MASARYKOVA UNIVERZITA
EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA

Pojistná matematika I

Petr Červinek

Brno 2008

Lektoroval: RNDr. František Čámský

ISBN 978-80-210-4532-3

Předmluva

Skripta jsou určena především studentům, kteří absolvují předmět Pojistná matematika I na Ekonomicko-správní fakultě Masarykovy univerzity. Předmět Pojistná matematika I se zabývá pojistnou matematikou životního pojištění. Jedná se o úvod do pojistné matematiky životního pojištění. Autor předpokládá, že studenti mají absolvován předmět Pojišťovnictví nebo ekvivalent a že jsou tedy schopni porozumět používaným výrazům z oboru pojišťovnictví.

Skripta vznikla na základě přednášek, které měl autor v zimním semestru akademického roku 2007/2008. Ke vzniku přispěl také FRVŠ, který pomohl financovat projekt podaný autorem skript pod číslem 2088/2007. Díky příspěvku FRVŠ a ESF bylo možno zakoupit zahraniční odbornou literaturu pro studenty. Z této literatury čerpal také autor při sestavování přednášek, potažmo i skript.

Autor by chtěl také poděkovat Katedře matematiky Ekonomické univerzity v Bratislavě jejíž členové, především RNDr. Viera Sekerová, PhD. a doc. RNDr. Mária Bilíková, PhD., přispěli nemalým dílem k tomu, že se autor zaměřil na studium pojistné matematiky a souvisejících disciplín.

Obsah

1 Úmrtnostní tabulky

1.1 Typy úmrtnostních tabulek

Vedle finančních instrumentů jsou základním nástrojem pro výpočty prováděné v rámci životního pojištění úmrtnostní tabulky.
Úmrtnostními tabulkami se zabývá demografie. Úmrtnostní tabulky poskytují základní informace o úmrtnosti uzavřené stacionární populace. Předpokládá se tedy, že nedochází k migraci obyvatelstva a v čase se nemění ani velikost populace a její věkové složení.
Lze odhadnout pravděpodobnosti úmrtí pro muže a ženy jednotlivých věků a odtud další důležité charakteristiky. Úmrtnostní tabulky pro Českou republiku publikuje každoročně Český statistický úřad.

Rozlišují se úmrtnostní tabulky:

- úplné – mají jednoleté věkové intervaly (tj. údaje pro věk 0, 1, … roků)
- zkrácené – mají víceleté věkové intervaly (často 0, 1-4, 5-9, 10-14, … roků)
- běžné (průřezové) – vycházejí z úmrtnostní zkušenosti populace během krátkého (většinou ročního) časového období obvykle nepřesahujícího 10 let
- generační – představují skutečný záznam průběhu života konkrétní generace (např. ročníku 1910)

V pojišťovací praxi se používají především běžné úplné úmrtnostní tabulky.

1.2 Popis úmrtnostní tabulky

Úmrtnostní tabulky se skládají ze sloupců a řádků. Sloupce představují konkrétní veličiny, např. věk osob, počet žijících osob v daném věku, počet osob zemřelých v daném věku atd. Řádky představují hodnoty veličin uvedených ve sloupcích pro konkrétní věk.

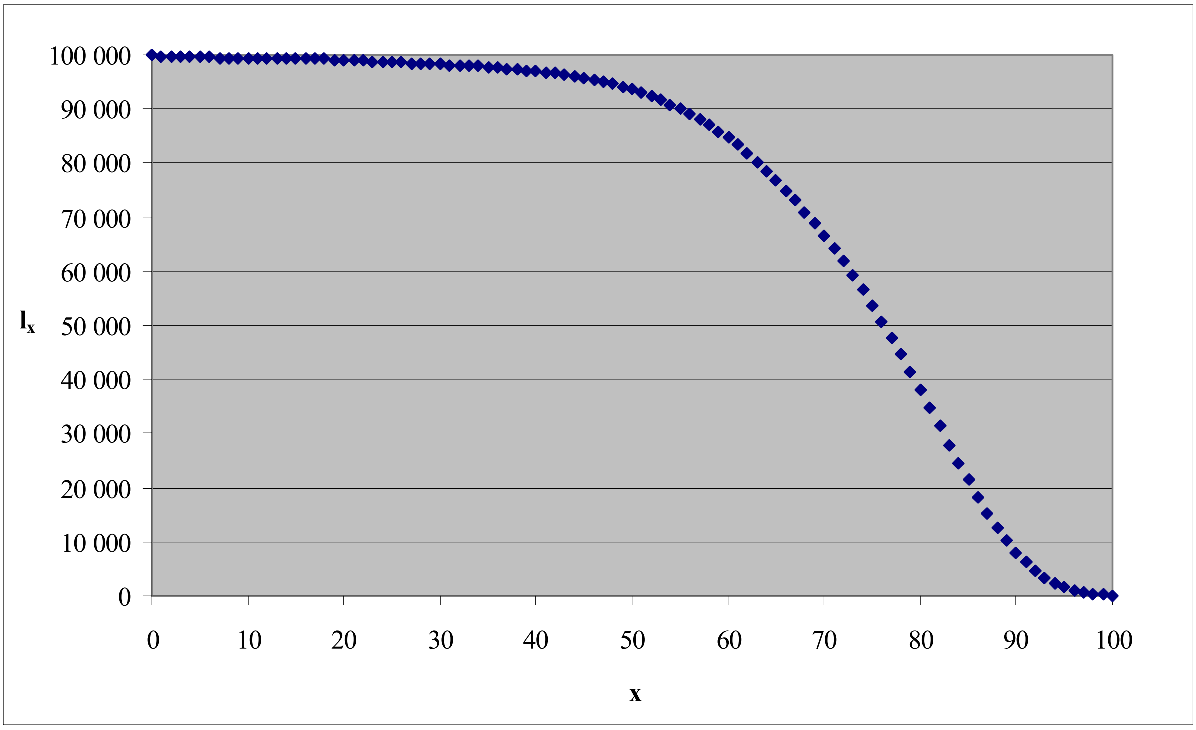
Uvedeme si charakteristiku konkrétních veličin uvedených v úmrtnostních tabulkách, které jsou v přílohách (Příloha 1, Příloha 2, Příloha 3)

x – vyjadřuje ***věk osoby*** - $x \in \{0,1,\cdots,\omega\}$, přičemž ω je předpokládaný nejvyšší věk, který může dosáhnout osoba sledovaného souboru (jak je patrno z příloh, nejvyšší věk v úmrtnostních tabulkách v současné době je 103 let; v letech 1927 – 1936 byl nevyšší věk pouze 85 let)

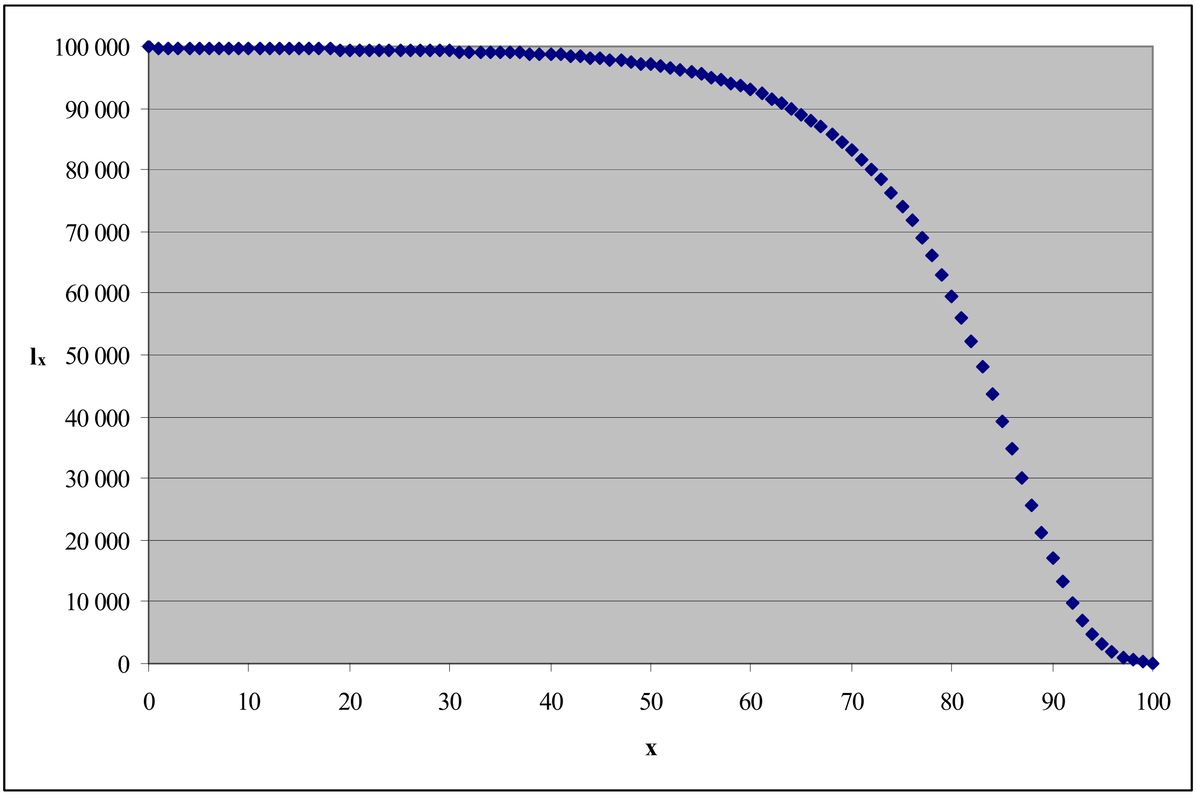
l_x – vyjadřuje ***počet osob žijících ve věku x*** – počáteční hodnota l_0 vyjadřuje počáteční počet osob modelového souboru a nazývá se kořen úmrtnostní tabulky; zřejmě platí $l_{\omega+1} = 0$

Konečná posloupnost $\{l_x\}_0^\infty$ je nerostoucí, tj. $l_0 \geq l_1 \geq \cdots \geq l_\omega$, a nazývá se **funkce přežití** nebo posloupnost žijících. Na Obr. 1, Obr. 2 a Obr. 3 jsou znázorněny funkce přežití pro úmrtnostní tabulky, které jsou uvedeny v přílohách.

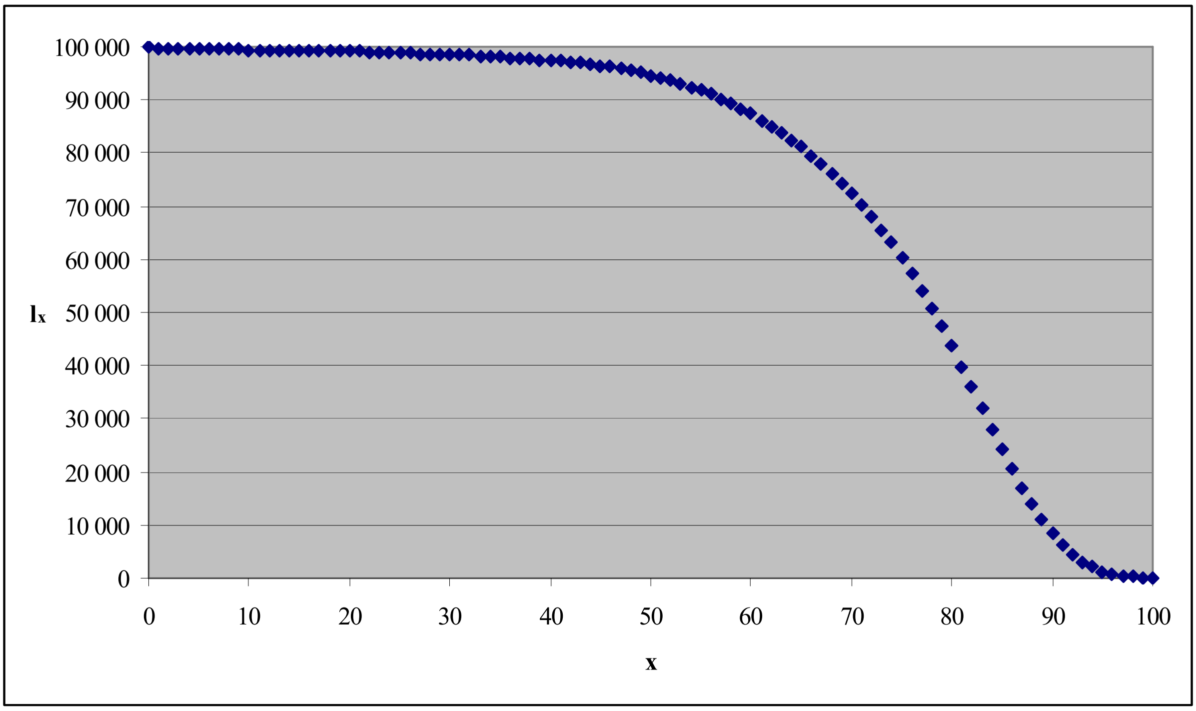
Obr. 1 Funkce přežití pro ČR v roce 2006 – muži



Obr. 2 Funkce přežití pro ČR v roce 2006 – ženy



Obr. 3 Funkce přežití pro ČR v roce 2003 – unisex



p_x – vyjadřuje pravděpodobnost, že *x*-letá osoba se dožije věku *(x+1),* a nazývá se ***roční míra dožití***

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

q_x – vyjadřuje pravděpodobnost, že *x*-letá osoba se nedožije věku *(x+1),* a nazývá se ***roční míra úmrtnosti***;

zřejmě platí $p_x + q_x = 1$, odtud $q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$

d_x – vyjadřuje počet osob, které ***zemřeli ve věku x***; $d_x = l_x - l_{x+1}$

zřejmě platí $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ a $d_\omega = l_\omega$

L_x – vyjadřuje počet roků, které prožily osoby ve věku *x*, tj. celkový počet „osoboroků“, které ve věku *x* prožije l_x osob.

$$L_x \doteq l_{x+1} + \frac{1}{2} d_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}; \qquad x \geq 2$$

T_x – vyjadřuje počet zůstávajících roků života osob ve věku x

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \cdots + L_\omega$$

e_x ($\dot{e}_x$) – vyjadřuje střední délku života osoby ve věku *x*, tj. průměrný počet roků, které se ještě dožije jedinec ve věku *x* let

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}$$

Mimo tyto uvedené vztahy můžeme definovat i následující vztahy:
${}_n p_x$ - vyjadřuje pravděpodobnost toho, že *x-letá* osoba se dožije věku *(x+n)*
${}_n q_x$ - vyjadřuje pravděpodobnost toho, že *x-letá* osoba se nedožije věku *(x+n)*

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \cdots \cdot p_{x+n-1} = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

1.3 Komutační čísla

Při pojistných výpočtech se ve vzorcích často opakují některé součiny a součty. Tyto součiny a součty byly označeny a jejich hodnoty jsou tabelovány (viz. Příloha 4 **Komutační čísla pro úmrtnostní tabulky za ČR v roce 2003 – unisex**). Těmto číslům se říká ***komutační čísla***. Hodnoty komutačních čísel závisí na úmrtnostní tabulce a na výšce (technické) úrokové míry.

Komutační čísla pro živé	**Komutační čísla pro mrtvé**
$D_x = l_x \cdot v^x$	$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$
$N_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} D_{x+j}$	$M_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}$
$S_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} N_{x+j}$	$R_x = \sum_{j=0}^{\omega-x} M_{x+j}$

přičemž $v = \frac{1}{1+i}$ a *i* je (technická) úroková míra.

Vztahy mezi komutačními čísly:

$$N_x = D_x + N_{x+1};\quad M_x = C_x + M_{x+1};\quad S_x = N_x + S_{x+1};\quad R_x = M_x + R_{x+1} \text{ pro } x \in \{1,2,\cdots,\omega-1\}$$

$$D_\omega = N_\omega = S_\omega;\qquad C_\omega = M_\omega = R_\omega$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} D_{x+j} = N_x - N_{x+n}; \qquad \sum_{j=0}^{n-1} C_{x+j} = M_x - M_{x+n}$$

$$S_x = D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots + (\omega - x + 1)D_\omega \quad R_x = C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \cdots + (\omega - x + 1)C_\omega$$

$$C_x = v \cdot D_x - D_{x+1}$$

$$M_x = D_x - d \cdot D_{x+1}; \quad kde \quad d = 1 - v \qquad M_x = v \cdot N_x - N_{x+1}$$

$$R_x = N_x - d \cdot S_{x+1}$$

Pro veškeré výpočty v těchto skriptech je použito podrobných úmrtnostních tabulek za ČR v roce 2003 – unisex a komutačních čísel pro úmrtnostní tabulky za ČR v roce 2003 – unisex, které jsou uvedeny v příloze (Příloha 3 a Příloha 4)

2 Výpočet pojistného v pojištění osob

Pojistné = netto pojistné + náklady pojišťovny

Pojistné se někdy také nazývá ***pojistná sazba, brutto pojistné, pojistný tarif***. V dalším textu budeme tyto názvy používat jako ekvivalentní názvy.

Netto pojistné se někdy také nazývá ***čisté pojistné***, ***rizikové pojistné***. V dalším textu budeme tyto názvy používat jako ekvivalentní názvy.

Pojistné můžeme platit ***jednorázově, běžně*** nebo ***jiným způsobem***. Při jednorázovém placení je pojistné zaplaceno jednou a dále se nic neplatí. Při běžném placení je pojistné placeno jednou ze rok, přičemž můžeme dále rozlišovat placení běžné po celou dobu pojištění nebo placení běžné placené kratší dobu, než je doba pojištění. Při jiném způsobu placení než je jednorázové nebo běžné placení, se většinou jedná o tzv. področní placení, což znamená, že pojistné je placeno m krát za rok – např. měsíční, půlroční, atd.

2.1 Základní principy pojištění osob

V pojištění osob vycházíme při stanovení výše pojistného ze dvou základních principů – z principu **fiktivního souboru** a z principu **ekvivalence**.

Princip fiktivního souboru spočívá v předpokladu, že počet osob, které uzavřou ve věku x stejný typ pojištění (pojistné smlouvy), se rovná l_x z použité úmrtnostní tabulky. Jinými slovy, stejný typ pojištění uzavřou všechny osoby, které jsou ve věku x naživu.
Tento předpoklad, i když zjevně odporuje skutečnosti, zjednodušuje všechny úvahy a nakonec vede k výsledkům dostatečně přesným na praktické použití.
Pojišťovna navíc předpokládá, že v daném modelovém souboru všechny osoby, které se dožily daného věku nebo které se narodily v daném roce, se narodily 1.1. a všechny osoby, které zemřely v daném roce, zemřely 31.12.

Princip ekvivalence vychází z předpokladu, že příjmy a výdaje pojišťovny se musejí rovnat, pokud jsou diskontovány (nebo zúročeny) ke stejnému datu.

2.2 Jednorázové netto pojistné

Pro jednorázové netto pojistné budeme používat symbol π, případně $\pi(\square)$, kde v závorce specifikujeme druh pojištění, resp. π_x, pokud budeme chtít zdůraznit, že se jedná o x-letou osobu. V případě, že budeme odvozovat vzorec pro pojistnou částku PČ (pojistnou sumu PS) 1 p.j. (peněžní jednotka), budeme pro označení jednorázového pojistného používat pouze specifický symbol pro daný druh pojištění.
Pro jednorázové pojištění budeme používat i názvy současná (počáteční) hodnota pojištění, případně současná hodnota nároků pojištěného. Tyto názvy budeme dále považovat za ekvivalentní.

2.2.1 Pojištění na dožití

Definice: x-letá osoba se pojistí tak, že pokud se dožije věku *(x+n)*, bude jí vyplacena *PČ=1 p.j.*

Označení: ${}_nE_x$, případně $A_{x\overline{n|}}^{\;\;1}$

Rovnice ekvivalence: $l_x \cdot {}_nE_x = 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^n$

Z rovnice ekvivalence můžeme odvodit dva druhy vzorců – pravděpodobnostní vzorec a vzorec s využitím komutačních čísel.

Pravděpodobnostní vzorec: rovnici ekvivalence vydělíme hodnotou l_x.

$$\frac{l_x \cdot {}_nE_x}{l_x} = \frac{l_{x+n} \cdot v^n}{l_x}$$

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n$$

$$\boxed{{}_nE_x = {}_np_x \cdot v^n}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel: rovnici ekvivalence vynásobíme výrazem v^x

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_nE_x = l_{x+n} \cdot v^n \cdot v^x$$

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_nE_x = l_{x+n} \cdot v^{x+n}$$

$$D_x \cdot {}_nE_x = D_{x+n}$$

$$\boxed{{}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}}$$

Oba uvedené vzorce jsou pro pojistnou částku 1 p.j. Pokud bychom chtěli spočítat jednorázové netto pojistné pro jinou pojistnou částku, stačí vzorec vynásobit danou pojistnou částkou PČ.

$$\boxed{\pi({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot PČ}$$

Příklad: 24-letá osoba se pojistí tak, že v případě, že se dožije svých 50 let, obdrží od pojišťovny 60 000 Kč. Jak vysoké jednorázové netto pojistné zaplatí při uzavření smlouvy?

Řešení: *x=24; n=26; PČ=60 000 Kč*

$$\pi\left({}_{26}E_{24}\right) = \frac{D_{50}}{D_{24}} \cdot 60\,000 = 34\,316{,}43\ Kč$$

Tento pojistný produkt je samostatně neprodejný a bývá často upravován, např. pojištění na dožití s výhradou.

2.2.2 Pojištění důchodu

Při pojištění důchodu se budeme zabývat tzv. „komerčním" důchodem a nikoli klasickým starobním důchodem.
Důchod můžeme vyplácet *předlhůtně* nebo *polhůtně*. Rozlišení v symbolech označujících konkrétní druh pojištění bude následující – předlhůtní důchod se bude lišit od polhůtního důchodu dvojtečkou nad písmenem, které označuje konkrétní druh pojištění ($\ddot{a}_x$ bude označení pro předlhůtní doživotní důchod a a_x bude označení pro polhůtní doživotní důchod).

2.2.2.1 Doživotní důchod předlhůtní

Definice: x-letá osoba se pojistí tak, že na začátku každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacena *1 p.j.*

Označení: $\ddot{a}_x$

Rovnice ekvivalence: $l_x \cdot \ddot{a}_x = 1 \cdot l_x + 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^1 + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^{\omega-x}$

Pravděpodobnostní vzorec: rovnici ekvivalence vydělíme hodnotou l_x.

$$\ddot{a}_x = 1 + 1 \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v^1 + 1 \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot \frac{l_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega-x}$$

$$\ddot{a}_x = {}_0p_x + {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + {}_{\omega-x}p_x \cdot v^{\omega-x}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_t p_x \cdot v^t}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel: rovnici ekvivalence vynásobíme výrazem v^x

$$l_x \cdot v^x \cdot \ddot{a}_x = 1 \cdot l_x \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^1 \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 \cdot v^x + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^{\omega-x} \cdot v^x$$

$$l_x \cdot v^x \cdot \ddot{a}_x = 1 \cdot l_x \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^{x+1} + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^{x+2} + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^\omega$$

$$D_x \cdot \ddot{a}_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega$$

$$D_x \cdot \ddot{a}_x = N_x$$

$$\boxed{\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod. Kolik bude dostávat na začátku každého roku (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: x=*20*, $\pi(\ddot{a}_x) = 1000000\ Kč$, *PČ=?*

$$\pi(\ddot{a}_{20}) = \frac{N_{20}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \pi(\ddot{a}_{20}) \cdot \frac{D_{20}}{N_{20}} = 29746{,}59\ Kč$$

2.2.2.2 Doživotní důchod polhůtní

Definice: x-letá osoba se pojistí tak, že na konci každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacena *1 p.j.*

Označení: a_x

Rovnice ekvivalence: $l_x \cdot a_x = 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^1 + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^{\omega - x}$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$a_x = 1 \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v^1 + 1 \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot \frac{l_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega - x}$$

$$a_x = {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + {}_{\omega - x}p_x \cdot v^{\omega - x}$$

$$\boxed{a_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} {}_t p_x \cdot v^t}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot a_x = \cdot l_{x+1} \cdot v^1 \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 \cdot v^x + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^{\omega - x} \cdot v^x$$

$$l_x \cdot v^x \cdot a_x = 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^{x+1} + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^{x+2} + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^\omega$$

$$D_x \cdot a_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega$$

$$D_x \cdot a_x = N_{x+1}$$

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní polhůtní důchod. Kolik bude dostávat na konci každého roku (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: x=*20*, $\pi(a_x) = 1000000\ Kč$, *PČ=?*

$$\pi(a_{20}) = \frac{N_{21}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \pi(a_{20}) \cdot \frac{D_{20}}{N_{21}} = 30658{,}58\ Kč$$

Jaký je vztah mezi předlhůtním a polhůtním doživotním důchodem?

