcie se čtvrtletní dividendou 45 Kč při úrokové míře 5 % p. a.?

Řešení. $d = 45$ Kč, $p = 5\,\% = 0{,}05$, $r = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$,

$$\begin{aligned} P &= \frac{d}{r}, \\ P &= \frac{45}{0{,}0125} = 3\,600. \end{aligned}$$

Kurz akcie bude 3 600 Kč

Příklad 10.2.

Jaký kurz má akcie, na kterou byla za loňský rok vyplácená dividenda ve výši 80 Kč, při čemž v prvním případě bude rychlost růstu dividend $k = 0$ a v druhém případě bude $k = 5\,\%$ p. a.? Požadovaná úroková sazba je 7 % p. a. Doba výplat není časově omezena.

Řešení.

1. $P = \dfrac{d_0}{i} = \dfrac{80}{0{,}07} = 1\,142{,}857$ Kč,
2. $P = \dfrac{d_0 \cdot (1+k)}{i - k} = \dfrac{80 \cdot (1 + 0{,}05)}{0{,}07 - 0{,}05} = 4\,200$ Kč.

Příklad 10.3.

Jaký kurz má akcie, na kterou byla za loňský rok vyplácená čtvrtletní dividenda v poslední výši 42 Kč, při čemž dividenda během čtyř čtvrtletí rostla přibližně o 0,5 % čtvrtletně. Úroková míra je 0,06 p. a.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{d_0 \cdot k}{r - k + 1} \\
k &= \frac{d_{t+1}}{d_t} = \frac{42 + 42 \cdot 0{,}005}{42} = 1{,}005, \\
P &= \frac{42 \cdot 1{,}005}{\frac{0,06}{4} - 1{,}005 + 1} = 4\,221 \text{ Kč},
\end{aligned}
$$

Příklad 10.4.

Máme vypočítat cenu akcie, kterou chceme po třech letech prodat. Tržní cena akcie bude po těchto letech 450,00 Kč. Dividenda je každým rokem konstantní ve výši 25,00 Kč. Úroková sazba u této akci nechť je 6 % p. a.

Řešení.

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{t=1}^{3} \frac{25_t}{(1 + 0{,}06)^t} + \frac{450 + 25}{(1 + 0{,}06)^3} = \\
&= \frac{25}{1 + 0{,}06} + \frac{25}{(1 + 0{,}06)^2} + \frac{25}{(1 + 0{,}06)^3} + \frac{450 + 25}{(1 + 0{,}06)^3} = \\
&= 23{,}5849 + 22{,}2499 + 21{,}59594 + 398{,}8192 = 466{,}2499 \text{ Kč}.
\end{aligned}
$$

Otázky k zamyšlení

1. Jaký kurz má akcie se čtvrtletní dividendou 35 Kč a úrokové míře 5 % p. a.? [2 800 Kč]
2. Určete kurz akcie, na kterou se vyplácí roční dividenda 50 Kč při úrokové sazbě 5 % p. a. [1 000 Kč]
3. Jaký kurz má akcie, na kterou byla za loňský rok vyplácená čtvrtletní dividenda v poslední výši 20 Kč, přičemž částka dividendy během čtyř čtvrtletí rostla přibližně o 1 % čtvrtletně? Úroková sazba je 7 % p. a. [2 693,33 Kč]

Shrnutí

Prostudováním tohoto textu získáte znalosti z výpočetních postupů, s kterými se setkáváte při běžné praxi. Všechny kapitoly jsou ilustrovány názornými ukázkovými příklady a proto je nutné tento text studovat s tužkou a papírem, aby jste si vždy ověřili, zda dané problematice dokonale rozumíte. Jde také o to, nejen porozumět problémům, které jsou uvedeny v textu, ale také umět teoreticky i prakticky tyto problémy řešit. Znalost středoškolské matematiky dostačuje pro pochopení a odvození jednotlivých vztahů uvedených v tomto textu, jak jste si mohli po přečtení textu uvědomit, a proto je nutno využít volného času pro řešení úloh uvedených vždy na konci každé kapitoly. Ne každého budou zajímat všechny kapitoly, neboť se dostává v praxi do styku pouze s některými, ale pro vysokoškolsky vzdělaného jedince je velmi důležité, aby jeho obzor sahal dále než odpovídá jeho praxi. V řadě funkcích je také nutno teoreticky vysvětlit jednotlivé vztahy a možnosti jejich využití ať již s klienty nebo podřízenou skupinou kolegů.