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega}{D_x} = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega}{D_x} = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = 1 + a_x$$

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \Rightarrow \ddot{a}_x - a_x = 1$$

Rozdíl mezi předlhůtním a polhůtním doživotním důchodem je 1 p.j. (je to ta peněžní jednotka, kterou dostane pojištěný u předlhůtního doživotního důchodu navíc hned při uzavření smlouvy)

2.2.2.3 Dočasný důchod trvající „*n*“ roků - předlhůtní

Definice: *x*-letá osoba se pojistí tak, že na začátku každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacena *1 p.j.*, nejdéle však *n* roků

Označení: $\ddot{a}_{x\overline{n}|}$

Rovnice ekvivalence: $l_x \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 \cdot l_x + 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^1 + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot l_{x+n-1} \cdot v^{n-1}$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 + 1 \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v^1 + 1 \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^{n-1}$$

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = {}_0p_x + {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot v^t}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 \cdot l_x \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^1 \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 \cdot v^x + \cdots + 1 \cdot l_{x+n-1} \cdot v^{n-1} \cdot v^x$$

$$l_x \cdot v^x \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 \cdot l_x \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^{x+1} + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^{x+2} + \cdots + 1 \cdot l_{x+n-1} \cdot v^{x+n-1}$$

$$D_x \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+n-1}$$

$$D_x \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|} = N_x - N_{x+n}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasný předlhůtní důchod trvající 40 let. Kolik bude dostávat na začátku každého roku (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20,n=40,* $\pi\left(\ddot{a}_{x\overline{n}|}\right) = 1000000\ Kč$, *PČ=?*

$$\pi\left(\ddot{a}_{20;\overline{40}|}\right) = \frac{N_{20} - N_{60}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \pi\left(\ddot{a}_{20;\overline{40}|}\right) \cdot \frac{D_{20}}{N_{20} - N_{60}} = 36679{,}38\ Kč$$

2.2.2.4 Dočasný důchod trvající „*n*“ roků - polhůtní

Definice: *x*-letá osoba se pojistí tak, že na konci každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacena *1 p.j.*, nejdéle však *n* roků

Označení: $a_{x\overline{n}|}$

Rovnice ekvivalence: $l_x \cdot a_{x\overline{n}|} = 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^1 + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^n$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$a_{x\overline{n|}} = 1 \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v^1 + 1 \cdot \frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n$$

$$a_{x\overline{n|}} = {}_1p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + {}_np_x \cdot v^n$$

$$\boxed{a_{x\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_t p_x \cdot v^t}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot a_{x\overline{n|}} = 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^1 \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 \cdot v^x + \cdots + 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^n \cdot v^x$$

$$l_x \cdot v^x \cdot a_{x\overline{n|}} = 1 \cdot l_{x+1} \cdot v^{x+1} + 1 \cdot l_{x+2} \cdot v^{x+2} + \cdots + 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^{x+n}$$

$$D_x \cdot a_{x\overline{n|}} = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+n}$$

$$D_x \cdot a_{x\overline{n|}} = N_{x+1} - N_{x+n+1}$$

$$\boxed{a_{x\overline{n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasný polhůtní důchod trvající 40 let. Kolik bude dostávat na konci každého roku (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20,n=40,* $\pi\left(a_{x\overline{n|}}\right) = 1000000\ Kč$, *PČ=?*

$$\pi\left(a_{20;\overline{40|}}\right) = \frac{N_{21} - N_{61}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \pi\left(a_{20;\overline{40|}}\right) \cdot \frac{D_{20}}{N_{21} - N_{61}} = 37506{,}43\ Kč$$

Dále se budeme zabývat pouze předlhůtním důchodem.

2.2.2.5 Doživotní důchod odložený o „*k*“ roků - předlhůtní

Definice: *x*-letá osoba se pojistí tak, že na začátku každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacena *1 p.j.*, přičemž první výplata bude až ve věku *x+k*

Označení: ${}_{k|}\ddot{a}_x$

Rovnice ekvivalence: $l_x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_x = 1 \cdot l_{x+k} \cdot v^k + 1 \cdot l_{x+k+1} \cdot v^{k+1} + 1 \cdot l_{x+k+2} \cdot v^{k+2} + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^{\omega-x}$

Pravděpodobnostní vzorec:

$${}_{k|}\ddot{a}_x = 1 \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k + 1 \cdot \frac{l_{x+k+1}}{l_x} \cdot v^{k+1} + 1 \cdot \frac{l_{x+k+2}}{l_x} \cdot v^{k+2} + \cdots + 1 \cdot \frac{l_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega-x}$$

$${}_{k|}\ddot{a}_x = {}_kp_x \cdot v^k + {}_{k+1}p_x \cdot v^{k+1} + {}_{k+2}p_x \cdot v^{k+2} + \cdots + {}_{\omega-x}p_x \cdot v^{\omega-x}$$

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_x = \sum_{t=k}^{\omega-x} {}_t p_x \cdot v^t}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_x = 1 \cdot l_{x+k} \cdot v^{x+k} + 1 \cdot l_{x+k+1} \cdot v^{k+1} \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+k+2} \cdot v^{k+2} \cdot v^x + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^{\omega-x} \cdot v^x$$

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_x = 1 \cdot l_{x+k} \cdot v^{x+k} + 1 \cdot l_{x+k+1} \cdot v^{x+k+1} + 1 \cdot l_{x+k+2} \cdot v^{x+k+2} + \cdots + 1 \cdot l_\omega \cdot v^\omega$$

$$D_x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_x = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \cdots + D_\omega$$

$$D_x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_x = N_{x+k}$$

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod. Kolik bude dostávat na začátku každého roku (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry), pokud první výplatu chce obdržet za 15 roků?

Řešení: *x=20, k=15,* $\pi\left({}_{k|}\ddot{a}_x\right) = 1000\,000\ Kč$, *PČ=?*

$$\pi\left({}_{15|}\ddot{a}_{20}\right) = \frac{N_{35}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \pi\left({}_{15|}\ddot{a}_{20}\right) \cdot \frac{D_{20}}{N_{35}} = 48\,615{,}08\ Kč$$

2.2.2.6 Dočasný důchod trvající „*n*" roků odložený o „*k*" roků - předlhůtní

Definice: x-letá osoba se pojistí tak, že na začátku každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacena *1 p.j.*, přičemž první výplata bude až ve věku *x+k* a bude vyplaceno *n* důchodů

Označení: ${}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}}$

Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = 1 \cdot l_{x+k} \cdot v^k + 1 \cdot l_{x+k+1} \cdot v^{k+1} + 1 \cdot l_{x+k+2} \cdot v^{k+2} + \cdots + 1 \cdot l_{x+k+n-1} \cdot v^{k+n-1}$$

Pravděpodobnostní vzorec:

$${}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = 1 \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot v^k + 1 \cdot \frac{l_{x+k+1}}{l_x} \cdot v^{k+1} + 1 \cdot \frac{l_{x+k+2}}{l_x} \cdot v^{k+2} + \cdots + 1 \cdot \frac{l_{x+k+n-1}}{l_x} \cdot v^{k+n-1}$$

$${}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = {}_k p_x \cdot v^k + {}_{k+1}p_x \cdot v^{k+1} + {}_{k+2}p_x \cdot v^{k+2} + \cdots + {}_{k+n-1}p_x \cdot v^{k+n-1}$$

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = \sum_{t=k}^{k+n-1} {}_t p_x \cdot v^t}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = 1 \cdot l_{x+k} \cdot v^{x+k} + 1 \cdot l_{x+k+1} \cdot v^{k+1} \cdot v^x + 1 \cdot l_{x+k+2} \cdot v^{k+2} \cdot v^x + \cdots + 1 \cdot l_{x+k+n-1} \cdot v^{k+n-1} \cdot v^x$$

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = 1 \cdot l_{x+k} \cdot v^{x+k} + 1 \cdot l_{x+k+1} \cdot v^{x+k+1} + 1 \cdot l_{x+k+2} \cdot v^{x+k+2} + \cdots + 1 \cdot l_{x+k+n-1} \cdot v^{x+k+n-1}$$

$$D_x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = D_{x+k} + D_{x+k+1} + D_{x+k+2} + \cdots + D_{x+k+n-1}$$

$$D_x \cdot {}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = N_{x+k} - N_{x+k+n}$$

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n|}} = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod. Kolik bude dostávat na začátku každého roku (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry), pokud první výplatu chce obdržet za 15 roků a chce celkem 40 výplat?

Řešení: *x=20, n=40, k=15,* $\pi\left({}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n}|}\right)=1000\,000\ Kč$, *PČ=?*

$$\pi\left({}_{15|}\ddot{a}_{20;\overline{40}|}\right)=\frac{N_{35}-N_{75}}{D_{20}}\cdot PČ \Rightarrow PČ=\pi\left({}_{15|}\ddot{a}_{20;\overline{40}|}\right)\cdot\frac{D_{20}}{N_{35}-N_{75}}=53\,033{,}93\ Kč$$

2.2.2.7 Speciální důchody

Doživotní předlhůtní důchod s garancí vyplácení prvních „n" roků

Definice: *x*-letá osoba se pojistí tak, že na začátku každého roku, pokud je naživu, jí bude vyplacena *1 p.j.*, přičemž prvních *n* roků bude *1 p.j.* vyplacena, ať osoba žije nebo nežije

Označení: π (takto budeme také označovat všechny druhy pojištění, které nemají specifický symbol pro označení)

Rovnice ekvivalence:

$$l_x\cdot\pi=1\cdot l_x+1\cdot l_x\cdot v^1+1\cdot l_x\cdot v^2+\cdots+1\cdot l_x\cdot v^{n-1}+1\cdot l_{x+n}\cdot v^n+\cdots+1\cdot l_\omega\cdot v^{\omega-x}$$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$\pi=1+v+\cdots+v^{n-1}+\cdots+\frac{l_{x+n}}{l_x}\cdot v^n+\frac{l_{x+n+1}}{l_x}\cdot v^{n+1}+\cdots+\frac{l_\omega}{l_x}\cdot v^{\omega-x}$$

$$\pi=1\cdot\frac{v^n-1}{v-1}+{}_np_x\cdot v^n+{}_{n+1}p_x\cdot v^{n+1}+\cdots+{}_{\omega-x}p_x\cdot v^{\omega-x}$$

$$\boxed{\pi=\frac{v^n-1}{v-1}+\sum_{t=n}^{\omega-x}{}_tp_x\cdot v^t}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x\cdot v^x\cdot\pi=1\cdot l_x\cdot v^x+1\cdot l_x\cdot v^1\cdot v^x+\cdots+1\cdot l_x\cdot v^{n-1}\cdot v^x+1\cdot l_{x+n}\cdot v^n\cdot v^x+\cdots+1\cdot l_\omega\cdot v^{\omega-x}\cdot v^x$$

$$l_x\cdot v^x\cdot\pi=1\cdot l_x\cdot v^x+1\cdot l_x\cdot v^1\cdot v^x+\cdots+1\cdot l_x\cdot v^{n-1}\cdot v^x+1\cdot l_{x+n}\cdot v^{x+n}+\cdots+1\cdot l_\omega\cdot v^\omega$$

$$D_x\cdot\pi=D_x\cdot\left(1+v+\cdots+v^{n-1}\right)+D_{x+n}+D_{x+n+1}+D_{x+n+2}+\cdots+D_\omega$$

$$D_x\cdot\pi=D_x\cdot\frac{v^n-1}{v-1}+N_{x+n}$$

$$\boxed{\pi=\frac{v^n-1}{v-1}+\frac{N_{x+n}}{D_x}=\ddot{a}_{\overline{n}|}+{}_{n|}\ddot{a}_x}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod. Kolik bude dostávat na začátku každého roku (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry), pokud chce garanci vyplácení prvních 15 let?

Řešení: *x=20, n=15,* $\pi = 1000\,000\ K\check{c}$, *PČ=?*

$$\pi = \left(\frac{v^{15}-1}{v-1} + \frac{N_{35}}{D_{20}} \right) \cdot P\check{C} \Rightarrow P\check{C} = \frac{\pi}{\left(\frac{v^{15}-1}{v-1} + \frac{N_{35}}{D_{20}} \right)} = 29\,694{,}74\ K\check{c}$$

Doživotní předlhůtní důchod rostoucí lineárně

Definice: *x*-letá osoba se pojistí tak, že pokud je naživu, jí bude vyplacena 1.rok *1 p.j.*, 2.rok *2 p.j.*, 3.rok *3 p.j., ...*

Označení: $(I\ddot{a})_x$ [1]

Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot (I\ddot{a})_x = 1 \cdot l_x + 2 \cdot l_{x+1} \cdot v^1 + 3 \cdot l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots + n \cdot l_{x+n-1} \cdot v^{n-1} + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot l_\omega \cdot v^{\omega - x}$$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$(I\ddot{a})_x = 1 \cdot \frac{l_x}{l_x} + 2 \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \cdots + n \cdot \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^{n-1} + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot \frac{l_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega - x}$$

$$(I\ddot{a})_x = 1 \cdot {}_0p_x + 2 \cdot {}_1p_x \cdot v + \cdots + n \cdot {}_{n-1}p_x \cdot v^{n-1} + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot {}_{\omega - x}p_x \cdot v^{\omega - x}$$

$$\boxed{(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} (1+t) \cdot {}_t p_x \cdot v^t}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot (I\ddot{a})_x = 1 \cdot l_x \cdot v^x + 2 \cdot l_{x+1} \cdot v^x \cdot v^1 + \cdots + n \cdot l_{x+n-1} \cdot v^x \cdot v^{n-1} + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot l_\omega \cdot v^x \cdot v^{\omega - x}$$

$$D_x \cdot (I\ddot{a})_x = 1 \cdot D_x + 2 \cdot D_{x+1} + \cdots + n \cdot D_{x+n-1} + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot D_\omega$$

$$D_x \cdot (I\ddot{a})_x = S_x$$

$$\boxed{(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod, přičemž pojistná částka má růst lineárně vždy o stejnou částku. Kolik bude první pojistná částka (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20,* $(I\ddot{a})_x = 1000\,000\ K\check{c}$, *PČ=?*

---

[1] Označení *I* pochází z anglického „increasing“. Existuje také označení pro pravidelně klesající pojistné částky, které také pochází z anglického slova. Jedná se o označení *D* z anglického „decreasing“.

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_{20}}{D_{20}} \cdot P\check{C} \Rightarrow P\check{C} = \frac{(I\ddot{a})_x \cdot D_{20}}{S_{20}} = 1243{,}50\ K\check{c}$$

Tzn. že první vyplacená pojistná částka bude 1243,50 Kč, druhá vyplacená pojistná částka bude 2487,- Kč (tj. $2 \cdot 1\,243{,}50$), třetí vyplacená pojistná částka bude 3730,50 Kč (tj. $3 \cdot 1\,243{,}50$), atd. Vše za předpokladu, že daná osoba je naživu.

Kromě uvedeného doživotního předlhůtního důchodu rostoucího lineárně bychom mohli analogicky odvodit také např. doživotní polhůtní důchod rostoucí lineárně $(Ia)_x$, dočasný předlhůtní (resp. polhůtní) důchod rostoucí lineárně $(I\ddot{a})_{x\overline{n}|}$ (resp. $(Ia)_{x\overline{n}|}$), doživotní odložený předlhůtní (resp. polhůtní) důchod rostoucí lineárně ${}_k(I\ddot{a})_x$ (resp. ${}_k(Ia)_x$), dočasný odložený předlhůtní (resp. polhůtní) důchod rostoucí lineárně ${}_k(I\ddot{a})_{x\overline{n}|}$ (resp. ${}_k(Ia)_{x\overline{n}|}$) a další variace např. s garancí a varianty s klesající pojistnou částkou.

2.2.2.8 Důchod vyplácený ve stejných částkách *m*-krát za rok

Definice: 1 p.j. se vyplácí *m*-krát za rok ve výši $\frac{1}{m}$ *p.j.*

Označení: např. $\ddot{a}_x^{(m)}$ pro předlhůtní doživotní důchod vyplácený *m*-krát za rok

Za předpokladu rovnoměrného rozdělení úmrtí během roku je možné dokázat aproximativní vzorce (lineární aproximace). Tyto vzorce jsou:

důchod vyplácený *m*-krát za rok ve výši $\frac{1}{m}$ *p.j.*	doživotní	dočasný
předlhůtní	$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$	$\ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)} \doteq \ddot{a}_{x\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - {}_nE_x)$
polhůtní	$a_x^{(m)} \doteq a_x + \frac{m-1}{2m}$	$a_{x\overline{n}|}^{(m)} \doteq a_{x\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - {}_nE_x)$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní předlhůtní důchod vyplácený každý měsíc. Jak vysoká bude vyplácená měsíční částka (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20,* $\ddot{a}_x^{(m)} = 1000\,000\ K\check{c}$, *PČ=?*

$$\ddot{a}_x^{(m)} \doteq \left(\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\right) \cdot P\check{C} \text{ a } \ddot{a}_{20} = \frac{N_{20}}{D_{20}} = 33{,}61729319\ K\check{c}\text{, potom}$$

$$\ddot{a}_{20}^{(12)} \doteq \left(\ddot{a}_{20} - \frac{12-1}{2 \cdot 12}\right) \cdot P\check{C} \Rightarrow P\check{C} \doteq \frac{1\,000\,000}{\left(\ddot{a}_{20} - \frac{12-1}{2 \cdot 12}\right)} \doteq \frac{1\,000\,000}{\left(33{,}61729319 - \frac{11}{24}\right)} \doteq 30\,157{,}76\ K\check{c}$$

Toto je částka, která bude vyplacena za rok, tzn. že měsíční částku obdržíme tak, že vydělíme spočítanou částku 12. Obdržíme tak měsíční částku *2 513,15 Kč.*

2.2.3 Pojištění pro případ smrti

2.2.3.1 (Doživotní) pojištění pro případ smrti

Definice: x-letá osoba se pojistí tak, že v případě úmrtí dané osoby dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku, ve kterém daná osoba zemře, *1 p.j.*

Označení: A_x

Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot A_x = 1 \cdot d_x \cdot v + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^2 + 1 \cdot d_{x+2} \cdot v^3 + \cdots + 1 \cdot d_\omega \cdot v^{\omega - x + 1}$$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$A_x = 1 \cdot \frac{d_x}{l_x} \cdot v + 1 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + 1 \cdot \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot v^3 + \cdots + 1 \cdot \frac{d_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega - x + 1}$$

protože platí $\frac{d_{x+t}}{l_x} = \frac{d_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} = {}_t p_x \cdot q_{x+t}$, můžeme rovnici dále upravit

$$A_x = {}_0 p_x \cdot q_x \cdot v + {}_1 p_x \cdot q_{x+1} \cdot v^2 + {}_2 p_x \cdot q_{x+2} \cdot v^3 + \cdots + {}_{\omega - x} p_x \cdot q_\omega \cdot v^{\omega - x + 1}$$

$$\boxed{A_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} {}_t p_x \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1}}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot A_x = 1 \cdot d_x \cdot v^x \cdot v + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^x \cdot v^2 + 1 \cdot d_{x+2} \cdot v^x \cdot v^3 + \cdots + 1 \cdot d_\omega \cdot v^x \cdot v^{\omega - x + 1}$$

$$l_x \cdot v^x \cdot A_x = 1 \cdot d_x \cdot v^{x+1} + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} + 1 \cdot d_{x+2} \cdot v^{x+3} + \cdots + 1 \cdot d_\omega \cdot v^{\omega + 1}$$

$$D_x \cdot A_x = 1 \cdot C_x + 1 \cdot C_{x+1} + 1 \cdot C_{x+2} + \cdots + 1 \cdot C_\omega$$

$$D_x \cdot A_x = M_x$$

$$\boxed{A_x = \frac{M_x}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní pojištění pro případ smrti. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20,* $A_x = 1\,000\,000$ *Kč*, *PČ=?*

$$A_x = \frac{M_{20}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \frac{A_x \cdot D_{20}}{M_{20}} = 2\,933\,950{,}42\ Kč$$

2.2.3.2 Dočasné pojištění pro případ smrti

Definice: x-letá osoba se pojistí tak, že v případě úmrtí dané osoby během následujících n let dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku, ve kterém daná osoba zemře, *1 p.j.*

Označení: $A^1_{x\overline{n|}}$

Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot d_x \cdot v + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^2 + 1 \cdot d_{x+2} \cdot v^3 + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot v^n$$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot \frac{d_x}{l_x} \cdot v + 1 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + 1 \cdot \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot v^3 + \cdots + 1 \cdot \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n$$

$$A^1_{x\overline{n|}} = {}_0p_x \cdot q_x \cdot v + {}_1p_x \cdot q_{x+1} \cdot v^2 + {}_2p_x \cdot q_{x+2} \cdot v^3 + \cdots + {}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} \cdot v^n$$

$$\boxed{A^1_{x\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1}}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot d_x \cdot v^x \cdot v + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^x \cdot v^2 + 1 \cdot d_{x+2} \cdot v^x \cdot v^3 + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot v^x \cdot v^n$$

$$l_x \cdot v^x \cdot A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot d_x \cdot v^{x+1} + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} + 1 \cdot d_{x+2} \cdot v^{x+3} + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot v^{x+n}$$

$$D_x \cdot A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot C_x + 1 \cdot C_{x+1} + 1 \cdot C_{x+2} + \cdots + 1 \cdot C_{x+n-1}$$

$$D_x \cdot A^1_{x\overline{n|}} = M_x - M_{x+n}$$

$$\boxed{A^1_{x\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasné pojištění pro případ smrti na 50 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20, n=50,* $A^1_{x\overline{n|}} = 1000\,000$ *Kč* , *PČ=?*

$$A^1_{x\overline{n|}} = \frac{M_{20} - M_{70}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \frac{A^1_{x\overline{n|}} \cdot D_{20}}{M_{20} - M_{70}} = 7\,851\,431{,}48\ Kč$$

V případě, že by daná osoba přežila danou dobu 50 roků, tzn. dožila by se věku alespoň 71 let, dědicové by nedostali nic a pojištění by zaniklo. Takovéto pojištění není pro běžné využití ideální. Toto pojištění je ale hojně využíváno jako tzv. úvěrové pojištění, které vyžaduje banka při poskytnutí úvěru jako způsob zajištění.

Příklad: 42-ti letá osoba si vzala úvěr 1 000 000 Kč při úrokové sazbě 10% p.a. a splatnosti za 5 let. Ú věr má splácet stejnými částkami. Banka požaduje, aby zbytek dluhu byl pojištěn. Jak vysoká musí být počáteční pojistná částka a jaká je hodnota pojištění?

Řešení: *x=42, n=5, PČ$_1$=?,* $\pi = ?$
Nejdříve musíme sestavit umořovací plán.