Důraz je nutno položit na otázky způsobů úročení a jeho využití při měnících se úrokových sazbách. Také důležité je pochopit a prakticky provádět úročení běžných účtů a kontokorentních úvěrů, v současné době, jako velmi užívaného způsobu získávání finančních zdrojů, a vědět proč se úročení provádí tímto způsobem a umět tyto operace zdůvodnit. Dalším důležitým úkolem je dovést vysvětlit otázku spoření a umět poradit způsoby spoření pro klienta nejvýhodnější, i když samozřejmě pro něj je velmi důležitá stávající úroková sazba. I když otázka důchodů je v současné době preferována ve sdělovacích prostředcích a výhodnější je pojištění důchodu v některé komerční pojišťovně, nebo důchodové připojištění s příspěvkem státu, je vhodné znát konstrukci vztahů při výpočtu důchodů i z pohledu finanční matematiky.

Tento text nezaručuje dokonalé znalosti z finanční matematiky a je proto nezbytně nutné další sebevzdělání z uvedené literatury, která prohloubí znalosti získané po prostudování této studijní opory. Otázce dluhopisů a derivátům, dnes již používaných, budou věnovány samostatné kurzy a to: Analýza dluhopisů a Deriváty finančního trhu.

Každé studium, nejen distanční, sebou přináší řadu odříkání a mnoho času pro studium. Prohloubení a rozšíření vašich znalostí o problémy finanční matematiky vám umožní orientovat se v této problematice a zkvalitnit plnění úloh ve vaší praxi.

Příloha

Souhrn vzorců z finanční matematiky

Jednoduché úročení polhůtní a předlhůtní	
Slovní vyjádření	**Vzorec**
výpočet úroku	$u = \frac{K \cdot p \cdot d}{100 \cdot 360}$
výpočet úroku pomocí úrokové sazby	$u = K \cdot i \cdot t$
výpočet úroku pomocí úrokových čísel a úrokových dělitelů	$u = \frac{UC}{UD} = \frac{\frac{K \cdot d}{100}}{\frac{360}{p}}$
výpočet úroku součtovým vzorcem	$u = \frac{\sum_{j=1}^{n} UC_j}{UD}$
konečný kapitál při jednoduchém polhůtním úročení	$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$
konečný kapitál – modifikovaná rovnice	$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot d}{100 \cdot 360}\right)$
počáteční kapitál při jednoduchém polhůtním úročení	$K_0 = \frac{K_t}{1 + i \cdot t}$
doba splatnosti při jednoduchém polhůtním úročení	$t = \frac{K_t - K_0}{K_0 \cdot i}$
obchodní diskont při jednoduchém polhůtním úročení	$D_{\mathrm{ob}} = K_t \cdot i_D \cdot t$
obchodní kapitál při jednoduchém polhůtním úročení	$K_{\mathrm{ob}} = K_t \cdot (1 - i_D \cdot t)$
současná hodnota při jednoduchém polhůtním úročení	$K_0 = \frac{K_t}{1 + i_D \cdot t}$
matematický diskont	$D_{\mathrm{mat}} = K_0 \cdot i_D \cdot t$
matematický diskont při jednoduchém polhůtním úročení	$D_{\mathrm{mat}} = \frac{K_t \cdot i_D \cdot t}{1 + i_D \cdot t}$

matematický diskont pomocí obchodního diskontu	$D_{\text{mat}} = \dfrac{D_{\text{ob}}}{1 + i_D \cdot t}$
konečný kapitál při jednoduchém předlhůtním úročení	$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \dfrac{I}{1 - I} \cdot t\right)$
vztah mezi předlhůtní a polhůtní úrokovou sazbou	$I = \dfrac{i}{1 + i}$
vztah mezi polhůtní a předlhůtní úrokovou sazbou	$i = \dfrac{I}{1 - I}$
doba splatnosti při jednoduchém předlhůtním úročení	$t = \dfrac{K_t - K_0}{K_0} \cdot \dfrac{1 - I}{I}$

Složené úročení polhůtní a předlhůtní	
Slovní vyjádření	**Vzorec**
základní rovnice při složeném úročení, výpočet konečné hodnoty kapitálu, $t \in \mathbb{N}$, úročení je polhůtní p. a.	$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t$
konečný kapitál pro $t \in \mathbb{N}$, úročení je m-krát za rok	$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$
konečný kapitál pro $t \notin \mathbb{N}$, úročení je polhůtní p. a.	$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + R \cdot i)$
konečný kapitál pro $t \notin \mathbb{N}$, úročení je m-krát do roka polhůtní p. a.	$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^n \cdot (1 + R \cdot i)$
výpočet doby splatnosti pro $t \in \mathbb{N}$, úročení je polhůtní p. a.	$t = \dfrac{\ln K_t - \ln K_0}{\ln(1 + i)}$
výpočet zbytku doby splatnosti, když $t \notin \mathbb{N}$ a úročení je polhůtní p. a.	$R = \dfrac{\frac{K_t}{K_0} - (1 + i)^{n_0}}{i \cdot (1 + i)^{n_0}}$

výpočet zbytku doby splatnosti, když $t \notin \mathbb{N}$ a úročení je m-krát za rok	$R = \dfrac{\dfrac{K_t}{K_0} - \left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^{n_0}}{i \cdot \left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^{n_0}}$
výpočet současné hodnoty pro $t \in \mathbb{N}$, kdy úročení je polhůtní p. a.	$K_0 = \dfrac{K_t}{(1+i)^t}$
výpočet současné hodnoty pro $t \in \mathbb{N}$, kdy úročení je m-krát do roka	$K_0 = \dfrac{K_t}{\left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^{m \cdot t}}$
výpočet současné hodnoty pro $t \notin \mathbb{N}$, kdy úročení je polhůtní p. a.	$K_0 = \dfrac{K_t}{(1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i)}$
výpočet současné hodnoty pro $t \notin \mathbb{N}$, kdy úročení je m-krát do roka	$K_0 = \dfrac{K_t}{\left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i)}$
výpočet úrokové sazby pro $t \in \mathbb{N}$, kdy úročení je polhůtní p. a.	$i = \sqrt[t]{\dfrac{K_t}{K_0}} - 1$
výpočet úrokové sazby pro $t \in \mathbb{N}$, kdy úročení je m-krát do roka	$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot t]{\dfrac{K_t}{K_0}} - 1 \right)$
výpočet úrokové sazby pro $t \notin \mathbb{N}$, kdy úročení je m-krát za rok	$i = m \cdot \left(\sqrt[m \cdot (n_0 + R)]{\dfrac{K_t}{K_0}} - 1 \right)$
výpočet úroku pro $t \in \mathbb{N}$, kdy úročení je polhůtní p. a.	$u = K_0 \cdot [(1+i)^t - 1]$
výpočet úroku pro $t \notin \mathbb{N}$, kdy úročení je polhůtní p. a.	$u = K_0 \cdot [(1+i)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i) - 1]$
výpočet úroku pro $t \notin \mathbb{N}$, kdy úročení je m-krát za rok	$u = K_0 \cdot \left[\left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^{n_0} \cdot (1 + R \cdot i) - 1 \right]$
efektivní úroková sazba	$i_{\text{efekt.}} = \left(1 + \dfrac{i}{m}\right)^{m} - 1$

úroková intenzita	$f = \ln(1 + i_{\text{efekt.}})$
reálná výše kapitálu na konci úrokovacího období	$K_r = K_0 \cdot \dfrac{1+i}{1+i_{\text{inf.}}}$
reálná úroková sazba	$i_r = \dfrac{K_r}{K_0} - 1$ nebo $i_r = \dfrac{i - i_{\text{inf.}}}{1 + i_{\text{inf.}}}$

Spoření	
Slovní vyjádření	**Vzorec**
spoření krátkodobé předlhůtní	$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \dfrac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$
spoření krátkodobé polhůtní	$S'_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \dfrac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$
výpočet výšky vkladu – předlhůtní	$x = \dfrac{S_x}{m \cdot \left(1 + \dfrac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$
výpočet výšky vkladu – polhůtní	$x = \dfrac{S'_x}{m \cdot \left(1 + \dfrac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}$
spoření dlouhodobé předlhůtní	$S = a \cdot (1+i) \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
spoření dlouhodobé polhůtní	$S' = a \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
výpočet výšky vkladu – předlhůtní	$a = \dfrac{S \cdot i}{(1+i) \cdot [(1+i)^n - 1]}$
výpočet výšky vkladu – polhůtní	$a = \dfrac{S' \cdot i}{(1+i)^n - 1}$