Umořovací plán				
rok	*výše dluhu*	*úrok*	*úmor*	*anuita*
1	1 000 000,00	100 000,00	163 797,48	263 797,48
2	836 202,52	83 620,25	180 177,23	263 797,48
3	656 025,29	65 602,53	198 194,95	263 797,48
4	457 830,34	45 783,03	218 014,45	263 797,48
5	239 815,89	23 981,59	239 815,89	263 797,48

Počáteční pojistná částka se rovná součtu výše dluhu a výše úroku v prvním roce, tj. $PČ_1$=1 100 000 Kč.

i	*výše dluhu*	*úrok*	$PČ_i$
1	1 000 000,00	100 000,00	1 100 000, 00
2	836 202,52	83 620,25	919 822,77
3	656 025,29	65 602,53	721 627,82
4	457 830,34	45 783,03	503 613,37
5	239 815,89	23 981,59	263,797,48

Rovnice ekvivalence potom vypadá následovně:

$$l_x \cdot \pi = PČ_1 \cdot d_x \cdot v + PČ_2 \cdot d_{x+1} \cdot v^2 + PČ_3 \cdot d_{x+2} \cdot v^3 + PČ_4 \cdot d_{x+3} \cdot v^4 + PČ_5 \cdot d_{x+4} \cdot v^5$$

a po úpravě obdržíme rovnici

$$D_x \cdot \pi = PČ_1 \cdot C_x + PČ_2 \cdot C_{x+1} + PČ_3 \cdot C_{x+2} + PČ_4 \cdot C_{x+3} + PČ_5 \cdot C_{x+4},$$

ze které vyjádříme π, a po dosazení hodnot a provedení výpočtu dostaneme výsledek

$$\pi = \frac{PČ_1 \cdot C_{42} + PČ_2 \cdot C_{43} + PČ_3 \cdot C_{44} + PČ_4 \cdot C_{45} + PČ_5 \cdot C_{46}}{D_{42}} = 8\,013{,}85\ Kč$$

Klient tedy musí zaplatit jednorázové pojistné ve výši 8 013,85 Kč.

2.2.3.3 (Doživotní) pojištění pro případ smrti odložené o *k* roků

Definice: x-letá osoba se pojistí tak, že v případě úmrtí dané osoby po dovršení věku *(x+k)* dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku, ve kterém daná osoba zemře, *1 p.j.*

Označení: ${}_{k|}A_x$

Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot {}_{k|}A_x = 1 \cdot d_{x+k} \cdot v^{k+1} + 1 \cdot d_{x+k+1} \cdot v^{k+2} + 1 \cdot d_{x+k+2} \cdot v^{k+3} + \cdots + 1 \cdot d_\omega \cdot v^{\omega-x+1}$$

Pravděpodobnostní vzorec:

$${}_{k|}A_x = 1 \cdot \frac{d_{x+k}}{l_x} \cdot v^{k+1} + 1 \cdot \frac{d_{x+k+1}}{l_x} \cdot v^{k+2} + 1 \cdot \frac{d_{x+k+2}}{l_x} \cdot v^{k+3} + \cdots + 1 \cdot \frac{d_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega-x+1}$$

$${}_{k|}A_x = {}_kp_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} + {}_{k+1}p_x \cdot q_{x+k+1} \cdot v^{k+2} + {}_{k+2}p_x \cdot q_{x+k+2} \cdot v^{k+3} + \cdots + {}_{\omega-x}p_x \cdot q_\omega \cdot v^{\omega-x+1}$$

$$\boxed{{}_{k|}A_x = \sum_{t=k}^{\omega-x} {}_tp_x \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1}}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{k|}A_x = 1 \cdot d_{x+k} \cdot v^x \cdot v^{k+1} + 1 \cdot d_{x+k+1} \cdot v^x \cdot v^{k+2} + 1 \cdot d_{x+k+2} \cdot v^x \cdot v^{k+3} + \cdots + 1 \cdot d_\omega \cdot v^x \cdot v^{\omega-x+1}$$

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{k|}A_x = 1 \cdot d_{x+k} \cdot v^{x+k+1} + 1 \cdot d_{x+k+1} \cdot v^{x+k+2} + 1 \cdot d_{x+k+2} \cdot v^{x+k+3} + \cdots + 1 \cdot d_\omega \cdot v^{\omega+1}$$
$$D_x \cdot {}_{k|}A_x = 1 \cdot C_{x+k} + 1 \cdot C_{x+k+1} + 1 \cdot C_{x+k+2} + \cdots + 1 \cdot C_\omega$$
$$D_x \cdot {}_{k|}A_x = M_{x+k}$$
$$\boxed{{}_{k|}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní pojištění pro případ smrti s karenční dobou 15 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20, k=15,* ${}_{k|}A_x = 1000\,000\ Kč$, *PČ=?*

$${}_{k|}A_x = \frac{M_{20+15}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \frac{{}_{k|}A_x \cdot D_{20}}{M_{35}} = 3\ 016\ 490{,}15\ Kč$$

2.2.3.4 Dočasné pojištění pro případ smrti odložené o *k* roků

Definice: *x*-letá osoba se pojistí tak, že v případě úmrtí dané osoby ve věku mezi *(x+k)* a *(x+k+n)* dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku, ve kterém daná osoba zemře, *1 p.j.*

Označení: ${}_{k|}A^1_{x\overline{n|}}$

Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot {}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot d_{x+k} \cdot v^{k+1} + 1 \cdot d_{x+k+1} \cdot v^{k+2} + 1 \cdot d_{x+k+2} \cdot v^{k+3} + \cdots + 1 \cdot d_{x+k+n-1} \cdot v^{k+n}$$

Pravděpodobnostní vzorec:

$${}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot \frac{d_{x+k}}{l_x} \cdot v^{k+1} + 1 \cdot \frac{d_{x+k+1}}{l_x} \cdot v^{k+2} + 1 \cdot \frac{d_{x+k+2}}{l_x} \cdot v^{k+3} + \cdots + 1 \cdot \frac{d_{x+k+n-1}}{l_x} \cdot v^{k+n}$$
$${}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = {}_kp_x \cdot q_{x+k} \cdot v^{k+1} + {}_{k+1}p_x \cdot q_{x+k+1} \cdot v^{k+2} + {}_{k+2}p_x \cdot q_{x+k+2} \cdot v^{k+3} + \cdots + {}_{k+n-1}p_x \cdot q_{x+k+n-1} \cdot v^{k+n}$$
$$\boxed{{}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = \sum_{t=k}^{k+n-1} {}_tp_x \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1}}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot d_{x+k} \cdot v^x \cdot v^{k+1} + 1 \cdot d_{x+k+1} \cdot v^x \cdot v^{k+2} + 1 \cdot d_{x+k+2} \cdot v^x \cdot v^{k+3} + \cdots + 1 \cdot d_{x+k+n-1} \cdot v^x \cdot v^{k+n}$$
$$l_x \cdot v^x \cdot {}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot d_{x+k} \cdot v^{x+k+1} + 1 \cdot d_{x+k+1} \cdot v^{x+k+2} + 1 \cdot d_{x+k+2} \cdot v^{x+k+3} + \cdots + 1 \cdot d_{x+k+n-1} \cdot v^{x+k+n}$$
$$D_x \cdot {}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = 1 \cdot C_{x+k} + 1 \cdot C_{x+k+1} + 1 \cdot C_{x+k+2} + \cdots + 1 \cdot C_{x+k+n-1}$$
$$D_x \cdot {}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = M_{x+k} - M_{x+k+n}$$
$$\boxed{{}_{k|}A^1_{x\overline{n|}} = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na dočasné pojištění pro případ smrti na 50 roků s karenční dobou 15 let. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20, n=50, k=15* ${}_{k|}A^{1}_{\overline{xn|}} = 1000000\ Kč$, *PČ=?*

$$ {}_{k|}A^{1}_{\overline{xn|}} = \frac{M_{20+15} - M_{20+15+50}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \frac{{}_{k|}A^{1}_{\overline{xn|}} \cdot D_{20}}{M_{35} - M_{85}} = 3\ 701\ 472{,}47\ Kč $$

2.2.3.5 Speciální pojištění pro případ smrti

Mezi speciální pojištění pro případ smrti patří např. úvěrové pojištění s klesající pojistnou částkou (viz. druhý příklad v kapitole 2.2.3.2), pojištění pro případ smrti s rostoucí (klesající) pojistnou částkou a další. Ukážeme si odvození jednoho typu pojištění. Další je možno odvodit analogicky.

Pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí pojistnou částkou

Definice: *x*-letá osoba se pojistí tak, že v případě úmrtí dané osoby v prvním roce pojištění dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku *1 p.j.*, v případě úmrtí dané osoby v druhém roce pojištění dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku *2 p.j.*, …, v případě úmrtí dané osoby v *n*-tém roce pojištění dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku *n p.j.*, …

Označení: $(IA)_x$

Rovnice ekvivalence:

$$ l_x \cdot (IA)_x = 1 \cdot d_x \cdot v + 2 \cdot d_{x+1} \cdot v^2 + \cdots + n \cdot d_{x+n-1} \cdot v^n + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot d_\omega \cdot v^{\omega - x + 1} $$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$ (IA)_x = 1 \cdot \frac{d_x}{l_x} \cdot v + 2 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \cdots + n \cdot \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot \frac{d_\omega}{l_x} \cdot v^{\omega - x + 1} $$

$$ (IA)_x = {}_0p_x \cdot q_x \cdot v + 2 \cdot {}_1p_x \cdot q_{x+1} \cdot v^2 + \cdots + n \cdot {}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} \cdot v^n + \cdots + (\omega - x + 1)\, {}_{\omega - x}p_x \cdot q_\omega \cdot v^{\omega - x + 1} $$

$$ \boxed{(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega - x} (t+1) \cdot {}_tp_x \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1}} $$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$ l_x \cdot v^x \cdot (IA)_x = 1 \cdot d_x \cdot v^x \cdot v + 2 \cdot d_{x+1} \cdot v^x \cdot v^2 + \cdots + n \cdot d_{x+n-1} \cdot v^x \cdot v^n + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot d_\omega \cdot v^x \cdot v^{\omega - x + 1} $$

$$ l_x \cdot v^x \cdot (IA)_x = 1 \cdot d_x \cdot v^{x+1} + 2 \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \cdots + n \cdot d_{x+n-1} \cdot v^{x+n} + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot d_\omega \cdot v^{\omega + 1} $$

$$ D_x \cdot (IA)_x = 1 \cdot C_x + 2 \cdot C_{x+1} + \cdots + n \cdot C_{x+n-1} + \cdots + (\omega - x + 1) \cdot C_\omega $$

$$ D_x \cdot (IA)_x = R_x $$

$$ \boxed{(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}} $$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na doživotní pojištění pro případ smrti s lineárně rostoucí pojistnou částkou. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře již v prvním roce trvání pojištění (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry) a o jakou částku se bude pojistná částka každý rok navyšovat?

Řešení: *x=20,* $(IA)_x = 1000000\ Kč$, *PČ=?*

$$(IA)_x = \frac{R_{20}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \frac{(IA)_x \cdot D_{20}}{R_{20}} \doteq 56\ 026\ Kč$$

Pojistná částka v prvním roce trvání pojištění činí 56 026 Kč. Pojistná částka bude každý rok navyšována o částku 56 026 Kč, tzn. že v 10.roce trvání pojištění bude v případě úmrtí dané osoby na konci roku vyplaceno dědicům 560 260 Kč.

2.2.4 Smíšené pojištění

Pojištění na dožití a dočasné pojištění pro případ smrti mají tu nevýhodu, že nemusí nastat pojistná událost. Proto jsou tyto dvě pojištění spojována do jednoho produktu, který se nazývá smíšené pojištění, a vzniká tím nejprodávanější pojištění.
Můžeme rozlišovat základní smíšené pojištění a speciální smíšená pojištění.

2.2.4.1 Základní smíšené pojištění

Definice: *x*-letá osoba se pojistí tak, že v případě úmrtí dané osoby do věku *(x+n)* dostanou dědicové (nebo určené osoby) na konci roku, ve kterém daná osoba zemře, *1 p.j.* Pokud se daná osoba dožije věku *(x+n)* bude *1 p.j.* vyplacena jí.

Označení: $A_{x\overline{n}|}$

Rovnice ekvivalence:

$$l_x \cdot A_{x\overline{n}|} = 1 \cdot d_x \cdot v + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot v^n + 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^n$$

Pravděpodobnostní vzorec:

$$A_{x\overline{n}|} = 1 \cdot \frac{d_x}{l_x} \cdot v + 1 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n + 1 \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n$$

$$A_{x\overline{n}|} = {}_0p_x \cdot q_x \cdot v + {}_1p_x \cdot q_{x+1} \cdot v^2 + \cdots + {}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} \cdot v^n + {}_np_x \cdot v^n$$

$$\boxed{A_{x\overline{n}|} = {}_np_x \cdot v^n + \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x \cdot q_{x+t} \cdot v^{t+1}}$$

Vzorec s využitím komutačních čísel:

$$l_x \cdot v^x \cdot A_{x\overline{n}|} = 1 \cdot d_x \cdot v^x \cdot v + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^x \cdot v^2 + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot v^x \cdot v^n + 1 \cdot l_{x+n} \cdot v^x \cdot v^n$$

$$l_x \cdot v^x \cdot A_{x\overline{n}|} = 1 \cdot d_x \cdot v^{x+1} + 1 \cdot d_{x+1} \cdot v^{x+2} + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} \cdot v^{x+n} + l_{x+n} \cdot v^{x+n}$$

$$D_x \cdot A_{x\overline{n}|} = 1 \cdot C_x + 1 \cdot C_{x+1} + \cdots + 1 \cdot C_{x+n-1} + 1 \cdot D_{x+n}$$

$$D_x \cdot A_{x\overline{n}|} = M_x - M_{x+n} + D_{x+n}$$

$$\boxed{A_{\overline{xn|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}$$

Zřejmě platí: $\boxed{A_{\overline{xn|}} = A^1_{\overline{xn|}} + {}_nE_x}$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na smíšené pojištění na 50 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby, respektive kolik obdrží pojištěná osoba, pokud se dožije konce pojištění (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry)?

Řešení: *x=20, n=50,* $A_{\overline{xn|}} = 1000\,000\ Kč$, *PČ=?*

$$A_{\overline{xn|}} = \frac{M_{20} - M_{20+50} + D_{20+50}}{D_{20}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = \frac{A_{\overline{xn|}} \cdot D_{20}}{M_{20} - M_{70} + D_{70}} = 2\ 509\ 789{,}79\ Kč$$

2.2.4.1 Speciální smíšená pojištění

Základní smíšené pojištění změníme tak, že se budou vyplácet různé pojistné částky.

$$\boxed{\pi\left(A_{\overline{xn|}}\right) = A^1_{\overline{xn|}} \cdot PČ_{úmrtí} + {}_nE_x \cdot PČ_{dožití} = \frac{\left(M_x - M_{x+n}\right) \cdot PČ_{úmrtí} + D_{x+n} \cdot PČ_{dožití}}{D_x}}$$

Příklad: 20-ti letá osoba vyhrála ve Sportce 1 milion Kč. Uzavře smlouvu na smíšené pojištění na 50 roků. Kolik obdrží dědicové, pokud daná osoba zemře během dané doby, respektive kolik obdrží pojištěná osoba, pokud se dožije konce pojištění (nebereme v úvahu náklady pojišťovny a zdanění výhry) a požaduje při dožití se konce pojištění stokrát větší částku než v případě úmrtí?

Řešení: *x=20, n=50,* $A_{\overline{xn|}} = 1000\,000\ Kč$, *PČ*$_{dožití}$*=100 PČ*$_{úmrtí}$

$$A_{\overline{xn|}} = \frac{M_{20} - M_{20+50} + 100 \cdot D_{20+50}}{D_{20}} \cdot PČ_{úmrtí} \Rightarrow PČ_{úmrtí} = \frac{A_{\overline{xn|}} \cdot D_{20}}{M_{20} - M_{70} + 100 \cdot D_{70}} = 36\ 717{,}72\ Kč$$

V případě, že daná osoba zemře v průběhu trvání pojištění, obdrží dědicové částku 36 717,72 Kč. Pokud se daná osoba dožije konce trvání pojištění, bude jí vyplacena částka 3 671 772 Kč (tj. $100 \cdot 36\ 717{,}72\ Kč$).

2.2.5 Hodnota pojištění

Nechť ***nároky pojištěného ve věku x vůči pojišťovně*** mají tvar uspořádané dvojice $(\eta\,;\,\xi)$, kde η a ξ jsou konečné posloupnosti nezáporných čísel:

$$\eta = \{\eta_j\,;\, j = 0,1,\cdots,\omega - x\}$$
$$\xi = \{\xi_j\,;\, j = 0,1,\cdots,\omega - x\}$$

přičemž hodnota η_j se rovná pojistné částce při dožití se věku $x+j$
hodnota ξ_j se rovná pojistné částce při úmrtí ve věku $x+j$

Potom ***hodnota nároků*** $(\eta\,;\,\xi)$ ***pojištěného ve věku x vůči pojišťovně*** se rovná:

$$\boxed{H_x(\eta;\xi) = \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\eta_j\cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\xi_j\cdot C_{x+j}}$$

Zřejmě $H_x(\eta;\xi) = \pi_x$, tj. hodnota nároků pojištěného ve věku x vůči pojišťovně je jednorázovým netto pojistným, které nazýváme také počáteční hodnotou pojištění. Výše uvedený vzorec bývá také nazýván ***všeobecný vzorec pro výpočet jednorázového netto pojistného***.

Ukážeme si, jak lze pomocí hodnoty pojištění odvodit vzorce na výpočet jednorázového netto pojistného, které jsme již odvodili pomocí rovnice ekvivalence. Odvodíme jen některé.

Pojištění na dožití
Napíšeme si posloupnosti:

$$\eta_j = \begin{cases} 1;\ j = n \\ 0;\ j \neq n \end{cases} \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\} \qquad\qquad \xi_j = 0; \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\}$$

Potom

$$H_x(\eta;\xi) = \frac{1}{D_x}\cdot D_{x+n} + \frac{1}{D_x}\cdot 0 = \frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x$$

Dočasný předlhůtní důchod vyplácený *n* roků
Napíšeme si opět posloupnosti:

$$\eta_j = \begin{cases} 1;\ j = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0;\ j = n,n+1,\ldots,\omega - x \end{cases} \qquad \xi_j = 0; \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\}$$

Potom

$$H_x(\eta;\xi) = \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}1\cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}0\cdot C_{x+j} = \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x} + 0 = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

Doživotní pojištění pro případ smrti odložené o *k* roků
Napíšeme si opět posloupnosti:

$$\eta_j = 0; \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\} \qquad\qquad \xi_j = \begin{cases} 0;\ j = 0,1,\ldots,k-1 \\ 1;\ j = k,k+1,\ldots,\omega - x \end{cases}$$

Potom

$$H_x(\eta;\xi)=\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}0\cdot D_{x+j}+\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=k}^{\omega-x}1\cdot C_{x+j}=0+\frac{C_{x+k}+C_{x+k+1}+\cdots+C_\omega}{D_x}=\frac{M_{x+k}}{D_x}={}_{k|}A_x$$

Smíšené pojištění na dobu *n* let

Napíšeme si posloupnosti:

$$\eta_j=\begin{cases}1;\ j=n\\0;\ j\neq n\end{cases}\qquad j\in\{0,1,\ldots,\omega-x\}\qquad \xi_j=\begin{cases}1;\ j=0,1,\ldots,n-1\\0;\ j=n,n+1,\ldots,\omega-x\end{cases}$$

Potom

$$H_x(\eta;\xi)=\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=n}^{n}1\cdot D_{x+j}+\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}1\cdot C_{x+j}=\frac{D_{x+n}}{D_x}+\frac{C_x+C_{x+1}+\cdots+C_{x+n-1}}{D_x}=$$

$$=\frac{D_{x+n}+M_x-M_{x+n}}{D_x}=A_{\overline{xn}|}$$

Doživotní pojištění pro případ smrti rostoucí lineárně

Napíšeme si posloupnosti:

$$\eta_j=0;\qquad j\in\{0,1,\ldots,\omega-x\}\qquad \xi_j=\left.\begin{array}{cc}1 & j=0\\2 & j=1\\3 & j=2\\\vdots & \vdots\\n & j=n-1\\\vdots & \vdots\end{array}\right\}=(j+1)\quad pro\ j=0,1,2,\ldots,\omega-x$$

Potom

$$H_x(\eta;\xi)=\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}0\cdot D_{x+j}+\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}(j+1)\cdot C_{x+j}=$$

$$=0+\frac{C_x+2\cdot C_{x+1}+3\cdot C_{x+2}+\cdots+(\omega-x+1)\cdot C_\omega}{D_x}=\frac{R_x}{D_x}=(IA)_x$$

Příklad: 40-ti letá osoba se chce zabezpečit předlhůtním doživotním důchodem, který by začínal výplatou 12 000 Kč ve věku 60 let a každý rok by rostl o 500 Kč. Pokud zemře, chce, aby pozůstalí dostali na pohřeb 20 000 Kč. Jaká je hodnota nároků (pojistné)?

Řešení: *x=40, k=20, PČ$_k$=12 000 Kč, nárůst o 500 Kč, PČ$_{úmrtí}$=20 000 Kč*

Napíšeme posloupnosti:

$$\eta_j=\left.\begin{array}{ll}0 & j=0,1,\ldots,19\\12\,000 & j=20\\12\,000+500 & j=21\\12\,000+2\cdot 500 & j=22\\12\,000+3\cdot 500 & j=23\\\vdots & \vdots\end{array}\right\}=\begin{cases}0 & pro\ j=0,1,\ldots,19\\12\,000+(j-20)\cdot 500 & pro\ j=20,21,22,\ldots\end{cases}$$

$$\xi_j = 20\,000 \qquad pro\ j = 0, 1, 2, \ldots, \omega - x$$

$$H_x(\eta;\xi) = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=20}^{\omega-x} \left[12\,000 + (j-20)\cdot 500\right] \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x} 20\,000 \cdot C_{x+j} =$$

$$= \frac{1}{D_x} \cdot \left[12\,000 \sum_{j=20}^{\omega-x} D_{x+j} + 500 \cdot \sum_{j=20}^{\omega-x} (j-20)\cdot D_{x+j} + 20\,000 \sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}\right] =$$

$$= \frac{1}{D_x} \cdot \begin{bmatrix} 12\,000 \cdot (D_{x+20} + D_{x+21} + \cdots + D_\omega) + 500 \cdot (D_{x+21} + 2 \cdot D_{x+22} + \cdots + (\omega - x - 20)\cdot D_\omega) + \\ + 20\,000 \cdot (C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{12\,000 \cdot N_{x+20} + 500 \cdot S_{x+21} + 20\,000 \cdot M_x}{D_x} = \pi_{40}$$

$$H_{40} = \frac{12\,000 \cdot N_{60} + 500 \cdot S_{61} + 20\,000 \cdot M_{40}}{D_{40}} = 173\,291{,}07\ Kč \quad \left| = \pi_{40} \right|$$

2.3 Běžné netto pojistné

V praxi se životní pojištění zřídka platí jednorázově. Pro pojištěnce je výhodnější (i když ne finančně) platit pojištění v pravidelných ročních nebo področních (*m*-krát za rok) splátkách. První pojistné zaplatí zákazník při podpisu pojistné smlouvy. Jde tedy o předlhůtní splátky. Poté se platí pojistné maximálně do nastání pojistné události.

Pod pojmem **běžné pojistné** budeme rozumět pravidelné předlhůtní roční splátky pojistného. Běžné netto pojistné budeme označovat P, případně $P(\square)$, kde v závorce specifikujeme druh pojištění, resp. P_x, pokud budeme chtít zdůraznit, že se jedná o *x*-letou osobu.