výpočet doby spoření – předlhůtní	$n = \dfrac{\ln\left[1+\dfrac{S\cdot i}{a\cdot(1+i)}\right]}{\ln(1+i)}$
výpočet doby spoření – polhůtní	$n = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{S'\cdot i}{a}\right)}{\ln(1+i)}$
kombinované spoření předlhůtní	$S = m\cdot x\cdot\left(1+\dfrac{m+1}{2\cdot m}\cdot i\right)\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$
kombinované spoření polhůtní	$S' = m\cdot x\cdot\left(1+\dfrac{m-1}{2\cdot m}\cdot i\right)\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$
výpočet výšky vkladu – předlhůtní	$x = \dfrac{S}{m\cdot\left(1+\dfrac{m+1}{2\cdot m}\cdot i\right)\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{i}}$
výpočet výšky vkladu – polhůtní	$x = \dfrac{S'}{m\cdot\left(1+\dfrac{m-1}{2\cdot m}\cdot i\right)\cdot\dfrac{(1+i)^n-1}{i}}$
výpočet doby spoření – předlhůtní	$n = \dfrac{\ln\left[\dfrac{S\cdot i}{m\cdot x\cdot\left(1+\frac{m+1}{2\cdot m}\cdot i\right)}+1\right]}{\ln(1+i)}$
výpočet doby spoření – polhůtní	$n = \dfrac{\ln\left[\dfrac{S'\cdot i}{m\cdot x\cdot\left(1+\frac{m-1}{2\cdot m}\cdot i\right)}+1\right]}{\ln(1+i)}$

Důchody	
Slovní vyjádření	**Vzorec**
důchod bezprostřední předlhůtní	$D = a\cdot\dfrac{1-v^n}{v\cdot i}$
důchod bezprostřední polhůtní	$D' = a\cdot\dfrac{1-v^n}{i}$

důchod vyplácený m-krát ročně předlhůtní	$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$
důchod vyplácený m-krát ročně polhůtní	$D' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i}$
důchod odložený předlhůtní	$K = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^{k-1}$
důchod odložený polhůtní	$K' = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^k$
důchod odložený předlhůtní vyplácený m-krát za rok	$K = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^k$
důchod odložený polhůtní vyplácený m-krát za rok	$K' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot v^k$
důchod bezprostřední věčný předlhůtní	$D = \frac{a}{i \cdot v}$
důchod bezprostřední věčný polhůtní	$D' = \frac{a}{i}$
důchod věčný bezprostřední předlhůtní vyplácený m-krát za rok	$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$
důchod věčný bezprostřední polhůtní vyplácený m-krát za rok	$D' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1}{i}$
důchod odložený věčný předlhůtní	$K = a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right) v^k$
důchod odložený věčný polhůtní	$K' = \frac{a}{i} \cdot v^k$
důchod odložený věčný předlhůtní vyplácený m-krát za rok	$K = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right) \cdot v^k$
důchod odložený věčný polhůtní vyplácený m-krát za rok	$K' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{v^k}{i}$

Umořování dluhu	
Slovní vyjádření	**Vzorec**
výpočet výše anuity	$a = \dfrac{D \cdot i}{1 - v^n}$
výpočet úroku v $(r+1)$-ním období	$U_{r+1} = a \cdot (1 - v^{n-r}) = D_r \cdot i$
výpočet úmoru v $(r+1)$-ním období	$M_{r+1} = a \cdot v^{n-r} = a - D_r \cdot i = M_r \cdot (1+i)$
výpočet počtu anuit	$n = \dfrac{\ln\left(1 - \dfrac{D \cdot i}{a}\right)}{\ln v}$
výpočet poslední splátky dluhu	$b = \left(D - a \cdot \dfrac{1 - v^{n_0}}{i}\right) \cdot (1+i)^{n_0+1}$
výpočet zbytku úmoru	$M_{n_0+1} = b \cdot v$
výpočet posledního úroku	$U_{n_0+1} = b \cdot v \cdot i$