2.3.1 Výpočet běžného netto pojistného placeného *m* roků

Předpokládejme, že hodnota pojištění je π, ale zákazník si přeje platit pojistné *m* roků ročními předlhůtními splátkami. Zřejmě $m \le n$, kde *n* je doba trvání pojištění.[2]

Nechť výše roční předlhůtní splátky je P a hodnota pojištění je π. Je zřejmé, že přijaté jednorázové pojistné π od všech osob modelového souboru se musí rovnat součtu všech ročních pojistných přijatých od žijících osob modelového souboru, tj.

$$\pi \cdot l_x = P \cdot l_x + P \cdot l_{x+1} \cdot v + P \cdot l_{x+2} \cdot v^2 + \cdots + P \cdot l_{x+m-1} \cdot v^{m-1}$$

Po rozšíření výrazem v^x a zavedení komutačních čísel přejde rovnice na tvar

$$\pi \cdot D_x = P \cdot D_x + P \cdot D_{x+1} + P \cdot D_{x+2} + \cdots + P \cdot D_{x+m-1}$$

[2] Při pojištění důchodu běžně placeným pojistným se pojistné platí jen v době do nastání pojistné události, tzn. před započetím výplat důchodu.

$$\pi \cdot D_x = P \cdot \left(N_x - N_{x+m}\right) \Rightarrow P = \frac{\pi}{\frac{\left(N_x - N_{x+m}\right)}{D_x}} = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}}$$

$$\boxed{P = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}}}$$

V případě, že jde o doživotní pojištění s možností doživotního placení, dá se analogicky dokázat, že

$$\boxed{P = \frac{\pi}{\ddot{a}_x}}$$

V případě, že platíme běžně po dobu kratší než je doba trvání pojištění, tj. $m < n$, označujeme takovéto pojistné ${}_{|m}P$.

Příklad: Odvoďte vzorec na výpočet netto pojistného na pojištění *x*-leté osoby na dožití se věku *(x+n)* běžně placeného *m* let, přičemž $m \leq n$.

Řešení: $\pi = {}_nE_x$

$${}_{|m}P = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} = \frac{{}_nE_x}{\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}} = \frac{\frac{D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$${}_{|m}P\left({}_nE_x\right) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot PČ$$

Příklad: 40-ti letá osoba uzavře pojištění pro případ smrti na dobu 5 roků a pojistnou částku 100 000 Kč. Jak vysoké by bylo jednorázové pojistné? Jak vysoké by bylo běžné pojistné, pokud by doba placení byla také 5 roků?

Řešení: *x=40, n=m=5, PČ=100 000 Kč*

Jednorázové pojistné: $\pi\left(A^1_{40;\overline{5}|}\right) = \frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}} \cdot 100\,000 = 968{,}81\ Kč$

Běžně placené pojistné:

$$P\left(A^1_{40;\overline{5}|}\right) = \frac{\pi\left(A^1_{40;\overline{5}|}\right)}{\ddot{a}_{40;\overline{5}|}} = \frac{\frac{M_{40} - M_{45}}{D_{40}} \cdot 100\,000}{\frac{N_{40} - N_{45}}{D_{40}}} = \frac{M_{40} - M_{45}}{N_{40} - N_{45}} \cdot 100\,000 = 202{,}25\ Kč$$

Zákazník může chtít platit pojistné vícekrát do roka – obecně *m*-krát za rok. Analogicky s označením důchodů vyplácených *m*-krát do roka označujeme $P_x^{(m)}$ **roční pojistné placené *m*-krát ročně ve výši** $\frac{P_x^{(m)}}{m}$.

Analogicky jako při určení běžného pojistného dostaneme pro **doživotní placení** $\boxed{P_x^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_x^{(m)}}}$

a pro **dočasné placení trvající *n* roků** $\boxed{P_x^{(m)} = \frac{\pi}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)}}}$. Takto vypočítané pojistné se nazývá **pravé področní pojistné**. Je zřejmé, že $P_x < P_x^{(m)}$.

Některé pojišťovny používají tzv. **nepravé področní pojistné**, které počítají z ročního pojistného vydělením počtem splátek, tj. $\frac{P}{m}$, což je méně než v předcházejícím případě, ale pojišťovny si účtují ještě přirážku (většinou ve výši 2% - 5% z ročního pojistného).

2.3.2 Pojištění „à terme fixe"

Definice: x-letá osoba se pojistí tak, že po *n* letech bude vyplacen *1 p.j.* jí nebo dědicům. Pojistné se platí pouze, pokud je pojištěná osoba naživu.

Označení: P_x

Rovnice ekvivalence: $l_x \cdot \pi_x = 1 \cdot l_x \cdot v^n$

Jednorázové pojistné: $\pi_x = v^n$

Běžné pojistné: $P_x = \frac{\pi_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} = \frac{v^n \cdot D_x}{N_x - N_{x+n}}$

Příklad: 50-ti letá osoba se pojistila na 10 let à terme fixe na pojistnou částku 100 000 Kč. Vypočítejte běžné netto pojistné.

Řešení: *x=50, n=10, PČ=100 000*

$$P_{50} = \frac{v^{10} \cdot D_{50}}{N_{50} - N_{60}} \cdot 100\,000 = 9\,213{,}17\ Kč$$

2.3.3 Všeobecná rovnice ekvivalence

Analogicky jako při výpočtu hodnoty pojištění můžeme postupovat při výpočtu běžného pojistného. Jednotlivé splátky běžného netto pojistného diskontujeme k okamžiku uzavření pojištění. Na jednotlivé splátky běžného netto pojistného můžeme nahlížet jako na pojistné plnění, které vyplácí pojištěný pojišťovně, a můžeme použít úvah z kapitoly 2.2.5 Hodnota pojištění.

Nechť ***nároky pojišťovny vůči pojištěnému*** mají tvar konečné posloupnosti nezáporných čísel:

$$\varphi = \{\varphi_j ; j = 0,1,\cdots,\omega - x\}$$

Potom hodnota nároků φ pojišťovny vůči pojištěnému ve věku x bude

$$\boxed{H_x(\varphi) = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega - x} \varphi_j \cdot D_{x+j}}$$

Zřejmě φ_j je výše pojistného, které zaplatíme na začátku *(j+1)*-vého roku pojištění, což nám umožňuje platit pojistné v různé výši.

Běžné netto pojistné můžeme platit dvěma způsoby:

1. doživotně placené
2. dočasně placené

ad 1. **Doživotně placené běžné netto pojistné v konstantní výši** P

$$\varphi_j = P; \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\}$$

$$H_x(\varphi) = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega - x} P \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \cdot P \cdot N_x = P \cdot \ddot{a}_x$$

ad 2. ***m*** **roků placené běžné netto pojistné v konstantní výši** ${}_{|m}P$

$$\varphi_j = \begin{cases} {}_{|m}P; & j = 0,1,\ldots,m-1 \\ 0; & j = m, m+1,\ldots,\omega - x \end{cases}$$

$$H_x(\varphi) = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} {}_{|m}P \cdot D_{x+j} = {}_{|m}P \cdot \ddot{a}_{x\overline{m|}}$$

Z principu ekvivalence vyplývá, že běžné netto pojistné určíme z rovnice

$$H_x(\varphi) = H_x(\eta;\xi)$$

Všeobecný vzorec na výpočet běžného netto pojistného tedy je:

$$\boxed{\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega - x} \varphi_j \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega - x} \eta_j \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega - x} \xi_j \cdot C_{x+j}}$$

Opět si na některých již dříve odvozených vzorcích ukážeme, jak tento vzorec aplikovat.

***m* roků běžně placené pojištění na dožití (*n* let)**

Napíšeme si posloupnosti:

$$\eta_j = \left\langle \begin{array}{l} 1;\ j = n \\ 0;\ j \neq n \end{array} \right. \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\} \qquad \xi_j = 0; \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\}$$

$$\varphi_j = \left\langle \begin{array}{l} {}_{|m}P;\ j = 0,1,\ldots,m-1 \\ 0; \quad j = m, m+1,\ldots,\omega - x \end{array} \right.$$

Označíme ${}_{|m}P\left({}_{n}E_{x}\right) = {}_{|m}P$

Potom

$$\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} {}_{|m}P \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \cdot D_{x+n} + \frac{1}{D_x} \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad {}_{|m}P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

***m* roků běžně placené pojištění dočasného *k* let odloženého předlhůtního důchodu vypláceného *n* roků ($m \leq k$)**

Napíšeme si opět posloupnosti:

$$\eta_j = \left\langle \begin{array}{l} 1;\ j = k, k+1,\ldots,k+n-1 \\ 0; \qquad jinak \end{array} \right. \qquad \xi_j = 0; \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\}$$

$$\varphi_j = \left\langle \begin{array}{l} {}_{|m}P;\ j = 0,1,\ldots,m-1 \\ 0; \quad j = m, m+1,\ldots,\omega - x \end{array} \right.$$

Označíme ${}_{|m}P\left({}_{k|}\ddot{a}_{x\overline{n}|}\right) = {}_{|m}P$

Potom

$$\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} {}_{|m}P \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=k}^{k+n-1} 1 \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega - x} 0 \cdot C_{x+j}$$

$${}_{|m}P \cdot \left(N_x - N_{x+m}\right) = N_{x+k} - N_{x+k+n} \quad \Rightarrow \quad {}_{|m}P = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

Jednorázové smíšené pojištění na dobu *n* let

Napíšeme si posloupnosti:

$$\eta_j = \left\langle \begin{array}{l} 1;\ j = n \\ 0;\ j \neq n \end{array} \right. \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\} \qquad \xi_j = \left\langle \begin{array}{l} 1;\ j = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0;\ j = n, n+1,\ldots,\omega - x \end{array} \right.$$

$$\varphi_j = \left\langle \begin{array}{l} A_{x\overline{n}|};\ j = 0 \\ 0;\ j = 1,2,\ldots,\omega - x \end{array} \right.$$

Potom

$$\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{0} A_{\overline{xn|}}\cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=n}^{n} 1\cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{n-1} 1\cdot C_{x+j}$$

$$\frac{1}{D_x}\cdot A_{\overline{xn|}}\cdot D_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

$$A_{\overline{xn|}} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Příklad: 40-ti letá osoba se chce zabezpečit předlhůtním doživotním důchodem, který by začínal výplatou 12 000 Kč ve věku 60 let a každý rok by rostl o 500 Kč. Pokud zemře, chce, aby pozůstalí dostali na pohřeb 20 000 Kč. Pojistné chce platit 10 let. Jak vysoké je běžné pojistné?

Řešení: *x=40, k=20, m=10, PČ$_k$=12 000 Kč, nárůst o 500 Kč, PČ$_{úmrtí}$=20 000 Kč*

Napíšeme posloupnosti:

$$\eta_j = \left.\begin{array}{ll} 0 & j = 0,1,\ldots,19 \\ 12\,000 & j = 20 \\ 12\,000 + 500 & j = 21 \\ 12\,000 + 2\cdot 500 & j = 22 \\ 12\,000 + 3\cdot 500 & j = 23 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} = \left\langle \begin{array}{ll} 0 & pro\ j = 0,1,\ldots,19 \\ 12\,000 + (j-20)\cdot 500 & pro\ j = 20, 21, 22,\ldots \end{array}\right.$$

$$\xi_j = 20\,000 \qquad pro\ j = 0, 1, 2,\ldots,\omega - x$$

$$\varphi_j = \left\langle \begin{array}{ll} {}_{|m}P; & j = 0, 1,\ldots,9 \\ 0; & j = 10, 11,\ldots,\omega - x \end{array}\right.$$

$$H_x(\eta;\xi) = \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=20}^{\omega-x}\left[12\,000 + (j-20)\cdot 500\right]\cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x} 20\,000\cdot C_{x+j} =$$

$$= \frac{1}{D_x}\cdot\left[12\,000\sum_{j=20}^{\omega-x} D_{x+j} + 500\cdot\sum_{j=20}^{\omega-x}(j-20)\cdot D_{x+j} + 20\,000\sum_{j=0}^{\omega-x} C_{x+j}\right] =$$

$$= \frac{1}{D_x}\cdot\left[\begin{array}{l} 12\,000\cdot\left(D_{x+20} + D_{x+21} + \cdots + D_\omega\right) + 500\cdot\left(D_{x+21} + 2\cdot D_{x+22} + \cdots + (\omega - x - 20)\cdot D_\omega\right) + \\ + 20\,000\cdot\left(C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega\right) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{12\,000\cdot N_{x+20} + 500\cdot S_{x+21} + 20\,000\cdot M_x}{D_x}$$

$$H_x(\varphi) = \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{9} {}_{|m}P\cdot D_{x+j} = {}_{|m}P\cdot\frac{N_x - N_{x+10}}{D_x}$$

Musí platit $H_x(\varphi) = H_x(\eta;\xi)$, proto

$$_{|m}P \cdot \frac{N_x - N_{x+10}}{D_x} = \frac{12\,000 \cdot N_{x+20} + 500 \cdot S_{x+21} + 20\,000 \cdot M_x}{D_x} \quad \Rightarrow$$

$$_{|m}P = \frac{12\,000 \cdot N_{x+20} + 500 \cdot S_{x+21} + 20\,000 \cdot M_x}{N_x - N_{x+10}} =$$

$$= \frac{12\,000 \cdot N_{60} + 500 \cdot S_{61} + 20\,000 \cdot M_{40}}{N_{40} - N_{50}} = 19\,102{,}14\ K\check{c}$$

2.3.4 Pojištění s výhradou

Při některých typech pojištění v případě úmrtí zanikne pojištění bez nároku na plnění ze strany pojišťovny.
Pokud by pojištění mělo zaniknout před nastáním pojistné události úmrtím pojištěné osoby, nabízejí pojišťovny vrácení už zaplaceného pojistného. Tehdy mluvíme o **pojištění s výhradou**, resp. o **pojištění s vrácením zaplaceného pojistného v případě úmrtí**.
Pojištění na dožití s výhradou vrácení zaplaceného pojistného při úmrtí pojištěného

Označme ${}^{v}P$ běžné netto pojistné pro pojištění s výhradou.

Za předpokladu m=n napíšeme posloupnosti:

$$\eta_j = \left\langle \begin{array}{l} 1;\ j = n \\ 0;\ j \neq n \end{array} \right. \qquad \xi_j = \left\langle \begin{array}{ll} (j+1)\cdot {}^{v}P; & j = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0; & j = n, n+1, \ldots, \omega - x \end{array} \right.$$

$$\varphi_j = \left\langle \begin{array}{ll} {}^{v}P; & j = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0; & j = n, n+1, \ldots, \omega - x \end{array} \right.$$

Dosadíme do všeobecné rovnice ekvivalence

$$\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} {}^{v}P \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=n}^{n} 1 \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \cdot {}^{v}P \cdot C_{x+j}$$ a po úpravách vyjádříme ${}^{v}P$

$${}^{v}P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} + R_x + R_{x+n} + n \cdot M_{x+n}}$$

2.4 Brutto pojistné

V předcházejícím textu jsme viděli, že netto pojistné se počítá tak, aby pokrylo výplatu pojistných částek. Pojišťovna ale musí z něčeho krýt i náklady spojené s vedením a správou příslušné pojistné smlouvy.
Pokud připočítáme k netto pojistnému tyto **správní náklady**, dostaneme tzv. **brutto pojistné** (postačující pojistné)
Dále v textu budeme označovat:

- **jednorázové brutto pojistné** $\boldsymbol{Б}$
- **běžné brutto pojistné** $\boldsymbol{B}$

Náklady můžeme rozdělit podle období vzniku na:

1. počáteční (alfa) náklady – jsou spojené s uzavíráním pojistné smlouvy (propagace, akviziční výdaje, …); určují se v procentech z pojistné částky
2. běžné správní (beta) náklady – obsahují náklady na daně, nájemné, administrativu, výpočetní techniku, …; určují se v promilích z pojistné částky
3. inkasní (gama) náklady – vznikají při pojištění s běžným placením jako náklady spojené s inkasováním pojistného; určují se jako procento z brutto pojistného
4. náklady při výplatě důchodů (delta) – vznikají jen při pojištění důchodu jako náklady spojené s výplatami důchodů; určení brutto pojistného v pojištění důchodů je odlišné od ostatních druhů

Dále můžeme náklady rozdělit podle toho, z čeho se počítají, na:

1. z pojistné částky
2. z pojistného
3. paušální

Pro kalkulaci nákladů existují dva přístupy:

- stará (německá) klasická škola
- anglosaský přístup

2.4.1 Klasická kalkulace nákladů

Počáteční náklady – označení α

a) při jednorázovém placení

$$\boxed{\pi + \alpha}$$

b) při běžném placení

Počáteční jednorázové náklady α se rozdělí na roční splátky nákladů α'. Pokud platíme pojistné *m* roků ve výši P, tak ke každému netto pojistnému připočteme α', přičemž musí platit:

$$l_x \cdot \alpha = l_x \cdot \alpha' + l_{x+1} \cdot \alpha' \cdot v + \cdots + l_{x+m-1} \cdot \alpha' \cdot v^{m-1}$$

Úpravou a použitím komutačních čísel dostaneme vztah

$$D_x \cdot \alpha = \alpha' \cdot \left(N_x - N_{x+m}\right)$$

odkud plyne $$\alpha' = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{m|}}}$$

Při běžném placení pojistného *m* roků se α náklady započítají následovně:

$$\boxed{P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{m|}}}}$$

Běžné správní náklady – označení β

V případě, že doba placení pojistného je kratší než doba trvání pojištění, tj. $m < n$, běžné správní náklady se rozkládají na β_1 a β_2, tzn.

$$\beta = \beta_1 + \beta_2$$

β_1 jsou běžné správní náklady potřebné každoročně po celou dobu trvání pojištění a
β_2 jsou běžné správní náklady potřebné každoročně, ale jen po dobu placení pojistného

a) při jednorázovém placení

V tomto případě $\beta_2 = 0$, náklady spojené s placením pojistného jsou vlastně započítány v jednorázových nákladech α, platí tedy $\beta_1 = \beta$.

Protože náklady β se opakují každý rok během trvání pojištění, jejich počáteční hodnota bude $\beta \cdot \ddot{a}_{x\overline{n|}}$, pokud pojištění trvá *n* let, resp. $\beta \cdot \ddot{a}_x$, pokud pojištění trvá doživotně. Potom tedy

$\boxed{\pi + \beta \cdot \ddot{a}_{x\overline{n|}}}$ pro dočasné pojištění, resp. $\boxed{\pi + \beta \cdot \ddot{a}_x}$ pro doživotní pojištění

b) při běžném placení

Pokud $m = n$, tj. doba placení se rovná době trvání pojištění, potom

$$\boxed{P + \beta}$$

Pokud $m < n$, tj. doba placení je kratší než doba trvání pojištění, potom

$$\boxed{P + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_{x\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x\overline{m|}}} + \beta_2}$$

Inkasní náklady – označení γ

a) při jednorázovém placení

Náklady γ se nezapočítávají

b) při běžném placení

$$\boxed{P + \gamma \cdot B}$$

2.4.2 Výpočet brutto pojistného

Brutto pojistné placené jednorázově

Pro

a) **doživotní pojištění**

$$\text{Б} = \pi + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_x$$

b) **dočasné pojištění**

$$\text{Б} = \pi + \alpha + \beta \cdot \ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

Brutto pojistné placené běžně

Pro $m = n$, tj. doba placení se rovná době trvání pojištění

a) **doživotní pojištění**

$$B = P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} + \beta + \gamma \cdot B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} + \beta \right)$$

b) **dočasné pojištění**

$$B = P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + \beta + \gamma \cdot B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left(P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + \beta \right)$$

Pro $m < n$, tj. doba placení je kratší než doba trvání pojištění

a) **doživotní pojištění**

$${}_{|m}B = {}_{|m}P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_2 + \gamma \cdot {}_{|m}B \quad \Rightarrow \quad {}_{|m}B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left({}_{|m}P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_2 \right)$$

b) **dočasné pojištění**

$${}_{|m}B = {}_{|m}P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_2 + \gamma \cdot {}_{|m}B \quad \Rightarrow \quad {}_{|m}B = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \left({}_{|m}P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_1 \cdot \frac{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} + \beta_2 \right)$$

Brutto pojistné placené področně

V případě placení pojistného m-krát za rok postupují pojišťovny různě. Některé používají analogické vzorce, jako jsme uvedli při netto pojištění. Potom:

a) doživotní pojištění

$$B^{(m)} \doteq \frac{B}{\left(1-\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{D_x}{N_x}\right)}$$

b) dočasné pojištění

$$B^{(m)} \doteq \frac{B}{\left(1-\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{D_x-D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}\right)}$$

Existuje také tzv. **tarifní pojistné**, které může být vyšší než brutto pojistné, např. o bezpečnostní přirážku.

Příklad: 35-ti letá osoba uzavře pojistnou smlouvu na smíšené pojištění na 15 let a pojistnou částku 25 000 Kč. Vypočítejte jednorázové brutto pojistné, jestliže víme, že $\pi\left(A_{35;\overline{15|}}\right)=18\ 647\ Kč$. Dále vypočítejte běžné brutto pojistné, jestliže víme, že $P=1\ 439\ Kč$, a běžné brutto pojistné, když zákazník chce platit pojistné po dobu 10 let a pokud víme, že ${}_{|10}P=2\ 048\ Kč$. Pojišťovna si účtuje tyto náklady: $\alpha=3\%$, $\beta=3‰$ $(\beta_1=2‰;\beta_2=1‰)$, $\gamma=5\%$.

Řešení: *x=35, n=15, m=10, PČ=25 000*

Jednorázové brutto pojistné:

$$Б=\pi+\alpha+\beta\cdot\ddot{a}_{x\overline{n|}}=18\ 647+0{,}03\cdot 25\ 000+0{,}003\cdot\frac{N_{35}-N_{50}}{D_{35}}\cdot 25\ 000=20\ 367\ Kč$$

Běžné brutto pojistné: ($m=n$)

$$B=\frac{1}{1-\gamma}\cdot\left(P+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n|}}}+\beta\right)=\frac{1}{1-0{,}05}\cdot\left(1\ 439+\frac{0{,}03\cdot 25\ 000}{\ddot{a}_{35;\overline{15|}}}+0{,}003\cdot 25\ 000\right)=1\ 654{,}60\ Kč$$

Běžné brutto pojistné: ($m<n$)

$${}_{|10}B=\frac{1}{1-\gamma}\cdot\left({}_{|10}P+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{10|}}}+\beta_1\cdot\frac{\ddot{a}_{x\overline{15|}}}{\ddot{a}_{x\overline{10|}}}+\beta_2\right)=$$

$$=\frac{1}{1-0{,}05}\cdot\left(2\ 048+\frac{0{,}03\cdot 25\ 000}{\ddot{a}_{35;\overline{10|}}}+0{,}002\cdot\frac{\ddot{a}_{35;\overline{15|}}}{\ddot{a}_{35;\overline{10|}}}\cdot 25\ 000+0{,}001\cdot 25\ 000\right)=2\ 343{,}69\ Kč$$

3 Pojistné rezervy v pojištění osob

V pojistné praxi musí pojišťovna vytvářet řadu rezerv finančních prostředků. Pojem technických rezerv je velmi důležitý pro oblast životního pojištění i neživotního pojištění (dříve se používal pojem pojistně-technické rezervy) a bývá přesně vymezen pojistnou legislativou každého státu (v ČR se jedná především o zákon č. 363/1999 Sb., jeho novelu č.39/2004 Sb. a související prováděcí vyhlášky).