Ukázka předpokládaných úloh POT1 – POT2

1) Jaká bude naspořená částka za 5 let, jestliže klient každý měsíc spoří 500,- Kč s úrokovou sazbou 4 % p. a. Míra inflace v jednotlivých létech bude: 1. rok 1,25; 2. rok 0,57; 3. rok 2,03; 3. rok 1,765; 4. rok 1,037 a 5. rok 0,953.
2) Na jakou hodnotu se zúročil vklad 120 000 Kč za 2 roky, 8 měsíců a 21 dní, je-li úročen v bance při úrokové sazbě 6 % p. a.
3) Před osmi lety uložil otec synovi kapitál na $3\frac{1}{4}$ % p. a. při čtvrtletním složeném úročení. Jestliže syn na konci osmého roku vybral 8 091,90 Kč jako konečnou hodnotu včetně úrokového výnosu, jaká byla počáteční hodnota?
4) Klient, který chce uložit 100 000 Kč, se může rozhodnout mezi vkladem na vkladní knížku, která vynáší 2 % p. a. při složeném měsíčním úročení a nákupem obligace (dluhopisu), která vynáší $2\frac{1}{2}$ % p. a. ve dvou stejných pololetních splátkách. Která z těchto alternativ nabízí vyšší výnos?
5) Pan Vocásek plánuje nákup nového auta za 3 roky a počítá s nákupní cenou 320 000 Kč. Svoje současné auto staré dva roky hodlá prodat na protiúčet a odhaduje jeho cenu na 80 000 Kč. Na zbytek ceny nového vozu chce pan Vocásek ukládat na začátku každého čtvrtletí stejnou potřebnou částku, na svůj účet v bance, při úrokové sazbě 12 % p. a. Kolik bude činit tento vklad?
6) Klient se rozhodl ve věku 30 let vytvořit penzijní fond pravidelnými vklady na konci každého roku ve výši 10 000 Kč po dobu 35 let. Počínaje 66 rokem svých narozenin chce vybírat z tohoto fondu koncem každého roku po dobu 15 let. Řešte:
   a) Jestliže platí po dobu celých 50. let existence fondu úroková sazba 8 % p. a. ročně, kolik bude moci klient ze svého fondu ročně vybírat, mezi 66. a 80. rokem svého věku?
   b) Jak se změní částka ročního důchodu, jestliže sníží peněžní ústav po 10. letech od zahájení výplat z fondu, úrokovou sazbu z 8 na 6 % p. a. ročně, jestliže má být dodržená lhůta výplat 15 let?
7) Jaká je reálná hodnota kapitálu 35 560 Kč při složeném pololetním úročení kde $p = 2{,}5\,\%$ p. s. za dva roky, jestliže roční míra inflace bude po tyto dva roky konstantní a bude rovna $i_{\text{inf}} = 0{,}03$? Jaká by byla konečná hodnota vkladu, bude-li míra inflace rovná nule a kolik ztrácíme vlivem inflace na našem vkladu?
8) Jaká je reálná hodnota kapitálu 35 560 Kč při složeném pololetním úročení kde $p = 2{,}5\,\%$ p. s. za dva roky, jestliže roční míra inflace bude po tyto dva roky konstantní a bude rovna $i_{\text{inf}} = 0{,}03$? Jaká by byla konečná hodnota vkladu, bude-li míra inflace rovná nule a kolik ztrácíme vlivem inflace na našem vkladu?
9) Na schůzce 5 let po promoci se absolventi fakulty dohodli, že příští schůzku 10 let po promoci uspořádají jako jubilejní a slavnostní, v luxusním podniku. Na krytí předpokládaných nákladů souhlasili s tím, že každý pošle pokladníkovi ročníku pololetně 20 Kč. Jestliže všech 100 absolventů fakulty tento závazek dodrží při dožití všech a pokladní

svěří správu fondu bance při úrokové sazbě 4 % p. a. úročeno pololetně, jaké výše dosáhne hodnota fondu na konci 10. roku po promoci?

10) Zemřelý zanechal kapitál ve výši 50 000 Kč, který je investován při 12 % p. a. úrokové sazbě úročeného měsíčně. Kolik měsíčních výplat o výši 750 Kč obdrží dědici a kolik bude činit závěrečná výplata?

Glosář

A

Anuita – výše splátky úvěru. Anuita se skládá z úmoru a úroku. Vždy platí: **anuita** $=$ **úmor** $+$ **úrok**. Anuita: $a = D \cdot \frac{i}{1-v^n}$
Anticipativní – úročení předlhůtní. Příjemce kapitálu nedostává celou částku, ale kapitál snížený o úrok, který zaplatí po obdržení tohoto kapitálu.