Technické rezervy jsou vytvářeny pojistitelem jako náklady (zákon obvykle stanovuje typ i přiměřenou výši technických rezerv podléhající schválení příslušným dozorovým orgánem) k plnění závazků z pojišťovací činnosti, které jsou pravděpodobné nebo jisté, ale nejistá je jejich výše nebo okamžik jejich vzniku. Představují důležitou součást pasiv každé pojišťovny a o každé z nich se účtuje odděleně od ostatních závazků pojistitele. Aktiva, jejichž zdrojem jsou technické rezervy, podléhají striktním omezením, aby skladba jejich finančního umístění splňovala zásady bezpečnosti, diverzifikace, rentability a likvidity.

Legislativa ČR vyžaduje v životním pojištění následující technické rezervy:

- rezerva pojistného životních pojištění
- rezerva na nezasloužené pojistné
- rezerva na pojistná plnění
- rezerva na prémie a slevy
- rezerva životních pojištění, je-li nositelem investičního rizika pojistník
- rezerva na splnění závazků z použité technické úrokové míry
- rezerva pojistného neživotních pojištění[3]
- jiné rezervy

Dále se budeme zabývat rezervou pojistného životních pojištění, která je určena ke krytí budoucích závazků ze životních pojištění. Počítá se pojistně-matematickými metodami podle jednotlivých pojistných smluv většinou tak, že od hodnoty budoucích závazků pojistitele se odečte hodnota budoucího pojistného. Jedná se o nejdůležitější technickou rezervu v rámci klasických životních pojištění (proto se často jednoduše nazývá jen netto rezerva, resp. brutto rezerva). Rozdíl mezi pojistnou částkou a vytvořenou rezervou pojistného životních pojištění se nazývá rizikový kapitál.

Podle principu ekvivalence se celková hodnota očekávaného pojistného musí rovnat celkové hodnotě očekávaného pojistného plnění, pokud příjmy i výdaje diskontujeme ke stejné časové základně. V průběhu pojištění ale tato rovnost neplatí.

Pokud vezmeme v úvahu pojištění pro případ smrti běžně placené stejnými splátkami, tak z pojistného se na krytí pojistného plnění v prvních letech odčerpává málo, protože pravděpodobnost úmrtí není velká. Naproti tomu pojistné vybrané v pozdějších letech kvůli vyšší pravděpodobnosti úmrtí už nestačí na krytí pojistného plnění, a proto musí pojišťovna čerpat ze svých rezerv.

Pojistná rezerva je suma, kterou musí pojišťovna nahromadit z přebytků a úroků v prvních letech pojištění tak, aby mohla plnit svoje závazky i v budoucnosti.

[3] Pro neživotní připojištění k produktům životního pojištění

Dále se budeme zabývat pouze netto rezervou, pro brutto rezervu je možno zvolit např. (Cipra, 2006).

3.1 Netto rezerva

Netto rezerva je tvořená z netto pojistného. Netto rezervu v r-tém roce pojištění, které uzavřela x-letá osoba, přičemž $1 \le r \le n$, kde n je doba trvání pojištění, budeme označovat ${}_rV_x$.

Pro $r = 0$ definujeme ${}_0V_x = 0$.

Netto rezervu můžeme vypočítat retrospektivně nebo prospektivně a vždy ke konci r-tého roku pojištění.

Označme ${}_rH_m^P$ - hodnotu minulých příjmů v r-tém roce pojištění

${}_rH_m^V$ - hodnotu minulých výdajů v r-tém roce pojištění

${}_rH_b^P$ - hodnotu budoucích příjmů v r-tém roce pojištění

${}_rH_b^V$ - hodnotu budoucích výdajů v r-tém roce pojištění

Vyjdeme z rovnice ekvivalence, kdy se příjmy rovnají výdajům

$${}_rH_m^P + {}_rH_b^P = {}_rH_m^V + {}_rH_b^V$$

$${}_rH_m^P - {}_rH_m^V = {}_rH_b^V - {}_rH_b^P$$

$${}_rV_x = {}_rV_x^{retro} = {}_rH_m^P - {}_rH_m^V$$

$${}_rV_x = {}_rV_x^{prosp} = {}_rH_b^V - {}_rH_b^P$$

$${}_rV_x = {}_rV_x^{retro} = {}_rV_x^{prosp}$$

V zásadě je jedno, kterou metodu použijeme pro výpočet netto rezervy, protože obě metody dávají stejný výsledek (až na zaokrouhlovací chyby). Častěji se ale používá prospektivní metoda, při které je možné zohlednit některé změny, které nastanou v průběhu pojištění (např. změna úmrtnostních tabulek, úrokové míry apod.).

Pro prospektivní metodu výpočtu netto rezervy platí:

$${}_rV_x^{prosp} = {}_rH_b^V - {}_rH_b^P$$

Přičemž platí

${}_rH_b^V = H_{x+r}(\eta;\xi)$ a ${}_rH_b^P = 0$ pro jednorázové placení pojistného

${}_rH_b^P = P \cdot \ddot{a}_{x+r}$ pro doživotní placení pojistného

$${}_rH_b^P = P \cdot \ddot{a}_{x+r;\overline{m-r|}}$$ pro běžně placené pojistné po m let a pro $r < m$

$${}_rH_b^P = 0$$ pro běžně placené pojistné po m let a pro $r \geq m$

Protože $H_{x+r}(\eta;\xi) = \pi_{x+r}$ při jednorázovém placení pojistného, rovná se prospektivní netto rezerva při jednorázovém placení pojistného hodnotě pojištění *(x+r)*-leté osoby, tj. ${}_rV_x^{prosp} = \pi_{x+r}$.

Příklad: 30-letá osoba se pojistila pro případ smrti na pojistnou částku 100 000 Kč. Pojistné zaplatila jednorázově. Jak velká je netto rezerva po 10. roce pojištění a po 40.roce pojištění?

Řešení: *x=30, PČ=100 000 Kč,* ${}_rV_x^{prosp} = \pi(A_{x+r})$

pro *r=10*

$${}_{10}V_{30}^{prosp} = \pi(A_{40}) = \frac{M_{40}}{D_{40}} \cdot 100\,000 = 49\,457{,}50\ Kč$$

pro *r=40*

$${}_{40}V_{30}^{prosp} = \pi(A_{70}) = \frac{M_{70}}{D_{70}} \cdot 100\,000 = 78\,750{,}35\ Kč$$

Prospektivní netto rezerva při běžně placeném pojistném se rovná:

$${}_rV_x^{prosp} = \pi_{x+r} - P \cdot \ddot{a}_{x+r}$$ při doživotním placení pojistného

$${}_rV_x^{prosp} = \pi_{x+r} - P \cdot \ddot{a}_{x+r;\overline{m-r|}}$$ pro běžně placené pojistné po m let a pro $r < m$

$${}_rV_x^{prosp} = \pi_{x+r}$$ pro běžně placené pojistné po m let a pro $r \geq m$

Při běžné placeném pojištění pro případ smrti se rezerva rovná

$${}_rV_x^{prosp} = A_{x+r} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+r}$$ tento výraz je známý jako Bailyho vzorec

Různými úpravami tohoto vzorce na *1 p.j.* dospějeme k dalším vzorcům, které je možno využít:

$${}_rV_x^{prosp} = (P_{x+r} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+r}$$ Milneho vzorec

$${}_rV_x^{prosp} = 1 - (d + P_x) \cdot \ddot{a}_{x+r}$$ Todhunterův vzorec

$${}_rV_x^{prosp} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+r}}{\ddot{a}_x}$$ Jonesův vzorec

Příklad: 30-letá osoba se pojistila pro případ smrti na pojistnou částku 100 000 Kč. Pojistné platí běžně. Jak velká je netto rezerva po 10. roce pojištění?

Řešení: *x=30, PČ=100 000 Kč,* ${}_rV_x^{prosp} = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+r}}{\ddot{a}_x}\right) \cdot PČ$

pro *r=10*

$${}_{10}V_{30}^{prosp} = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{40}}{\ddot{a}_{30}}\right) \cdot 100\,000 = 14\,202{,}32\ Kč$$

3.2 Všeobecný vzorec pro výpočet netto rezervy

Stejně jako pro výpočet pojistného pomocí všeobecné rovnice ekvivalence můžeme pro výpočet netto rezervy (retrospektivní i prospektivní metodou) použít všeobecný vzorec, který je možno odvodit z předchozí kapitoly.

Pro retrospektivní metodu výpočtu netto rezervy použijeme následující vzorec

$$\boxed{{}_rV_x^{retro} = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[\sum_{j=0}^{r-1} \varphi_j \cdot D_{x+j} - \sum_{j=0}^{r-1} \eta_j \cdot D_{x+j} - \sum_{j=0}^{r-1} \xi_j \cdot C_{x+j} \right]}$$

a pro prospektivní metodu výpočtu netto rezervy použijeme následující vzorec

$$\boxed{{}_rV_x^{prosp} = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[\sum_{j=r}^{\omega-x} \eta_j \cdot D_{x+j} + \sum_{j=r}^{\omega-x} \xi_j \cdot C_{x+j} - \sum_{j=r}^{\omega-x} \varphi_j \cdot D_{x+j} \right]}$$

Příklad: Odvoďte vzorec na výpočet netto rezervy pro dočasné pojištění pro případ smrti na *1 p.j.*:

a) retrospektivní metodou při placení jednorázově
b) prospektivní metodou při placení běžně
c) prospektivní metodou při placení běžně po m let ($m < n$)

Řešení:

a) $\eta_j = 0; \qquad j \in \{0,1,\ldots,\omega - x\} \qquad \xi_j = \left\langle \begin{matrix} 1;\ j = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0;\ j = n, n+1,\ldots,\omega - x \end{matrix} \right.$

$$\varphi_j = \left\langle \begin{matrix} \pi;\ j = 0 \\ 0;\ j \neq 0 \end{matrix} \right.$$

Nejdříve si odvodíme vzorec pro výpočet π :

$$\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x} \varphi_j \cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x} \eta_j \cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=0}^{\omega-x} \xi_j \cdot C_{x+j}$$

$$\pi \cdot D_x = 0 + (M_x - M_{x+n})$$

$$\pi = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Nyní dosadíme do vzorce pro výpočet netto rezervy retrospektivní metodou:

$${}_rV_x^{retro} = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[\pi \cdot D_x - 0 - \sum_{j=0}^{r-1} 1 \cdot C_{x+j} \right] = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot [\pi \cdot D_x - (M_x - M_{x+r})]$$

Nyní dosadíme za π :

$${}_rV_x^{retro} = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \cdot D_x - (M_x - M_{x+r}) \right] = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot [M_x - M_{x+n} - (M_x - M_{x+r})]$$

a po úpravě dostaneme vzorec:

$$ {}_{r}V_{x}^{retro}\left(A_{x;\overline{n|}}^{1}\right)=\frac{M_{x+r}-M_{x+n}}{D_{x+r}} $$

b) $\eta_j = 0; \qquad j \in \{0,1,\dots,\omega-x\} \qquad \xi_j = \langle \begin{matrix} 1;\ j=0,1,\dots,n-1 \\ 0;\ j=n,n+1,\dots,\omega-x \end{matrix}$

$\varphi_j = \langle \begin{matrix} P;\ j=0,1,\dots,n-1 \\ 0;\ j=n,n+1,\dots,\omega-x \end{matrix}$

Nejdříve si odvodíme vzorec pro výpočet P:

$$ \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\varphi_j\cdot D_{x+j}=\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\eta_j\cdot D_{x+j}+\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\xi_j\cdot C_{x+j} $$

$$ P\cdot\left(N_x-N_{x+n}\right)=0+\left(M_x-M_{x+n}\right) $$

$$ P=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}} $$

Nyní dosadíme do vzorce pro výpočet netto rezervy prospektivní metodou:

$$ {}_{r}V_{x}^{prosp}=\frac{1}{D_{x+r}}\cdot\left[0+\sum_{j=r}^{n-1}1\cdot C_{x+j}-\sum_{j=r}^{n-1}P\cdot D_{x+j}\right]=\frac{1}{D_{x+r}}\cdot\left[\left(M_{x+r}-M_{x+n}\right)-P\cdot\left(N_{x+r}-N_{x+n}\right)\right] $$

Nyní dosadíme za P a dostaneme vzorec:

$$ {}_{r}V_{x}^{prosp}=\frac{1}{D_{x+r}}\cdot\left[\left(M_{x+r}-M_{x+n}\right)-\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}\cdot\left(N_{x+r}-N_{x+n}\right)\right] $$

c) $\eta_j = 0; \qquad j \in \{0,1,\dots,\omega-x\} \qquad \xi_j = \langle \begin{matrix} 1;\ j=0,1,\dots,n-1 \\ 0;\ j=n,n+1,\dots,\omega-x \end{matrix}$

$\varphi_j = \langle \begin{matrix} P;\ j=0,1,\dots,m-1 \\ 0;\ j=m,m+1,\dots,n,\dots,\omega-x \end{matrix}$ - protože $m<n$ a $r<n$ musíme rozlišit dvě možnosti: 1. $r \le m-1$ a 2. $m-1<r\ (<n)$

Nejdříve si odvodíme vzorec pro výpočet P, které je pro obě možnosti stejné:

$$ \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\varphi_j\cdot D_{x+j}=\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\eta_j\cdot D_{x+j}+\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\xi_j\cdot C_{x+j} $$

$$ P\cdot\left(N_x-N_{x+m}\right)=0+\left(M_x-M_{x+n}\right) $$

$$ P=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+m}} $$

Nyní dosadíme do vzorce pro výpočet netto rezervy prospektivní metodou:

1. $r \le m-1$

$$ {}_rV_x^{prosp} = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[0 + \sum_{j=r}^{n-1} 1 \cdot C_{x+j} - \sum_{j=r}^{m-1} P \cdot D_{x+j} \right] = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[(M_{x+r} - M_{x+n}) - P \cdot (N_{x+r} - N_{x+m}) \right] $$

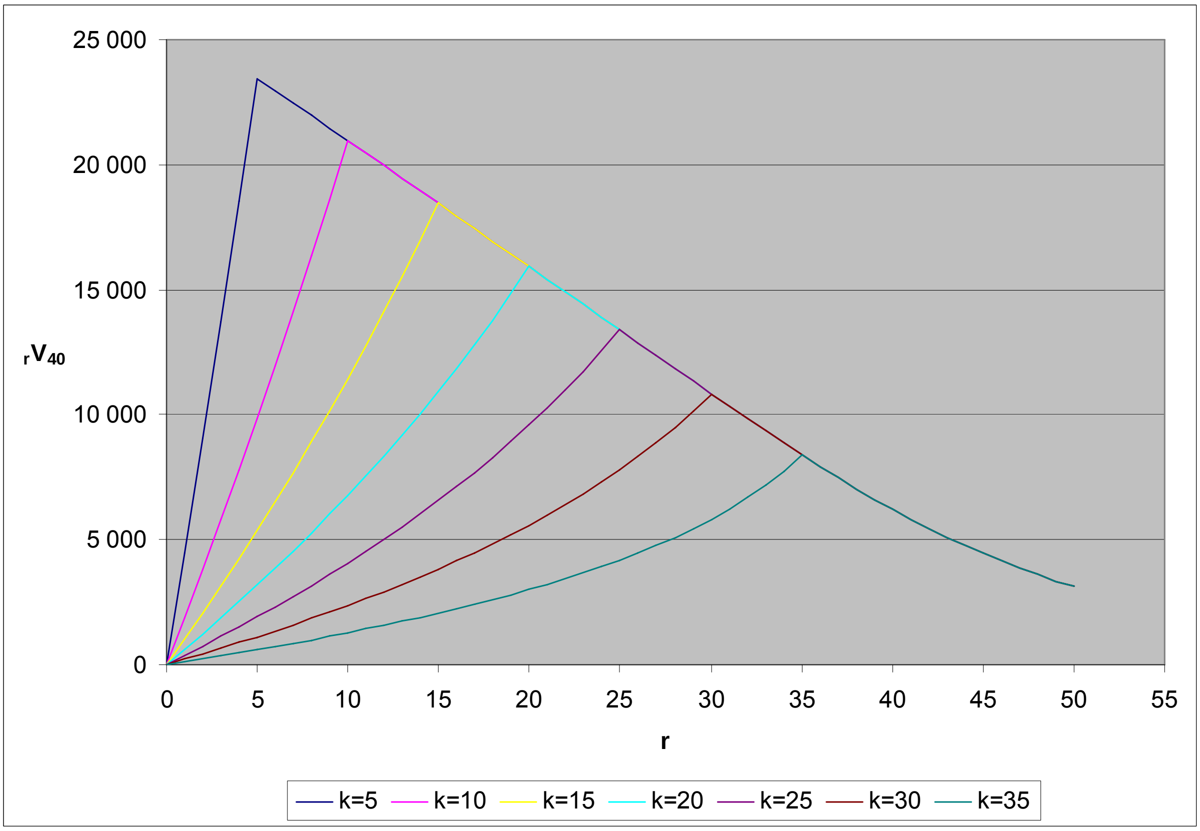
Nyní dosadíme za P a dostaneme vzorec:

$$ {}_rV_x^{prosp} = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[(M_{x+r} - M_{x+n}) - \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \cdot (N_{x+r} - N_{x+n}) \right] $$

2. $m-1 < r \; (< n)$

$$ {}_rV_x^{prosp} = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[0 + \sum_{j=r}^{n-1} 1 \cdot C_{x+j} - 0 \right] = \frac{M_{x+r} - M_{x+n}}{D_{x+r}} $$

Obr. 4 Vývoj netto rezervy o *k* roků odloženého po dobu odložení běžně placeného doživotního důchodu pro vstupní věk 40 roků



3.3 Ukládací a riziková část pojistného

Pokud dojde k pojistné události, potom pojišťovna čerpá pojistné plnění ze dvou zdrojů – z netto rezervy, kterou pojišťovna průběžně vytváří z netto pojistného (tzv. ukládací část), a z rizikového kapitálu (tzv. riziková část).

Rozklad pojistného na ukládací a rizikovou část má nejen teoretický, ale i praktický význam. Např. v zajišťování se zajistné (pojistné v případě zajišťování) počítá pouze z rizikové části pojistného.

Pojistné se v *r*-tém roce pojištění rozkládá na ukládací část a rizikovou část. Můžeme tedy psát:

$$P_x = {}_rP_x^{ukl} + {}_rP_x^{riz}$$

Nyní si odvodíme vzorce pro výpočet ukládací a rizikové části pojistného v *r*-tém roce pojištění.

Nechť je pojištění placené běžně a výška pojistného je P_x.

Netto rezerva v *r*-tém roce je

$${}_rV_x = \frac{1}{D_{x+r}} \cdot \left[\sum_{j=r}^{\omega-x} \eta_j \cdot D_{x+j} + \sum_{j=r}^{\omega-x} \xi_j \cdot C_{x+j} - P_x \cdot \sum_{j=r}^{\omega-x} D_{x+j} \right]$$

$$D_{x+r} \cdot {}_rV_x = \sum_{j=r}^{\omega-x} \eta_j \cdot D_{x+j} + \sum_{j=r}^{\omega-x} \xi_j \cdot C_{x+j} - P_x \cdot \sum_{j=r}^{\omega-x} D_{x+j}$$

a netto rezerva v *(r-1)*-ním roce je

$${}_{r-1}V_x = \frac{1}{D_{x+r-1}} \cdot \left[\sum_{j=r-1}^{\omega-x} \eta_j \cdot D_{x+j} + \sum_{j=r-1}^{\omega-x} \xi_j \cdot C_{x+j} - P_x \cdot \sum_{j=r-1}^{\omega-x} D_{x+j} \right]$$

$$D_{x+r-1} \cdot {}_{r-1}V_x = \sum_{j=r-1}^{\omega-x} \eta_j \cdot D_{x+j} + \sum_{j=r-1}^{\omega-x} \xi_j \cdot C_{x+j} - P_x \cdot \sum_{j=r-1}^{\omega-x} D_{x+j}$$

a můžeme ji vyjádřit následovně:

$$D_{x+r-1} \cdot {}_{r-1}V_x = \underline{\sum_{j=r}^{\omega-x} \eta_j \cdot D_{x+j}} + \eta_{r-1} \cdot D_{x+r-1} + \underline{\sum_{j=r}^{\omega-x} \xi_j \cdot C_{x+j}} + \xi_{r-1} \cdot C_{x+r-1} \underline{- P_x \cdot \sum_{j=r}^{\omega-x} D_{x+j}} - P_x \cdot D_{x+r-1}$$

Podtržené členy vyjadřují netto rezervu v *r*-tém roce vynásobenou členem D_{x+r}. Můžeme tedy psát

$$D_{x+r-1} \cdot {}_{r-1}V_x = {}_rV_x \cdot D_{x+r} + \eta_{r-1} \cdot D_{x+r-1} + \xi_{r-1} \cdot C_{x+r-1} - P_x \cdot D_{x+r-1}$$ [4]

[4] Toto je rekurentní vzorec na výpočet netto rezervy.

Vyjádříme z této rovnice P_x

$$P_x \cdot D_{x+r-1} = {}_rV_x \cdot D_{x+r} - {}_{r-1}V_x \cdot D_{x+r-1} + \eta_{r-1} \cdot D_{x+r-1} + \xi_{r-1} \cdot C_{x+r-1}$$

$$P_x = {}_rV_x \cdot \frac{D_{x+r}}{D_{x+r-1}} - {}_{r-1}V_x + \eta_{r-1} + \xi_{r-1} \cdot \frac{C_{x+r-1}}{D_{x+r-1}}$$

Protože platí

$$\frac{D_{x+r}}{D_{x+r-1}} = \frac{l_{x+r} \cdot v^{x+r}}{l_{x+r-1} \cdot v^{x+r-1}} = p_{x+r-1} \cdot v = \left(1 - q_{x+r-1}\right) \cdot v \text{ a}$$

$$\frac{C_{x+r-1}}{D_{x+r-1}} = \frac{d_{x+r-1} \cdot v^{x+r}}{l_{x+r-1} \cdot v^{x+r-1}} = q_{x+r-1} \cdot v$$

Můžeme dále psát

$$P_x = {}_rV_x \cdot v - {}_rV_x \cdot q_{x+r-1} \cdot v - {}_{r-1}V_x + \eta_{r-1} + \xi_{r-1} \cdot q_{x+r-1} \cdot v$$

$$P_x = {}_rV_x \cdot v - {}_{r-1}V_x + \eta_{r-1} + q_{x+r-1} \cdot v \cdot \left(\xi_{r-1} - {}_rV_x\right)$$

To, co se uloží do rezervy (tj. ukládací část pojistného), je vyjádřeno rozdílem mezi odúročenou rezervou v *r*-tém roce a rezervou v *(r-1)*-ním roce, tj. ${}_rV_x \cdot v - {}_{r-1}V_x$, a zbývající část je rizikovou částí pojistného. Tedy:

$$\boxed{{}_rP_x^{ukl} = {}_rV_x \cdot v - {}_{r-1}V_x}$$

$$\boxed{{}_rP_x^{riz} = \eta_{r-1} + q_{x+r-1} \cdot v \cdot \left(\xi_{r-1} - {}_rV_x\right)}$$

Příklad: Vypočítejte ukládací a rizikovou část pojistného v 5.roce a 40.roce pojištění pro běžně placené pojištění pro případ smrti, pokud se pojistila 30-ti letá osoba na pojistnou částku 1 000 Kč.

Řešení: *x=30, PČ=1 000 Kč, r=5 resp. 40*

$\eta_j = 0; \forall j \qquad \xi_j = 1\,000; \forall j \;\; \varphi_j = P_x; \forall j$

$$P_{30} = \frac{M_{30}}{N_{30}} \cdot 1\,000 \doteq 13{,}68\ Kč$$

pro $r = 5$:

$${}_5P_{30}^{ukl} = {}_5V_{30} \cdot \frac{1}{1+0{,}02} - {}_4V_{30} \qquad {}_5P_{30}^{riz} = \eta_4 + q_{34} \cdot \frac{1}{1+0{,}02} \cdot \left(\xi_4 - {}_5V_{30}\right)$$

$${}_5V_{30} = \frac{1}{D_{35}} \cdot \left[\sum_{j=5}^{\omega-30} 0 \cdot D_{30+j} + \sum_{j=5}^{\omega-30} 1\,000 \cdot C_{30+j} - 13{,}68 \cdot \sum_{j=5}^{\omega-30} D_{30+j}\right] =$$

$$= \frac{0 + 1\,000 \cdot M_{35} - 13{,}68 \cdot N_{35}}{D_{35}} \doteq 68{,}20\ Kč$$

$$ {}_4V_{30} = \frac{1}{D_{34}} \cdot \left[\sum_{j=4}^{\omega-30} 0 \cdot D_{30+j} + \sum_{j=4}^{\omega-30} 1\,000 \cdot C_{30+j} - 13{,}68 \cdot \sum_{j=4}^{\omega-30} D_{30+j} \right] =$$

$$= \frac{0 + 1\,000 \cdot M_{34} - 13{,}68 \cdot N_{34}}{D_{34}} \doteq 54{,}15\ Kč$$

$$ {}_5P_{30}^{ukl} = {}_5V_{30} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}02} - {}_4V_{30} = 68{,}20 \cdot \frac{1}{1{,}02} - 54{,}15 = 12{,}71\ Kč$$

Protože platí $P_x = {}_rP_x^{ukl} + {}_rP_x^{riz} \Rightarrow {}_rP_x^{riz} = P_x - {}_rP_x^{ukl}$, můžeme lehce spočítat rizikovou část pojistného: ${}_rP_x^{riz} = P_x - {}_rP_x^{ukl} = 13{,}68 - 12{,}71 = 0{,}97\ Kč$.

Ke stejnému výsledku bychom měli dospět i pomocí vzorce ${}_5P_{30}^{riz} = \eta_4 + q_{34} \cdot \frac{1}{1{,}02} \cdot \left(\xi_4 - {}_5V_{30}\right) = 0 + q_{34} \cdot \frac{1}{1{,}02} \cdot \left(1\,000 - 68{,}20\right) \doteq 0{,}97\ Kč$.

pro $r = 50$:

$$ {}_{50}P_{30}^{ukl} = {}_{50}V_{30} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}02} - {}_{49}V_{30} \quad {}_{50}P_{30}^{riz} = \eta_{49} + q_{79} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}02} \cdot \left(\xi_{49} - {}_{50}V_{30}\right)$$

$$ {}_{50}V_{30} = \frac{1}{D_{80}} \cdot \left[\sum_{j=50}^{\omega-30} 0 \cdot D_{30+j} + \sum_{j=50}^{\omega-30} 1\,000 \cdot C_{30+j} - 13{,}68 \cdot \sum_{j=50}^{\omega-30} D_{30+j} \right] =$$

$$= \frac{0 + 1\,000 \cdot M_{80} - 13{,}68 \cdot N_{80}}{D_{80}} \doteq 793{,}67\ Kč$$

$$ {}_{49}V_{30} = \frac{1}{D_{79}} \cdot \left[\sum_{j=49}^{\omega-30} 0 \cdot D_{30+j} + \sum_{j=49}^{\omega-30} 1\,000 \cdot C_{30+j} - 13{,}68 \cdot \sum_{j=49}^{\omega-30} D_{30+j} \right] =$$

$$= \frac{0 + 1\,000 \cdot M_{79} - 13{,}68 \cdot N_{79}}{D_{79}} \doteq 780{,}18\ Kč$$

$$ {}_{50}P_{30}^{ukl} = {}_{50}V_{30} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}02} - {}_{49}V_{30} = 793{,}67 \cdot \frac{1}{1{,}02} - 780{,}18 = -2{,}07\ Kč$$

Protože opět platí $P_x = {}_rP_x^{ukl} + {}_rP_x^{riz} \Rightarrow {}_rP_x^{riz} = P_x - {}_rP_x^{ukl}$, můžeme lehce spočítat rizikovou část pojistného: ${}_rP_x^{riz} = P_x - {}_rP_x^{ukl} = 13{,}68 - \left(-2{,}07\right) = 15{,}75\ Kč$.

Ke stejnému výsledku bychom měli dospět i pomocí vzorce ${}_{50}P_{30}^{riz} = \eta_{49} + q_{79} \cdot \frac{1}{1{,}02} \cdot \left(\xi_{49} - {}_{50}V_{30}\right) = 0 + q_{79} \cdot \frac{1}{1{,}02} \cdot \left(1\,000 - 793{,}67\right) \doteq 15{,}75\ Kč$.

3.4 Zillmerova rezerva

Počáteční jednorázové náklady α, které vznikají při uzavírání pojistné smlouvy, vynakládá pojišťovna při vzniku pojištění nebo krátce po něm. Při běžně placeném pojistném se tyto náklady započítávají do pojistného, jak bylo uvedeno v kapitole 2.4.2 Výpočet brutto pojistného. Pojišťovna dostane zpět α-náklady až na konci pojištění, resp. při ukončení placení pojistného.

Kvůli této skutečnosti se především nově založené pojišťovny a pojišťovny s velkým počtem nových pojistek dostávaly do finančních těžkostí.

Problém řešil německý pojistný matematik August Zillmer. Označil ještě nezaplacené částky α-nákladů jako pohledávku pojišťovny vůči pojištěnému a o tuto částku snížil jeho netto rezervu.

Takováto rezerva se nazývá zillmerovaná rezerva nebo Zillmerova rezerva. Vypočítáme ji následovně:

$$ {}_rV_x^Z = {}_rV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{m}|}} \cdot \ddot{a}_{x+r;\overline{m-r}|} \qquad \text{pro } m > r $$

$$ {}_rV_x^Z = {}_rV_x \qquad \text{pro } m < r $$

Příklad: Určete zillmerovanou rezervu ve 2.roce běžně placeného pojištění pro případ smrti na pojistnou částku 10 000 Kč, které uzavřela 30-ti letá osoba, pokud $\alpha = 3\%$ z PČ.

Řešení: *x=30, PČ=10 000 Kč, r=2,* $\alpha = 0{,}03$

$$ {}_rV_x^Z = {}_rV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_{x+r} $$ pro pojištění pro případ smrti použijeme Jonesův vzorec

$$ {}_rV_x^Z = {}_rV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_{x+r} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+r}}{\ddot{a}_x} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_{x+r} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+r}}{\ddot{a}_x} \cdot (1+\alpha) $$

$$ {}_2V_{30}^Z = \left[1 - \frac{\ddot{a}_{32}}{\ddot{a}_{30}} \cdot (1+0{,}03)\right] \cdot 10\,000 = -24{,}74\ Kč $$

Zillmer určil podmínky, při kterých už rezerva v prvním roce pojištění nebude záporná, tj. ${}_1V_x^Z \geq 0$.

Ukážeme si postup výpočtu na běžně placeném pojištění pro případ smrti. Víme, že Zillmerova rezerva použitím Jonesova vzorce pro takovéto pojištění je ${}_rV_x^Z = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+r}}{\ddot{a}_x} \cdot (1+\alpha)$

Chceme, aby výše Zillmerovy rezervy v prvním roce pojištění nebyla záporná. Kořen rovnice ${}_1V_x^Z = 0$, který označujeme α^Z, se nazývá zillmerovací (Zillmerova) sazba.

Pro zvolené pojištění ji určíme řešením rovnice

$$ {}_1V_x^Z = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x} \cdot \left(1 + \alpha^Z\right) = 0 $$

Vyjádříme α^Z

$$ \alpha^Z = \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}} - 1 $$

Zřejmě pro všechny $\alpha \le \alpha^Z$ je Zillmerova rezerva již nezáporná.

Příklad: Vypočítejte Zillmerovu sazbu pro předchozí příklad.

Řešení:

$$ \alpha^Z = \frac{\ddot{a}_{30}}{\ddot{a}_{31}} - 1 = \frac{N_{30} \cdot D_{31}}{D_{30} \cdot N_{31}} - 1 = 0{,}013437626 \doteq 0{,}013 $$

Zillmerova sazba je 1,3%.

3.5 Změny pojistné smlouvy

Od rezervy pojistného se odvíjí celá řada velmi důležitých výpočtů. Budeme se dále věnovat zrušení (stornování) pojistné smlouvy a technickým změnám pojistných smluv.

3.5.1 Zrušení (stornování) pojistné smlouvy

Mohou nastat dvě možnosti:

1. zánik – nejčastěji v prvních letech pojištění, kdy je Zillmerova rezerva záporná; bez nároku na vyrovnání (odkup)
2. odkup – pokud nastalo právo odkupu (Zillmerova rezerva je kladná); odkupní hodnota se počítá z Zillmerovy rezervy nebo z netto rezervy a vzorec navrhuje pojistný matematik; pojišťovny nenabízí vysoké odkupné, aby nepřišly o klienta (o jeho rezervu)

Pro jednoduchost předpokládáme, že odkup může být proveden pouze na konci roku. Ukážeme si postup výpočtu na příkladu.

Příklad: Osoba uzavřela ve věku 40 roků běžně placené smíšené pojištění na 20 let s pojistnou částkou 400 000 Kč. Pojišťovna počítá následující náklady: $\alpha = 3{,}5\%$, $\beta = 3‰$, $\gamma = 10\%$. Pro hodnotu odkupního používá vzorec ${}_rO_x = \left(0{,}885 + 0{,}005 \cdot r\right) \cdot {}_rV_x^Z$ pro $r > 5$. Vypočítejte

a) brutto pojistné
b) výšku rezervy v 10. roce pojištění
c) ${}_{10}O_x$

Řešení: *x=40, n=20, PČ=400 000 Kč, r=10*

a) $\eta_j = \begin{cases} 400\,000;\ j = 20 \\ 0;\ j \neq 20 \end{cases}$ $\xi_j = \begin{cases} 400\,000;\ j = 0,1,\dots,19 \\ 0;\ j = 20,21,\dots \end{cases}$ $\varphi_j = \begin{cases} P;\ j = 0,1,\dots,19 \\ 0;\ j = 20,21,\dots \end{cases}$

$$\frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\varphi_j\cdot D_{x+j} = \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\eta_j\cdot D_{x+j} + \frac{1}{D_x}\cdot\sum_{j=0}^{\omega-x}\xi_j\cdot C_{x+j}$$

$$\sum_{j=0}^{19}P\cdot D_{x+j} = \sum_{j=20}^{20}400\,000\cdot D_{x+j} + \sum_{j=0}^{19}400\,000\cdot C_{x+j}$$

$$P\cdot\left(N_x - N_{x+20}\right) = 400\,000\cdot D_{x+20} + 400\,000\cdot\left(M_x - M_{x+20}\right)$$

$$P = 400\,000\cdot\frac{D_{60} + M_{40} - M_{60}}{N_{40} - N_{60}} = 16\,897{,}44\ K\check{c}$$

$$B = \frac{1}{1-\gamma}\cdot\left(P + \frac{\alpha\cdot P\check{C}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + \beta\cdot P\check{C}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-0{,}1}\cdot\left(16\,897{,}44 + \frac{0{,}035\cdot 400\,000}{\ddot{a}_{40;\overline{20}|}} + 0{,}003\cdot 400\,000\right) = 21\,070{,}40\ K\check{c}$$

b) Rezervu spočítáme retrospektivní metodou

$${}_rV_x^{retro} = \frac{1}{D_{x+r}}\cdot\left[\sum_{j=0}^{r-1}\varphi_j\cdot D_{x+j} - \sum_{j=0}^{r-1}\eta_j\cdot D_{x+j} - \sum_{j=0}^{r-1}\xi_j\cdot C_{x+j}\right]$$

$${}_{10}V_{40}^{retro} = \frac{1}{D_{50}}\cdot\left[\sum_{j=0}^{9}P\cdot D_{x+j} - 0 - \sum_{j=0}^{9}400\,000\cdot C_{x+j}\right]$$

$${}_{10}V_{40}^{retro} = \frac{1}{D_{50}}\cdot\left[P\cdot\left(N_{40} - N_{50}\right) - 400\,000\cdot\left(M_{40} - M_{50}\right)\right] = 179\,707{,}90\ K\check{c}$$

c) Protože odkupné se počítá z Zillmerovy rezervy, musíme ji nejprve spočítat.

$${}_rV_x^Z = {}_rV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{x+r;\overline{n-r}|}$$

$${}_{10}V_{40}^Z = {}_{10}V_{40} - \frac{0{,}035\cdot 400\,000}{\ddot{a}_{40;\overline{20}|}}\cdot\ddot{a}_{50;\overline{10}|} = 171\,997{,}68\ K\check{c}$$

$${}_{10}O_{40} = \left(0{,}885 + 0{,}005\cdot 10\right)\cdot 171\,997{,}68 = 160\,817{,}83\ K\check{c}$$

3.5.2 Technické změny

Za technické změny budeme považovat redukci pojistné částky, změnu typu pojištění a dynamizaci.

Existuje několik metod výpočtu, ale všechny vycházejí z jednoho principu – v čase změny má pojištěný k dispozici nějakou částku (netto rezervu, Zillmerovu rezervu, odkupné). Tuto částku použijeme jako jednorázové pojistné na nové pojištění, které zohlední požadované změny.

3.5.2.1 Redukce pojistné částky

Pokud pojistník nemůže nebo nechce platit pojistné, ale nechce zrušit pojištění, může požádat o redukci pojistné částky.

Budeme předpokládat, že pojistník má k dispozici Zillmerovu rezervu[5], kterou budeme považovat za netto pojistné k datu redukce. Potom můžeme psát

$${}_rV_x^Z \cdot PČ = Б_{x+r} \cdot {}_rR_x \Rightarrow {}_rR_x = {}_rV_x^Z \cdot PČ \cdot (Б_{x+r})^{-1}$$, kde ${}_rR_x$ je redukovaná pojistná částka

Příklad: 45-ti letá osoba uzavřela běžně placené smíšené pojištění na 20 roků na pojistnou částku 10 000 Kč. V 10.roku pojištění chce redukci pojistné částky. Jaká bude redukovaná pojistná částka, pokud pojišťovna vychází z Zillmerovy rezervy a počítá následující náklady: $\alpha = 3{,}5\%$, $\beta = 5‰$?

Řešení: *x=45, n=20, PČ=10 000 Kč, r=10*

$${}_{10}V_{45}^Z \cdot PČ = 4\,471{,}12\ Kč$$

Jednorázové brutto pojistné na 1 p.j. pro smíšené pojištění *(x+r)*- leté osoby na *(n-r)* roků se rovná

$$Б = A_{x+r;\overline{n-r|}} + \beta \cdot \ddot{a}_{x+r;\overline{n-r|}}$$ [6]

$${}_{10}R_{45} \cdot Б = \left(A_{55;\overline{10|}} + 0{,}005 \cdot \ddot{a}_{55;\overline{10|}}\right) {}_{10}R_{45}$$

$${}_{10}V_{45}^Z \cdot PČ = 4\,471{,}12 = {}_{10}R_{45} \cdot Б = \left(A_{55;\overline{10|}} + 0{,}005 \cdot \ddot{a}_{55;\overline{10|}}\right) {}_{10}R_{45} \Rightarrow$$

$${}_{10}R_{45} = 5\,127{,}14\ Kč$$

3.5.2.2 Změna typu pojištění

Ukážeme si způsob výpočtu na konkrétním příkladu.

Příklad: 30-ti letá osoba uzavřela doživotní pojištění pro případ smrti, ze které zaplatila jednorázové netto pojistné 10 000 Kč. V 10.roce pojištění se rozhodla změnit pojištění. Jak se změní pojistná částka při změně pojištění na:

a) dočasné pojištění pro případ smrti na 30 let
b) smíšené pojištění na dobu 20 let

Pojištěná osoba přitom nechce již nic platit.

Řešení: *x=30,* $\pi(A_{30}) = 10\,000\ Kč$, *r=10*

$$\pi(A_{30}) = \frac{M_{30}}{D_{30}} \cdot PČ \Rightarrow PČ = 10\,000 \cdot \frac{D_{30}}{M_{30}} = 24\,336{,}19\ Kč$$

Protože se jedná o jednorázové pojistné je Zillmerova netto rezerva rovna netto rezervě, proto můžeme pro výpočty použít netto rezervu, která se rovná

${}_rV_x = \dfrac{M_{x+r}}{D_{x+r}} \cdot PČ$, tedy pro $r = 10$: ${}_{10}V_{30} = \dfrac{M_{40}}{D_{40}} \cdot 24\,336{,}19 = 12\,036{,}07\ Kč$

Tuto částku budeme považovat za jednorázové pojistné v obou případech změny.

a) dočasné pojištění pro případ smrti na 30 let, tzn. *n=30*

[5] Některé pojišťovny používají místo Zillmerovy rezervy odkupné.

[6] α -náklady jsou zahrnuty již v Zillmerově rezervě, proto se zde nevyskytují. Někdy se ale používají ještě tzv. snížené α -náklady.

$$\pi'\left(A^{1}_{x+r;\overline{n}|}\right)=\frac{M_{x+r}-M_{x+r+n}}{D_{x+r}}\cdot PČ'$$

$$\frac{M_{x+r}}{D_{x+r}}\cdot PČ=\frac{M_{x+r}-M_{x+r+n}}{D_{x+r}}\cdot PČ'\Rightarrow PČ'=\frac{M_{x+r}}{M_{x+r}-M_{x+r+n}}\cdot PČ$$

$$PČ'=\frac{M_{40}}{M_{40}-M_{70}}\cdot 24\,336{,}19=70\,078{,}72\ Kč$$

b) smíšené pojištění na dobu 20 let, tzn. $n=20$

$$\pi'\left(A_{x+r;\overline{n}|}\right)=\frac{M_{x+r}-M_{x+r+n}+D_{x+r+n}}{D_{x+r}}\cdot PČ'$$

$$\frac{M_{x+r}}{D_{x+r}}\cdot PČ=\frac{M_{x+r}-M_{x+r+n}+D_{x+r+n}}{D_{x+r}}\cdot PČ'\Rightarrow PČ'=\frac{M_{x+r}}{M_{x+r}-M_{x+r+n}+D_{x+r+n}}\cdot PČ$$

$$PČ'=\frac{M_{40}}{M_{40}-M_{60}+D_{60}}\cdot 24\,336{,}19=17\,622{,}75\ Kč$$

3.5.2.2 Dynamizace

Většina pojišťoven nabízí možnost pravidelného zvyšování pojistného resp. pojistné částky o inflaci (jako protiinflační opatření). Takovýto postup nazývají dynamizace nebo indexace případně protiinflační pojištění. Dynamizace umožňuje udržet reálnou hodnotu pojistné částky.

Na výpočet nového pojistného existuje více metod, např. metoda dodatečného pojištění, metoda doplatku a další.

Ukážeme si výpočet nového pojistného metodou dodatečného pojištění.
Nechť v *(r+1)*-ním roce pojištění souhlasí pojištěný s dynamizací, tzn. $PČ \to PČ' \quad PČ' > PČ$.
Můžeme si to představit, jako kdyby pojištěný ve věku *(x+r)* uzavřel novou smlouvu na rozdíl $\left(PČ'-PČ\right)$.

$B'=B+\left(PČ'-PČ\right)\cdot B_{x+r;\overline{n-r}|}$ kde B je původní brutto pojistné

Příklad: 41-letá osoba uzavřela běžně placené smíšené pojištění na 10 let pojistnou částkou 100 000 Kč. Pojišťovna účtuje následující náklady: $\alpha=3{,}5\%$, $\beta=5‰$, $\gamma=5\%$. V 5.roce pojištění souhlasila dotyčná osoba s dynamizací pojištění zvýšením pojistné částky o 11,7%. Spočítejte běžné brutto pojistné před dynamizací a po dynamizaci.

Řešení: *x=41, n=m=10, PČ=100 000 Kč, r=5*

před dynamizací:

$$P=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}\cdot PČ=\frac{M_{41}-M_{51}+D_{51}}{N_{41}-N_{51}}\cdot 100\,000=9\,075{,}30\ Kč$$

$$B=\frac{1}{1-\gamma}\cdot\left(P+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}+\beta\right)=$$

$$= \frac{1}{1-0{,}05} \cdot \left(9\,075{,}3 + \frac{0{,}035 \cdot 100\,000}{\ddot{a}_{41;\overline{10}|}} + 0{,}005 \cdot 100\,000 \right) = 10\,402{,}21\ Kč$$

po dynamizaci:

$$B'_{46} = B_{41} + (117\,000 - 100\,000) \cdot B_{46;\overline{5}|}$$

$$B_{46;\overline{5}|} = \frac{1}{1-0{,}05} \cdot \left(\frac{M_{46} - M_{51} + D_{51}}{N_{46} - N_{51}} + \frac{0{,}035 \cdot D_{46}}{N_{46} - N_{51}} + 0{,}05 \right) = 0{,}212892995$$

$$B'_{46} = 10\,402{,}21 + (11\,700) \cdot 0{,}212892995 = 10\,402{,}21 + 2\,490{,}85 = 12\,893{,}06\ Kč$$

Vidíme, že pojistná částka se zvýšila o11,7%, ale pojistné se zvýšilo o 23,95%. Je to proto, že zvýšené pojistné bude platit osoba starší a kratší dobu.

4 Příklady k procvičení

1. Vypočítejte kolik osob ve věku 60 let zemřelo během 5 roků a během 7 roků.
2. Vypočítejte kolik osob ve věku 70 let zemřelo během 2 roků, 4 roků a 6 roků.
3. Vypočítejte kolik osob ve věku 80 let zemřelo během 10-ti roků a kolik osob ve věku 30 let zemřelo během 10-ti roků.
4. Jaká je míra úmrtnosti osob, které mají 20 roků, 30 roků a 40 roků?
5. Jaká je pravděpodobnost, že se osoby ve věku 15 roků, 25 roků a 35 roků nedožijí dalšího roku?
6. Jaká je pravděpodobnost, že se dožijete svých 40.narozenin, ale nedožijete se 41.narozenin?
7. Srovnejte pravděpodobnost dožití dalšího roku osob ve věku 19 a 91 roků?
8. Zjistěte s jakou pravděpodobností se 70-ti letá osoba nedožije věku 74 roků.
9. Zjistěte s jakou pravděpodobností se 23-ti letá osoba nedožije věku 30 roků.
10. Zjistěte s jakou pravděpodobností zemře osoba ve věku 10, 18, 24, 35, 40, 50, 55, 60, a 65 let přesně za 15 roků a během dalších 15 roků.
11. Doplňte úmrtnostní tabulku a použijte 2% technickou úrokovou míru:

x	l_x	d_x	p_x	q_x	D_x	C_x	N_x	M_x	S_x	R_x
50	90340									
51	89392									
52	88364									
53	87252									
54	86051									
55	84755									
56	83352									
57	81854									
58	80236									
59	78498									
60	76635									
61	74641									
62	72551									
63	70265									
64	67888									
65	65240									
66	62755									
67	59964									

68	57121									
69	54196									
70	51207									

12. Dokažte, že platí následující vztahy:

    a. $C_x = v \cdot D_x - D_{x+1}$

    b. $M_x = D_x - d \cdot N_x$, kde d vyjadřuje roční diskontní míru odpovídající roční úrokové míře i.

    c. $R_x = N_x - d \cdot S_x$

13. Vyjádřete komutační číslo S_x pomocí komutačního čísla D_x

14. Vyjádřete komutační číslo R_x pomocí komutačního čísla C_x

15. Jaké jednorázové pojistné musí zaplatit 30-ti letá osoba v případě, že chce ve svých 50-ti letech obdržet 100 000 Kč?

16. Jak vysoké jednorázové pojistné musí zaplatit 40-ti letá osoba, pokud chce při odchodu do důchodu (v 65 letech) dostat 500 000 Kč?

17. Skončilo vám stavební spoření. Stavební spořitelna vám vyplatila cílovou částku 300 000 Kč. Jakou částku dostanete, pokud vložíte celou částku do pojištění na dožití věku 45 roků, 50 roků nebo 60 roků?