D

Dekurzivní – úročení polhůtní. Úrok se připisuje na konci úrokovacího období.
Diskont – úrok ode dne výplaty do dne splatnosti
– **obchodní** (bankovní) – výpočet diskontu z budoucí hodnoty kapitálu (konečného kapitálu)
– **matematický** (jednoduchý) – výpočet diskontu z počáteční hodnoty kapitálu (současné hodnoty)
Diskontní faktor – udává současnou hodnotu 1 Kč splatné za jeden rok při úrokové míře i
Důchod – pravidelné výplaty (anuity) vyplácené vždy na počátku nebo na konci určitého časového intervalu
– **předlhůtní** – výplaty jsou vždy na počátku určitého časového intervalu
– **polhůtní** – výplaty jsou vždy na konci určitého časového intervalu
– **bezprostřední** – důchod je vyplácen okamžitě po podepsání smlouvy
– **odložený** – výplata důchodu začne až po určitém časovém období (karenční doba, doba odložení)
– **věčný** – důchod je vyplácen neomezeně dlouho

E

Efektivní úroková sazba – dosažení stejného finančního efektu musí být roční úroková sazba vyšší než při úrokovacím období kratším než jeden rok

J

Jednoduché úročení – úrok se připisuje na začátku nebo na konci úrokovacího období

K

Kapitál – peněžní částka
– **současná hodnota kapitálu** (počáteční hodnota) – rozumíme peněžní částku, která úročena v časovém období přinese hodnotu budoucí
– **budoucí hodnota kapitálu** (konečná hodnota) – zúročený kapitál úrokovou sazbou na konci úrokovacího období

L

Logaritmování – vychází z logaritmické funkce. Početní operace, které zjednodušují početní operace násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Použito u složeného úročení při výpočtu doby uložení a doby spoření.

M

Míra inflace – úhrnná změna cenové hladiny vyjádřená v relativním čísle (také v procentech)

O

Odložený důchod – výplata důchodu nenastane ihned, ale až po určité době k, což se nazývá karenční doba (doba odložení). Zaplatit tento důchod můžeme v určitém věku x, ale výplatu důchodu chceme dostávat až od věku $x + k$
– **polhůtní** – výplata důchodu vždy na konci dohodnutého období
– **předlhůtní** – výplata důchodu vždy na počátku dohodnutého období
– **dočasný** – výplata důchodu polhůtně nebo předlhůtně do smluvně omezené doby
– **doživotní** – výplata důchodu polhůtně nebo předlhůtně až do konce života

P

Posloupnost – rozumíme každou funkci definovanou na množině všech přirozených čísel. Posloupnost získáme, jestliže každému přirozenému číslu n přiřadíme reálné číslo u_n.
– **aritmetická** – u níž rozdíl (diference) kterýchkoliv dvou po sobě jdoucích členů je konstantní (spoření krátkodobé, výpočet počtu stejných anuit, úročení polhůtní a předlhůtní)
– **geometrická** – u níž podíl dvou po sobě jdoucí členů je konstantní (výsledek podílu nazýváme kvocient). Užití: Složené úročení, kde kvocient je větší než jedna, a důchody, kde kvocient je menší než jedna.

S

Střadatel – rozlišujeme střadatel předlhůtní a polhůtní

– **střadatel předlhůtní** – je definován jako $s_n' = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ a udává, kolik ušetříme za n období při úrokové sazbě i, jestliže na počátku každého období uložíme 1 Kč

– **střadatel polhůtní** – je definován jako $s_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ a udává, kolik ušetříme za n období při úrokové sazbě i, jestliže na konci každého období uložíme 1 Kč

U

Umořovatel – udává výši polhůtní anuity nutnou k tomu, aby se zaplatil dluh 1 Kč za n období při úrokové sazbě i. $a_n' = \frac{i}{1-v^n}$

Úrok – je odměna (z pohledu věřitele) za poskytnutí peněžní částky a z pohledu dlužníka za poskytnutí úvěru

Úrokové číslo – je definováno jako součin kapitálu uloženého po dobu d dní děleného stem. $UC = \frac{K \cdot d}{100}$. Úrokové číslo se bude měnit podle doby vkladu a jeho délky.

Úrokový dělitel – udává, za kolik dní činí úrok ze 100 Kč 1 Kč. $UD = \frac{360}{p}$. Pokud se v úrokovacím období nezmění úroková sazba, potom úrokový dělitel je konstantou.

Rejstřík

Literatura

[1] Cipra, T.: *Finanční matematika v praxi*. Edice HZ, Praha 1995

[2] Cipra, T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Edice HZ, Praha 1995

[3] Eichler, B.: *Úvod do finanční matematiky*. Septima, Praha 1993

[4] Macháček, O.: *Finanční a pojistná matematika*. Prospektrum, Praha 1995

[5] Radová, J., Dvořák, P.: *Finanční matematika pro každého*. Grada, Praha 1993

[6] Smékalová, D.: *Finanční a pojistná matematika*. Montanex, Ostrava–Vítkovice 1996

[7] Walter, J.: *Finanční a pojistná matematika*. VŠE, Praha 1992