18. 30-ti letá osoba má k dispozici 150 000 Kč. Chce si touto sumou zabezpečit doživotní předlhůtní důchod vyplácený od 30.roku věku. Určete výšku důchodu, pokud neuvažujeme náklady pojišťovny. Jak se změní důchod, pokud bude chtít polhůtní doživotní důchod?

19. Osobě z předchozího příkladu se důchod zdá nízký. Ptá se, jaký by dostávala důchod, pokud by byl předlhůtní důchod vyplácený pouze do 70.roku věku, případně do 60.roku věku.

20. Jaká je současná hodnota doživotního pojištění 25-ti letého muže, který se pojistí tak, aby mu byl ročně předlhůtně vyplácený důchod 12 000 Kč, přičemž vyplácení začne po uplynutí 35 let? Jak se současná hodnota doživotního pojištění změní, pokud bude chtít vyplácet tento důchod pouze 10 roků?

21. Osoba z příkladu 18 není spokojená ani s výsledkem z příkladu 19 a ptá se, jak by se vyplácený důchod změnil, pokud by odložila vyplácení důchodu až do doby odchodu do penze (65 roků) a důchod by dostávala vždy na začátku roku, ale pouze 15 roků.

22. 40-ti letá osoba si chce pojistit předlhůtní bezprostřední důchod vyplácený doživotně s garancí prvních 10 let. Počáteční důchod chce dostávat ve výši 12 000 Kč. Jaké bude jednorázové netto pojistné? Jaké bude jednorázové netto pojistné, pokud chce důchod

dostávat až po odchodu do důchodu (65 let)? Jaké bude jednorázové netto pojistné, pokud chce dostávat výše zmíněný důchod pouze do doby odchodu do důchodu?

23. Odvoďte vzorec pro výpočet jednorázového netto pojistného na doživotní předlhůtní důchod rostoucí lineárně n roků a potom zůstávající na stejné úrovni. Vyjádřete tento vzorec pomocí pravděpodobností dožití.

24. 60-letá osoba chce roční rostoucí předlhůtní důchod, který se začne vyplácet ihned. První důchod má být ve výši 60 000 Kč a každoroční nárůst má být 5% z prvního důchodu. Jaké zaplatí jednorázové netto pojistné?

25. Odvoďte vzorec na výpočet jednorázového netto pojistného pro klesající dočasný důchod s předlhůtními výplatami postupně se rovnající $n, n\text{-}1, \ldots, 1$ p.j.

26. Máte k dispozici 1 milion Kč. Chcete si zabezpečit předlhůtní doživotní důchod, který by rostl každý rok o 4% z prvního důchodu, a dále chcete garanci vyplácení 20 roků. Jak vysoký bude první důchod?

27. 65-letá osoba má k dispozici 1,5 milionu Kč. Chce si pojistit předlhůtní měsíční doživotní důchod. Jakou částku obdrží? Jakou částku obdrží, pokud se bude jednat o polhůtní důchod? Jakou částku obdrží, pokud bude chtít vyplácet důchod pouze 15 let (předlhůtně i polhůtně)?

28. Jaké bude jednorázové netto pojistné pokud chcete prvních 10 let garanci důchodu 12 000 Kč ročně, poté chcete, aby 10 let důchod rostl o 500 Kč, poté chcete opět garanci 10 let ve výši narostlého ročního důchodu a poté chcete, aby od 70. roku života důchod 5 roků klesal o 5 % z výše důchodu, kterou obdržíte v 69. roku života? Důchod chcete vyplácet doživotně předlhůtně.

29. 30-ti letá osoba má k dispozici 50 000 Kč. Tuto sumu chce investovat do pojištění pro případ smrti ve věku vyšším než 65 let. Kolik dostanou dědicové, pokud osoba zemře:
    a. jako 50-ti letá osoba;

    b. jako 75-ti letá osoba?

30. 50-ti letý muž se chce pojistit pro případ smrti tak, aby v případě, že zemře jako 60-ti letý nebo mladší, dědicové dostali na konci roku úmrtí půl milionu. Pokud by zemřel později, pojistná částka má klesat každý rok o 5% z původní pojistné částky. Určete o jaké pojištění se jedná (dočasné nebo doživotní) a vypočítejte jednorázové netto pojistné.

31. Odvoďte vzorec na výpočet jednorázového netto pojistného dočasného pojištění pro případ smrti, pokud pojistná částka roste lineárně každý rok až do výše n.

32. Jakou hodnotu má doživotní pojištění pro případ smrti, pokud pojistná částka roste lineárně do výše n p.j. a potom zůstává na konstantní výši n p.j.?

33. 32-letá osoba chce zabezpečit 3-leté dítě tak, že v případě, že by daná osoba zemřela před dovršením 18 roku dítěte, by dítě dostalo částku 500 000 Kč. Pokud zemře dotyčná osoba v dalších letech, má se tato částka snižovat o 1% ročně z 500 000 Kč. Vypočítejte výšku jednorázového netto pojistného. Jaké by bylo jednorázové netto

pojistné, pokud by se osoba pojistila doživotně na částku 500 000 Kč? O jaké pojištění by se jednalo, kdyby byl pokles o 10% z 500 000 Kč?

34. Jakou částku mohou získat pozůstalí po osobě, která v 50 letech uzavřela smíšené pojištění na 10 let s bonifikací při dožití ve výši 10% z pojistné částky a zaplatila za toto pojištění jednorázově 200 000 Kč?

35. 40-ti letý zákazník uzavře smíšené pojištění na 20 let na částku 30 000 Kč v případě dožití a dvojnásobnou sumu v případě úmrtí. Jaké je jednorázové netto pojistné?

36. Ke všem předchozím příkladům vypočítejte běžné netto pojistné (pokud je pro daný typ pojištění běžné pojistné vhodné) a vypočítejte všechny předchozí příklady, u kterých je možno použít vzorec pro hodnotu pojištění, pomocí vzorce pro výpočet hodnoty pojištění.

37. Jaké je jednorázové a roční brutto pojistné při PČ=10 000 v případě pojištění 40-ti leté osoby na dožití se věku 60 let, jestliže $\alpha = 0{,}035;\ \beta = 0{,}006;\ \gamma = 0{,}05$? Porovnejte s nettopojistným.

38. Vypočítejte běžně placené brutto pojistné při pojištění pro případ smrti, pokud vstupní věk klienta je 45 let, doba trvání pojištění 10 let, PČ=25 000 a $\alpha = 4\%;\ \beta_1 = 0{,}2\%;\ \beta_2 = 0{,}3\%;\ \gamma = 0{,}05$.

39. 30-ti letá osoba se chce pojistit pro případ smrti nebo dožití se věku 60 let na 20 000. Pojistné chce platit ročně do svých 50 let. Jednorázové náklady jsou 3,5%, správní náklady jsou 0,3% z pojistné částky (v rozložení dvě třetiny po celou dobu pojištění a jedna třetina po dobu placení pojistného), inkasní náklady jsou 5% z brutto pojistného. Vypočítejte brutto pojistné.

40. 40 000 zaplatí 35-ti letý zákazník jako jednorázové pojistné na smíšené pojištění trvající 15 let při úmrtí s dvojnásobnou pojistnou částkou než při dožití se konce pojistné doby.

    a. Jakou částku dostane zákazník při dožití se svých 50 let, pokud nepočítáme náklady pojišťovny?

    b. Jaké by bylo brutto pojistné, pokud náklady pojišťovny budou $\alpha = 3{,}5\%;\ \beta = 0{,}5\%$ z pojistné částky na úmrtí?

41. Vypočtěte jednorázové a běžné brutto pojistné (tam, kde je to možné) u všech předchozích příkladů.

42. Zakreslete průběh netto rezervy smíšeného pojištění na PČ = 1000 Kč trvající *n* roků placené jednorázově respektive běžně pro vstupní věk 40 roků.

43. Zakreslete průběh netto rezervy pojištění doživotního důchodu odloženého o *k* roků na PČ = 1000 Kč trvající *n* roků pro jednorázově respektive běžně placené pojistné pro vstupní věk 40 roků.

44. 25-ti letá osoba uzavře na dobu 20 let pojištění s měnící se pojistnou částkou tak, že pokud zemře v prvních deseti letech, bude dědicům vyplaceno 1 000 Kč, pokud zemře

v jedenáctém roce, bude jim vyplaceno 1 100 Kč, ve dvanáctém roce 1 200 Kč atd. Při dožití se konce pojistné doby dostane pojištěný 25 000 Kč. Pojistné chce platit ročně. Jaká bude netto rezerva v 10. roce pojištění?

45. Vypočítejte netto rezervu v 10. roce pojištění pro případ smrti, pokud vstupní věk pojištěné osoby je 30 roků, pojistná částka je 10 000 Kč a pojistné se platí:

    a. jednorázově

    b. běžně

    c. běžně 20 let

    d. běžně 5 let

46. Odvoďte vzorce na výpočet netto rezervy pro všechny základní druhy pojištění placené jednorázově. Pokud je to možné, pak i pro placení běžně.

47. Vypočítejte ukládací a rizikovou část pojistného pro 40-ti letou osobu pojištěnou na smíšené pojištění na 20 let běžně placené s pojistnou částkou 10 000 Kč.

    a. v 5.roku pojištění

    b. v 19. roku pojištění

48. 30-ti letá osoba má zájem o pojištění typu *a terme fixe* na dobu 25 roků a pojistnou částku 100 000 Kč. Pojištění a terme fixe na *n* let s pojistnou částkou 1 p.j. je pojištění, při kterém pojišťovna vyplatí 1 p.j. po uplynutí *n* roků, a to pojištěnému, pokud žije, nebo dědicům v případě, že pojištěnec v průběhu těchto *n* let zemřel. Pojistné se platí, dokud pojištěný žije, nejdéle však *n* roků, na začátku každého roku. Vypočítejte:

    a. běžné netto pojistné

    b. běžné brutto pojistné, pokud má pojišťovna následující náklady: $\alpha = 3{,}5\%$; $\beta = 0{,}4\%$; $\gamma = 5\%$

    c. netto rezervu v 10.roku pojištění v případě, že pojištěnec žije, jako i v případě, že pojištěnec zemřel

    d. vypočítejte rizikovou a ukládací část v 10.roku pojištění v případě, že pojištěnec žije, jako i v případě, že pojištěnec zemřel

49. 35-ti letá osoba se chce pojistit na dobu 20 roků tak, že pokud zemře první rok, pozůstalí by dostali 10 000 Kč. Tato částka se má zvyšovat každý rok stejně tak, aby v případě, že se pojištěná osoba dožije 55 roků, dostala dvojnásobek původní částky. Pojistné chce platit 10 roků. Vypočítejte:

    a. výšku pojistného

    b. výšku netto rezervy v 5.roku pojištění

    c. výšku netto rezervy v 15.roku pojištění

d. ukládací a rizikovou část pojistného v 5.roku pojištění

e. ukládací a rizikovou část pojistného v 15.roku pojištění

50. Vypočítejte netto rezervu a Zillmerovu rezervu v doživotním pojištění pro případ smrti na pojistnou částku 25 000 placeném běžně 45-ti letou osobou, pokud jednorázové náklady jsou 3,5% z pojistné částky v:

    a. 2.roku pojištění

    b. 15. roku pojištění

51. 40-ti letá osoba se pojistí na úmrtí nebo dožití se 60-ti roků na PČ=10 000. Pojištění chce platit ročně. Vypočítejte odkupní hodnotu této pojistky v *r-tém* roce pojištění, pokud jednorázové náklady jsou 3,5% z pojistné částky a pojišťovna počítá podle vzorce:

$$ {}_rO_x = \begin{array}{ll} (0{,}885 + 0{,}005r)\cdot {}_rV_x^Z; & 5 < r < 19 \\ 0{,}98\cdot {}_rV_x^Z; & r \geq 19 \end{array} $$

    a. pro $r = 15$

    b. pro $r = 19$

52. 30-ti letá osoba platí už 9 let pojištění pro případ smrti s pojistnou částkou 10 000. Vypočítejte redukovanou pojistnou částku, pokud pojištěná osoba už nechce dál platit pojistné, ale nechce ani zrušit pojištění. Pojišťovna má jednorázové náklady 3,5% z pojistné částky, odkupní hodnotu vypočítává podle vzorce z předchozího příkladu a redukovanou pojistnou částku počítá z odkupní hodnoty.

53. 40-ti letá osoba uzavřela pojištění pro případ smrti za jednorázové pojistné 20 000.

    a. Vypočítejte, jakou pojistnou částku by dostali dědicové v případě pojistné události.

    b. V 10.roku pojištění chce tato osoba změnit pojištění na doživotní předlhůtní důchod odložený o pět roků. Doplácet nechce nic. Jak vysoký by byl vyplácený důchod?

Použitá a doporučená literatura

[1] *Atkinson, M. E., Dickson, David C. M.:* An Introduction to Actuarial Studies. Edward Elgar Publishing, 2005

[2] *Booth, Ph. et al.:* Modern Actuarial Theory and Practice, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2004

[3] *Borowiak, Dale S.:* Financial and Actuarial Statistics: An Introduction. CRC, 2003

[4] *Cipra, T.:* Pojistná matematika – teorie a praxe. Ekopress, Praha 2006

[5] *Cipra, T.:* Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. Ekopress, Praha 2005

[6] *Čámský, F.:* Pojistná matematika v životním a neživotním pojištění. MU, Brno 2004

[7] *Gerber, H.U., Cox, S.H.:* Life Insurance Mathematics, With Exercises. Springer, 3rd ed. edition, 1997

[8] *Milbrodt, H., Helbig, M.:* Mathematische Methoden der Personenversicherung. Walter De Gruyter Inc, 1999

[9] *Moeller, T., Steffensen, M.:* Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance. Cambridge University Press, 2007

[10] *Promislow, S. David:* Fundamentals of Actuarial Mathematics. Wiley, 2006

[11] *Sekerová, V., Bilíková, M.:* Poistná matematika. Ekonóm, Bratislava 2005

[12] *Schmidt, K.D.:* Versicherungsmathematik (Taschenbuch). Springer, 2005

Přílohy

Příloha 1

Podrobné úmrtnostní tabulky za ČR v roce 2006 – muži

věk x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	0,003911	0,996089	100000	391	99640	7344842	73,45
1	0,000253	0,999747	99609	25	99596	7245202	72,74
2	0,000162	0,999838	99584	16	99576	7145605	71,75
3	0,000249	0,999751	99568	25	99555	7046030	70,77
4	0,000186	0,999814	99543	18	99534	6946474	69,78
5	0,000196	0,999804	99524	20	99515	6846941	68,80
6	0,000159	0,999841	99505	16	99497	6747426	67,81
7	0,000188	0,999812	99489	19	99480	6647930	66,82
8	0,000204	0,999796	99470	20	99460	6548450	65,83
9	0,000184	0,999816	99450	18	99441	6448990	64,85
10	0,000167	0,999833	99432	17	99423	6349549	63,86
11	0,000154	0,999846	99415	15	99407	6250126	62,87
12	0,000137	0,999863	99400	14	99393	6150718	61,88
13	0,000173	0,999827	99386	17	99378	6051326	60,89
14	0,000253	0,999747	99369	25	99356	5951948	59,90
15	0,000289	0,999711	99344	29	99329	5852592	58,91
16	0,000426	0,999574	99315	42	99294	5753262	57,93
17	0,000566	0,999434	99273	56	99245	5653968	56,95
18	0,000705	0,999295	99217	70	99182	5554724	55,99
19	0,000845	0,999155	99147	84	99105	5455542	55,02
20	0,000909	0,999091	99063	90	99018	5356437	54,07
21	0,000876	0,999124	98973	87	98929	5257420	53,12
22	0,000929	0,999071	98886	92	98840	5158490	52,17
23	0,000878	0,999122	98794	87	98751	5059650	51,21
24	0,000860	0,999140	98707	85	98665	4960899	50,26
25	0,000856	0,999144	98622	84	98580	4862234	49,30
26	0,000770	0,999230	98538	76	98500	4763654	48,34
27	0,000779	0,999221	98462	77	98424	4665154	47,38
28	0,000801	0,999199	98385	79	98346	4566730	46,42
29	0,000821	0,999179	98307	81	98266	4468384	45,45
30	0,000865	0,999135	98226	85	98183	4370118	44,49
31	0,000923	0,999077	98141	91	98096	4271935	43,53
32	0,000949	0,999051	98050	93	98004	4173839	42,57
33	0,001079	0,998921	97957	106	97905	4075835	41,61
34	0,001124	0,998876	97852	110	97797	3977930	40,65
35	0,001280	0,998720	97742	125	97679	3880134	39,70
36	0,001377	0,998623	97617	134	97549	3782454	38,75
37	0,001510	0,998490	97482	147	97409	3684905	37,80
38	0,001630	0,998370	97335	159	97256	3587497	36,86
39	0,001830	0,998170	97176	178	97087	3490241	35,92
40	0,001988	0,998012	96998	193	96902	3393154	34,98
41	0,002130	0,997870	96806	206	96702	3296252	34,05
42	0,002397	0,997603	96599	232	96484	3199549	33,12
43	0,002714	0,997286	96368	262	96237	3103066	32,20
44	0,003099	0,996901	96106	298	95957	3006829	31,29
45	0,003587	0,996413	95808	344	95637	2910871	30,38
46	0,004125	0,995875	95465	394	95268	2815235	29,49
47	0,004583	0,995417	95071	436	94853	2719967	28,61
48	0,005029	0,994971	94635	476	94397	2625113	27,74
49	0,005518	0,994482	94159	520	93900	2530716	26,88
50	0,006209	0,993791	93640	581	93349	2436816	26,02
51	0,006913	0,993087	93059	643	92737	2343467	25,18

věk x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
52	0,007796	0,992204	92415	720	92055	2250730	24,35
53	0,008875	0,991125	91695	814	91288	2158675	23,54
54	0,009620	0,990380	90881	874	90444	2067388	22,75
55	0,010433	0,989567	90007	939	89537	1976944	21,96
56	0,011277	0,988723	89068	1004	88565	1887407	21,19
57	0,011871	0,988129	88063	1045	87541	1798841	20,43
58	0,012918	0,987082	87018	1124	86456	1711301	19,67
59	0,014344	0,985656	85894	1232	85278	1624845	18,92
60	0,016186	0,983814	84662	1370	83977	1539567	18,18
61	0,018030	0,981970	83291	1502	82540	1455591	17,48
62	0,019815	0,980185	81790	1621	80979	1373050	16,79
63	0,021083	0,978917	80169	1690	79324	1292071	16,12
64	0,022152	0,977848	78479	1738	77610	1212747	15,45
65	0,023548	0,976452	76740	1807	75837	1135138	14,79
66	0,025503	0,974497	74933	1911	73978	1059301	14,14
67	0,027935	0,972065	73022	2040	72002	985323	13,49
68	0,030428	0,969572	70982	2160	69902	913321	12,87
69	0,032720	0,967280	68823	2252	67697	843418	12,25
70	0,035057	0,964943	66571	2334	65404	775722	11,65
71	0,037918	0,962082	64237	2436	63019	710318	11,06
72	0,041019	0,958981	61801	2535	60534	647299	10,47
73	0,045818	0,954182	59266	2715	57908	586765	9,90
74	0,050406	0,949594	56551	2850	55125	528857	9,35
75	0,055056	0,944944	53700	2957	52222	473731	8,82
76	0,059605	0,940395	50744	3025	49231	421509	8,31
77	0,066022	0,933978	47719	3151	46144	372278	7,80
78	0,072667	0,927333	44569	3239	42949	326134	7,32
79	0,079768	0,920232	41330	3297	39682	283185	6,85
80	0,088397	0,911603	38033	3362	36352	243503	6,40
81	0,097464	0,902536	34671	3379	32982	207151	5,97
82	0,107255	0,892745	31292	3356	29614	174170	5,57
83	0,119275	0,880725	27936	3332	26270	144556	5,17
84	0,131372	0,868628	24604	3232	22988	118286	4,81
85	0,145264	0,854736	21371	3105	19819	95298	4,46
86	0,158943	0,841057	18267	2903	16815	75479	4,13
87	0,175167	0,824833	15364	2691	14018	58664	3,82
88	0,192938	0,807062	12672	2445	11450	44646	3,52
89	0,212355	0,787645	10227	2172	9141	33196	3,25
90	0,233514	0,766486	8056	1881	7115	24054	2,99
91	0,256500	0,743500	6174	1584	5383	16939	2,74
92	0,281386	0,718614	4591	1292	3945	11557	2,52
93	0,308228	0,691772	3299	1017	2791	7612	2,31
94	0,337055	0,662945	2282	769	1898	4821	2,11
95	0,367868	0,632132	1513	557	1235	2924	1,93
96	0,400628	0,599372	956	383	765	1689	1,77
97	0,435253	0,564747	573	249	448	925	1,61
98	0,471605	0,528395	324	153	247	476	1,47
99	0,509488	0,490512	171	87	127	229	1,34
100	0,548640	0,451360	84	46	61	101	1,21
101	0,588728	0,411272	38	22	27	40	1,06
102	0,629352	0,370648	16	10	11	14	0,87
103	1,000000	0,000000	6	6	3	3	0,50

Příloha 2

Podrobné úmrtnostní tabulky za ČR v roce 2006 – ženy

věk x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	0,002691	0,997309	100000	269	99752	7967177	79,67
1	0,000246	0,999754	99731	25	99719	7867424	78,89
2	0,000300	0,999700	99706	30	99691	7767706	77,91
3	0,000066	0,999934	99676	7	99673	7668014	76,93
4	0,000092	0,999908	99670	9	99665	7568341	75,93
5	0,000068	0,999932	99661	7	99657	7468676	74,94
6	0,000091	0,999909	99654	9	99649	7369018	73,95
7	0,000092	0,999908	99645	9	99640	7269369	72,95
8	0,000103	0,999897	99636	10	99631	7169729	71,96
9	0,000106	0,999894	99625	11	99620	7070098	70,97
10	0,000078	0,999922	99615	8	99611	6970478	69,97
11	0,000069	0,999931	99607	7	99604	6870867	68,98
12	0,000050	0,999950	99600	5	99598	6771263	67,98
13	0,000060	0,999940	99595	6	99592	6671666	66,99
14	0,000078	0,999922	99589	8	99585	6572073	65,99
15	0,000112	0,999888	99581	11	99576	6472488	65,00
16	0,000155	0,999845	99570	15	99563	6372912	64,00
17	0,000187	0,999813	99555	19	99546	6273349	63,01
18	0,000231	0,999769	99536	23	99525	6173804	62,03
19	0,000265	0,999735	99513	26	99500	6074279	61,04
20	0,000247	0,999753	99487	25	99475	5974779	60,06
21	0,000242	0,999758	99462	24	99450	5875304	59,07
22	0,000278	0,999722	99438	28	99425	5775854	58,08
23	0,000288	0,999712	99411	29	99396	5676429	57,10
24	0,000272	0,999728	99382	27	99369	5577033	56,12
25	0,000247	0,999753	99355	25	99343	5477664	55,13
26	0,000213	0,999787	99330	21	99320	5378321	54,15
27	0,000220	0,999780	99309	22	99298	5279002	53,16
28	0,000293	0,999707	99287	29	99273	5179703	52,17
29	0,000362	0,999638	99258	36	99240	5080430	51,18
30	0,000362	0,999638	99222	36	99204	4981190	50,20
31	0,000351	0,999649	99186	35	99169	4881986	49,22
32	0,000376	0,999624	99152	37	99133	4782817	48,24
33	0,000423	0,999577	99114	42	99093	4683684	47,26
34	0,000507	0,999493	99072	50	99047	4584590	46,28
35	0,000581	0,999419	99022	58	98993	4485543	45,30
36	0,000614	0,999386	98965	61	98934	4386550	44,32
37	0,000680	0,999320	98904	67	98870	4287615	43,35
38	0,000773	0,999227	98837	76	98798	4188745	42,38
39	0,000866	0,999134	98760	86	98717	4089947	41,41
40	0,000999	0,999001	98675	99	98625	3991230	40,45
41	0,001120	0,998880	98576	110	98521	3892604	39,49
42	0,001282	0,998718	98466	126	98402	3794084	38,53
43	0,001402	0,998598	98339	138	98270	3695681	37,58
44	0,001477	0,998523	98201	145	98129	3597411	36,63
45	0,001615	0,998385	98056	158	97977	3499282	35,69
46	0,001815	0,998185	97898	178	97809	3401304	34,74
47	0,002044	0,997956	97720	200	97621	3303495	33,81
48	0,002276	0,997724	97521	222	97410	3205875	32,87
49	0,002355	0,997645	97299	229	97184	3108465	31,95
50	0,002568	0,997432	97070	249	96945	3011281	31,02

věk x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
51	0,002907	0,997093	96820	281	96680	2914336	30,10
52	0,003247	0,996753	96539	313	96382	2817656	29,19
53	0,003614	0,996386	96225	348	96052	2721274	28,28
54	0,004076	0,995924	95878	391	95682	2625222	27,38
55	0,004364	0,995636	95487	417	95279	2529540	26,49
56	0,004840	0,995160	95070	460	94840	2434261	25,60
57	0,005361	0,994639	94610	507	94356	2339421	24,73
58	0,005768	0,994232	94103	543	93831	2245065	23,86
59	0,006261	0,993739	93560	586	93267	2151233	22,99
60	0,007100	0,992900	92974	660	92644	2057966	22,13
61	0,007875	0,992125	92314	727	91951	1965322	21,29
62	0,008758	0,991242	91587	802	91186	1873371	20,45
63	0,009542	0,990458	90785	866	90352	1782185	19,63
64	0,010302	0,989698	89919	926	89456	1691833	18,82
65	0,010971	0,989029	88992	976	88504	1602377	18,01
66	0,011996	0,988004	88016	1056	87488	1513873	17,20
67	0,013185	0,986815	86960	1147	86387	1426385	16,40
68	0,014516	0,985484	85814	1246	85191	1339998	15,62
69	0,015628	0,984372	84568	1322	83907	1254807	14,84
70	0,017707	0,982293	83246	1474	82509	1170899	14,07
71	0,019938	0,980062	81772	1630	80957	1088390	13,31
72	0,022487	0,977513	80142	1802	79241	1007433	12,57
73	0,025550	0,974450	78340	2002	77339	928192	11,85
74	0,028781	0,971219	76338	2197	75240	850852	11,15
75	0,032492	0,967508	74141	2409	72937	775613	10,46
76	0,036931	0,963069	71732	2649	70408	702676	9,80
77	0,042050	0,957950	69083	2905	67631	632268	9,15
78	0,047605	0,952395	66178	3150	64603	564637	8,53
79	0,053895	0,946105	63028	3397	61329	500034	7,93
80	0,061185	0,938815	59631	3649	57807	438705	7,36
81	0,069370	0,930630	55982	3883	54041	380898	6,80
82	0,078804	0,921196	52099	4106	50046	326858	6,27
83	0,089242	0,910758	47993	4283	45852	276812	5,77
84	0,102334	0,897666	43710	4473	41474	230960	5,28
85	0,116487	0,883513	39237	4571	36952	189486	4,83
86	0,133446	0,866554	34667	4626	32353	152535	4,40
87	0,151935	0,848065	30040	4564	27758	120181	4,00
88	0,172805	0,827195	25476	4402	23275	92423	3,63
89	0,196275	0,803725	21074	4136	19006	69148	3,28
90	0,222562	0,777438	16938	3770	15053	50142	2,96
91	0,251862	0,748138	13168	3316	11510	35089	2,66
92	0,284338	0,715662	9851	2801	8451	23580	2,39
93	0,320106	0,679894	7050	2257	5922	15129	2,15
94	0,359207	0,640793	4793	1722	3933	9207	1,92
95	0,401588	0,598412	3072	1234	2455	5274	1,72
96	0,447071	0,552929	1838	822	1427	2820	1,53
97	0,495329	0,504671	1016	503	765	1392	1,37
98	0,545860	0,454140	513	280	373	628	1,22
99	0,597971	0,402029	233	139	163	255	1,09
100	0,650774	0,349226	94	61	63	92	0,98
101	0,703201	0,296799	33	23	21	28	0,87
102	0,754049	0,245951	10	7	6	7	0,75
103	1,000000	0,000000	2	2	1	1	0,50

Příloha 3

Podrobné úmrtnostní tabulky za ČR v roce 2003 – unisex

věk x	l_x	d_x	p_x	q_x	L_x	T_x	e_x
0	100000	390	0,9961000000	0,0039000000	99 642	7 507 506	75,08
1	99610	36	0,9996385905	0,0003614095	99 592	7 407 865	74,37
2	99574	20	0,9997991444	0,0002008556	99 564	7 308 273	73,40
3	99554	25	0,9997488800	0,0002511200	99 541	7 208 709	72,41
4	99529	14	0,9998593375	0,0001406625	99 522	7 109 168	71,43
5	99515	13	0,9998693664	0,0001306336	99 509	7 009 646	70,44
6	99502	11	0,9998894495	0,0001105505	99 497	6 910 137	69,45
7	99491	13	0,9998693349	0,0001306651	99 484	6 810 640	68,45
8	99478	16	0,9998391604	0,0001608396	99 470	6 711 156	67,46
9	99462	15	0,9998491886	0,0001508114	99 454	6 611 686	66,47
10	99447	14	0,9998592215	0,0001407785	99 440	6 512 232	65,48
11	99433	14	0,9998592017	0,0001407983	99 426	6 412 792	64,49
12	99419	16	0,9998390650	0,0001609350	99 411	6 313 365	63,50
13	99403	19	0,9998088589	0,0001911411	99 394	6 213 954	62,51
14	99384	20	0,9997987604	0,0002012396	99 374	6 114 560	61,52
15	99364	25	0,9997483998	0,0002516002	99 352	6 015 186	60,54
16	99339	29	0,9997080703	0,0002919297	99 325	5 915 835	59,55
17	99310	43	0,9995670124	0,0004329876	99 288	5 816 510	58,57
18	99267	52	0,9994761603	0,0005238397	99 241	5 717 222	57,59
19	99215	58	0,9994154110	0,0005845890	99 186	5 617 981	56,62
20	99157	62	0,9993747290	0,0006252710	99 126	5 518 796	55,66
21	99095	63	0,9993642464	0,0006357536	99 064	5 419 669	54,69
22	99032	67	0,9993234510	0,0006765490	98 999	5 320 606	53,73
23	98965	71	0,9992825746	0,0007174254	98 930	5 221 607	52,76
24	98894	69	0,9993022833	0,0006977167	98 859	5 122 677	51,80
25	98825	67	0,9993220339	0,0006779661	98 791	5 023 818	50,84
26	98758	65	0,9993418255	0,0006581745	98 725	4 925 027	49,87
27	98693	63	0,9993616569	0,0006383431	98 662	4 826 301	48,90
28	98630	67	0,9993206935	0,0006793065	98 597	4 727 640	47,93
29	98563	69	0,9992999401	0,0007000599	98 528	4 629 043	46,97
30	98494	69	0,9992994497	0,0007005503	98 459	4 530 515	46,00
31	98425	76	0,9992278385	0,0007721615	98 387	4 432 055	45,03
32	98349	88	0,9991052273	0,0008947727	98 305	4 333 668	44,06
33	98261	91	0,9990738950	0,0009261050	98 215	4 235 363	43,10
34	98170	104	0,9989406132	0,0010593868	98 118	4 137 148	42,14
35	98066	111	0,9988681092	0,0011318908	98 010	4 039 030	41,19
36	97955	116	0,9988157828	0,0011842172	97 897	3 941 020	40,23
37	97839	127	0,9987019491	0,0012980509	97 775	3 843 123	39,28
38	97712	136	0,9986081546	0,0013918454	97 644	3 745 348	38,33
39	97576	144	0,9985242273	0,0014757727	97 504	3 647 704	37,38
40	97432	162	0,9983373019	0,0016626981	97 351	3 550 200	36,44
41	97270	185	0,9980980775	0,0019019225	97 178	3 452 849	35,50
42	97085	201	0,9979296493	0,0020703507	96 985	3 355 672	34,56
43	96884	219	0,9977395648	0,0022604352	96 774	3 258 687	33,63
44	96665	238	0,9975378886	0,0024621114	96 546	3 161 912	32,71
45	96427	278	0,9971169901	0,0028830099	96 288	3 065 366	31,79
46	96149	320	0,9966718323	0,0033281677	95 989	2 969 078	30,88
47	95829	362	0,9962224379	0,0037775621	95 648	2 873 089	29,98
48	95467	390	0,9959148187	0,0040851813	95 272	2 777 441	29,09
49	95077	426	0,9955194211	0,0044805789	94 864	2 682 169	28,21
50	94651	472	0,9950132592	0,0049867408	94 415	2 587 305	27,34
51	94179	525	0,9944255089	0,0055744911	93 917	2 492 891	26,47

věk x	l_x	d_x	p_x	q_x	L_x	T_x	e_x
52	93654	575	0,9938603797	0,0061396203	93 367	2 398 974	25,62
53	93079	633	0,9931993253	0,0068006747	92 762	2 305 607	24,77
54	92446	685	0,9925902689	0,0074097311	92 103	2 212 845	23,94
55	91761	738	0,9919573675	0,0080426325	91 392	2 120 742	23,11
56	91023	805	0,9911560814	0,0088439186	90 621	2 029 350	22,29
57	90218	884	0,9902015119	0,0097984881	89 776	1 938 729	21,49
58	89334	968	0,9891642600	0,0108357400	88 850	1 848 953	20,70
59	88366	1 047	0,9881515515	0,0118484485	87 842	1 760 103	19,92
60	87319	1 109	0,9872994423	0,0127005577	86 764	1 672 261	19,15
61	86210	1 177	0,9863472915	0,0136527085	85 621	1 585 496	18,39
62	85033	1 242	0,9853939059	0,0146060941	84 412	1 499 875	17,64
63	83791	1 302	0,9844613383	0,0155386617	83 140	1 415 463	16,89
64	82489	1 400	0,9830280401	0,0169719599	81 789	1 332 323	16,15
65	81089	1 508	0,9814031496	0,0185968504	80 335	1 250 534	15,42
66	79581	1 618	0,9796685138	0,0203314862	78 772	1 170 200	14,70
67	77963	1 746	0,9776047612	0,0223952388	77 090	1 091 428	14,00
68	76217	1 875	0,9753991892	0,0246008108	75 280	1 014 337	13,31
69	74342	1 995	0,9731645638	0,0268354362	73 345	939 058	12,63
70	72347	2 124	0,9706414917	0,0293585083	71 285	865 713	11,97
71	70223	2 247	0,9680019367	0,0319980633	69 099	794 428	11,31
72	67976	2 371	0,9651200424	0,0348799576	66 790	725 328	10,67
73	65605	2 526	0,9614968371	0,0385031629	64 342	658 538	10,04
74	63079	2 751	0,9563880214	0,0436119786	61 703	594 196	9,42
75	60328	2 966	0,9508354330	0,0491645670	58 845	532 493	8,83
76	57362	3 188	0,9444231373	0,0555768627	55 768	473 648	8,26
77	54174	3 359	0,9379960867	0,0620039133	52 495	417 880	7,71
78	50815	3 524	0,9306503985	0,0693496015	49 053	365 385	7,19
79	47291	3 683	0,9221204880	0,0778795120	45 450	316 332	6,69
80	43608	3 817	0,9124701890	0,0875298110	41 700	270 882	6,21
81	39791	3 928	0,9012842100	0,0987157900	37 827	229 182	5,76
82	35863	3 967	0,8893846025	0,1106153975	33 879	191 355	5,34
83	31896	3 925	0,8769438174	0,1230561826	29 933	157 476	4,94
84	27971	3 828	0,8631439705	0,1368560295	26 057	127 543	4,56
85	24143	3 673	0,8478648055	0,1521351945	22 306	101 487	4,20
86	20470	3 460	0,8309721544	0,1690278456	18 740	79 181	3,87
87	17010	3 192	0,8123456790	0,1876543210	15 414	60 441	3,55
88	13818	2 875	0,7919380518	0,2080619482	12 380	45 027	3,26
89	10943	2 523	0,7694416522	0,2305583478	9 681	32 646	2,98
90	8420	2 147	0,7450118765	0,2549881235	7 346	22 965	2,73
91	6273	1 767	0,7183165949	0,2816834051	5 389	15 619	2,49
92	4506	1 400	0,6893031514	0,3106968486	3 806	10 230	2,27
93	3106	1 061	0,6584030908	0,3415969092	2 575	6 424	2,07
94	2045	767	0,6249388753	0,3750611247	1 661	3 848	1,88
95	1278	525	0,5892018779	0,4107981221	1 015	2 187	1,71
96	753	338	0,5511288181	0,4488711819	584	1 172	1,56
97	415	202	0,5132530120	0,4867469880	314	588	1,41
98	213	113	0,4694835681	0,5305164319	156	274	1,29
99	100	57	0,4300000000	0,5700000000	72	117	1,17
100	43	26	0,3953488372	0,6046511628	30	46	1,06
101	17	11	0,3529411765	0,6470588235	11	16	0,96
102	6	4	0,3333333333	0,6666666667	4	5	0,84
103	2	2	0,0000000000	1,0000000000	1	1	0,63

Příloha 4

Komutační čísla pro úmrtnostní tabulky za ČR v roce 2003 – unisex (technická úroková míra 2%)

věk x	D_x	C_x	N_x	M_x	S_x	R_x
0	100 000,00	382,35	3 902 459,52	23 481,19	114 847 322,32	1 650 551,24
1	97 656,86	34,60	3 802 459,52	23 098,83	110 944 862,80	1 627 070,06
2	95 707,42	18,85	3 704 802,66	23 064,23	107 142 403,28	1 603 971,22
3	93 811,96	23,10	3 609 095,24	23 045,38	103 437 600,62	1 580 906,99
4	91 949,41	12,68	3 515 283,28	23 022,29	99 828 505,38	1 557 861,61
5	90 133,80	11,54	3 423 333,87	23 009,61	96 313 222,10	1 534 839,32
6	88 354,93	9,58	3 333 200,07	22 998,06	92 889 888,23	1 511 829,71
7	86 612,90	11,10	3 244 845,14	22 988,49	89 556 688,16	1 488 831,65
8	84 903,52	13,39	3 158 232,24	22 977,39	86 311 843,02	1 465 843,16
9	83 225,35	12,31	3 073 328,72	22 964,00	83 153 610,78	1 442 865,77
10	81 581,18	11,26	2 990 103,37	22 951,70	80 080 282,06	1 419 901,76
11	79 970,29	11,04	2 908 522,19	22 940,44	77 090 178,69	1 396 950,06
12	78 391,20	12,37	2 828 551,91	22 929,40	74 181 656,50	1 374 009,62
13	76 841,75	14,40	2 750 160,70	22 917,03	71 353 104,59	1 351 080,22
14	75 320,65	14,86	2 673 318,95	22 902,63	68 602 943,89	1 328 163,19
15	73 828,92	18,21	2 597 998,30	22 887,77	65 929 624,94	1 305 260,56
16	72 363,08	20,71	2 524 169,38	22 869,56	63 331 626,64	1 282 372,78
17	70 923,48	30,11	2 451 806,30	22 848,85	60 807 457,26	1 259 503,22
18	69 502,72	35,69	2 380 882,82	22 818,74	58 355 650,95	1 236 654,37
19	68 104,23	39,03	2 311 380,10	22 783,05	55 974 768,13	1 213 835,63
20	66 729,82	40,91	2 243 275,87	22 744,02	53 663 388,03	1 191 052,58
21	65 380,48	40,75	2 176 546,05	22 703,11	51 420 112,16	1 168 308,56
22	64 057,76	42,49	2 111 165,57	22 662,36	49 243 566,10	1 145 605,45
23	62 759,24	44,14	2 047 107,81	22 619,87	47 132 400,54	1 122 943,09
24	61 484,52	42,06	1 984 348,57	22 575,73	45 085 292,73	1 100 323,22
25	60 236,89	40,04	1 922 864,04	22 533,67	43 100 944,16	1 077 747,49
26	59 015,74	38,08	1 862 627,15	22 493,63	41 178 080,12	1 055 213,82
27	57 820,48	36,19	1 803 611,42	22 455,55	39 315 452,97	1 032 720,18
28	56 650,56	37,73	1 745 790,93	22 419,37	37 511 841,55	1 010 264,63
29	55 502,04	38,09	1 689 140,37	22 381,64	35 766 050,62	987 845,26
30	54 375,67	37,35	1 633 638,33	22 343,55	34 076 910,25	965 463,62
31	53 272,13	40,33	1 579 262,66	22 306,20	32 443 271,91	943 120,08
32	52 187,25	45,78	1 525 990,53	22 265,87	30 864 009,25	920 813,88
33	51 118,20	46,41	1 473 803,27	22 220,09	29 338 018,72	898 548,01
34	50 069,47	52,00	1 422 685,08	22 173,68	27 864 215,45	876 327,91
35	49 035,71	54,41	1 372 615,61	22 121,68	26 441 530,37	854 154,23
36	48 019,81	55,75	1 323 579,91	22 067,26	25 068 914,75	832 032,56
37	47 022,49	59,84	1 275 560,10	22 011,51	23 745 334,84	809 965,30
38	46 040,64	62,82	1 228 537,60	21 951,67	22 469 774,75	787 953,79
39	45 075,06	65,22	1 182 496,96	21 888,84	21 241 237,14	766 002,12
40	44 126,02	71,93	1 137 421,90	21 823,63	20 058 740,18	744 113,27
41	43 188,87	80,53	1 093 295,88	21 751,70	18 921 318,28	722 289,64
42	42 261,50	85,78	1 050 107,01	21 671,17	17 828 022,39	700 537,94
43	41 347,06	91,63	1 007 845,51	21 585,39	16 777 915,38	678 866,78
44	40 444,71	97,63	966 498,45	21 493,76	15 770 069,87	657 281,39
45	39 554,05	111,80	926 053,74	21 396,13	14 803 571,43	635 787,63
46	38 666,68	126,17	886 499,69	21 284,33	13 877 517,69	614 391,50
47	37 782,34	139,93	847 833,01	21 158,17	12 991 018,00	593 107,17
48	36 901,59	147,79	810 050,67	21 018,24	12 143 184,99	571 949,00
49	36 030,23	158,27	773 149,08	20 870,45	11 333 134,32	550 930,76
50	35 165,49	171,92	737 118,85	20 712,17	10 559 985,24	530 060,32

věk x	D_x	C_x	N_x	M_x	S_x	R_x
51	34 304,04	187,48	701 953,37	20 540,25	9 822 866,38	509 348,14
52	33 443,94	201,31	667 649,32	20 352,77	9 120 913,02	488 807,89
53	32 586,87	217,27	634 205,39	20 151,47	8 453 263,70	468 455,12
54	31 730,64	230,51	601 618,52	19 934,20	7 819 058,31	448 303,65
55	30 877,97	243,47	569 887,88	19 703,69	7 217 439,79	428 369,45
56	30 029,05	260,37	539 009,91	19 460,22	6 647 551,91	408 665,76
57	29 179,87	280,31	508 980,87	19 199,86	6 108 542,00	389 205,53
58	28 327,41	300,93	479 800,99	18 919,54	5 599 561,14	370 005,68
59	27 471,04	319,11	451 473,59	18 618,61	5 119 760,15	351 086,13
60	26 613,28	331,38	424 002,55	18 299,51	4 668 286,56	332 467,52
61	25 760,08	344,80	397 389,26	17 968,13	4 244 284,01	314 168,01
62	24 910,18	356,71	371 629,19	17 623,33	3 846 894,75	296 199,88
63	24 065,04	366,61	346 719,01	17 266,63	3 475 265,56	278 576,55
64	23 226,57	386,47	322 653,97	16 900,02	3 128 546,55	261 309,92
65	22 384,67	408,12	299 427,40	16 513,55	2 805 892,58	244 409,90
66	21 537,64	429,31	277 042,73	16 105,43	2 506 465,18	227 896,35
67	20 686,02	454,18	255 505,09	15 676,12	2 229 422,45	211 790,92
68	19 826,23	478,18	234 819,07	15 221,94	1 973 917,36	196 114,80
69	18 959,30	498,81	214 992,83	14 743,76	1 739 098,30	180 892,87
70	18 088,75	520,65	196 033,53	14 244,95	1 524 105,46	166 149,11
71	17 213,42	540,00	177 944,78	13 724,31	1 328 071,93	151 904,16
72	16 335,91	558,62	160 731,36	13 184,31	1 150 127,15	138 179,85
73	15 456,97	583,47	144 395,46	12 625,69	989 395,79	124 995,54
74	14 570,42	622,99	128 938,48	12 042,22	845 000,33	112 369,85
75	13 661,74	658,50	114 368,06	11 419,23	716 061,85	100 327,64
76	12 735,36	693,91	100 706,32	10 760,73	601 693,78	88 908,41
77	11 791,73	716,80	87 970,96	10 066,81	500 987,46	78 147,68
78	10 843,73	737,26	76 179,23	9 350,02	413 016,50	68 080,87
79	9 893,84	755,42	65 335,50	8 612,75	336 837,27	58 730,85
80	8 944,43	767,55	55 441,66	7 857,33	271 501,77	50 118,10
81	8 001,49	774,39	46 497,24	7 089,78	216 060,11	42 260,76
82	7 070,21	766,74	38 495,75	6 315,40	169 562,87	35 170,98
83	6 164,84	743,75	31 425,53	5 548,66	131 067,12	28 855,59
84	5 300,22	711,14	25 260,69	4 804,91	99 641,59	23 306,93
85	4 485,15	668,97	19 960,47	4 093,76	74 380,90	18 502,02
86	3 728,23	617,82	15 475,33	3 424,80	54 420,43	14 408,26
87	3 037,31	558,79	11 747,09	2 806,98	38 945,10	10 983,46
88	2 418,97	493,43	8 709,78	2 248,19	27 198,01	8 176,49
89	1 878,11	424,52	6 290,81	1 754,76	18 488,23	5 928,30
90	1 416,76	354,17	4 412,70	1 330,24	12 197,41	4 173,54
91	1 034,81	285,77	2 995,94	976,06	7 784,71	2 843,30
92	728,74	221,98	1 961,13	690,29	4 788,77	1 867,24
93	492,48	164,93	1 232,39	468,31	2 827,63	1 176,95
94	317,89	116,89	739,91	303,38	1 595,24	708,63
95	194,77	78,44	422,02	186,49	855,33	405,25
96	112,51	49,51	227,26	108,05	433,30	218,76
97	60,79	29,01	114,75	58,54	206,05	110,71
98	30,59	15,91	53,96	29,53	91,30	52,17
99	14,08	7,87	23,37	13,62	37,34	22,64
100	5,94	3,52	9,29	5,75	13,97	9,02
101	2,30	1,46	3,36	2,23	4,67	3,27
102	0,80	0,52	1,06	0,78	1,32	1,03
103	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26

MASARYKOVA UNIVERZITA
EKONOMICKO-SPRÁVNÍ FAKULTA
Katedra financí

Ing. Petr Valouch
vedoucí katedry

Pojistná matematika I

Mgr. Petr Červinek

Vydala Masarykova univerzita roku 2008

1. vydání, 2008, náklad 25 výtisků
Tisk: Olprint, Jaroslav Olejko, Šlapanice, Brněnská 252/29
AA – 4,65 VA – 4,80 73 stran
Pořadové číslo 4628/ESF-1/08-17/99
ISBN 978-80-210-4532-3