

Zadání příkladů

Příklad 1: Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete matice

a) $2\mathbf{A} - \mathbf{B}^\top$, b) $(\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, c) $\mathbf{C}^\top \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

Příklad 2: V prostoru \mathbb{V}_4 jsou dány vektory

$\mathbf{a} = (1, 0, 5, 8)$, $\mathbf{b} = (2, 4, 6, -2)$, $\mathbf{c} = (5, 3, 0, 7)$, $\mathbf{d} = (-4, 6, 18, -20)$ a $\mathbf{e} = (3, -1, -6, 9)$.

a) Jsou vektory \mathbf{a} , \mathbf{d} , \mathbf{e} lineárně nezávislé?

b) Generují vektory \mathbf{b} , \mathbf{c} stejný podprostor ve \mathbb{V}_4 jako vektory \mathbf{d} , \mathbf{e} ?

c) Označme \mathbb{Q} podprostor ve \mathbb{V}_4 generovaný vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Určete dimenzi tohoto podprostoru a najděte některou jeho bázi.

Příklad 3: Je dána matice

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Pomocí Jordanovy metody najděte inverzní matici \mathbf{A}^{-1} .

Příklad 4: Je dána matice

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -20 & 36 \\ 5 & 15 & -25 & 40 \\ -3 & -11 & 19 & -39 \\ 4 & 16 & -24 & 40 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -5 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Určete hodnotu determinantu $\det(\mathbf{A})$.

Příklad 5: Je dán systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad & 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 1 \\ & 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 8 \\ & -2x_1 - 3x_2 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad & 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ & -4x_1 + 3x_2 = -8 \\ & 7x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -1 \end{aligned}$$

Řešte systém pomocí Cramerova pravidla.

Příklad 6: Najděte všechna řešení homogenního systému s maticí soustavy

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & -6 \\ 10 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7: Je dán systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5 \\
& \qquad \qquad 6x_2 \qquad \qquad - 5x_4 = -5 \\
& 3x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad \qquad = 1 \\
& 4x_1 \qquad \qquad + 8x_3 - x_4 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -7 \\
& 7x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 6x_4 = -3 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\
& \qquad - 3x_2 - 4x_3 \qquad \qquad = 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad & \qquad \qquad 4x_2 - 24x_3 - 4x_4 = 8 \\
& -4x_1 - 4x_2 + 36x_3 + 4x_4 = -4 \\
& \qquad 3x_1 + 3x_2 - 27x_3 - 4x_4 = -4 \\
& 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 = 0
\end{aligned}$$

Řešte systém Gaussovou metodou.

Příklad 8: Je dána matice

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice \mathbf{A} .

Výsledky

Příklad 1:

$$\text{a) } 2\mathbf{A} - \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } (\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ 3 & 22 \\ 1 & -20 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{C}^\top \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -28 & 6 & -8 \\ -10 & -2 & -18 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2:

- a) ano
- b) ano
- c) $\dim(\mathbb{Q}) = 3$, bázi jsou například vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c}

Příklad 3:

$$\text{a) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4: a) $\det(\mathbf{A}) = -44$, b) $\det(\mathbf{A}) = 480$, c) $\det(\mathbf{A}) = 80$.

Příklad 5: a) $\mathbf{x} = (2, 0, -1)^\top$, b) $\mathbf{x} = (2, 0, -3)^\top$.

Příklad 6:

- a) $p \cdot (1, 3, 5, 7)^\top + q \cdot (2, 0, 8, 6)^\top$, $p, q \in \mathbb{R}$,
- b) $p \cdot (1, -1, -1, 1)^\top + q \cdot (1, -2, 1, 0)^\top$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Příklad 7:

- a) $\mathbf{x} = (2, 5, 0, 7)^\top$, b) $\mathbf{x} = (2, -1, -1, 0)^\top$, c) $\mathbf{x} = (-7, -3, -2, 7)^\top$.

Příklad 8:

- a) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 1)^\top$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{x}_2 = (-3, 0, 2)^\top$, $\lambda_3 = -1$, $\mathbf{x}_3 = (1, 0, -1)^\top$,
- b) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}_1 = (0, 0, 1)^\top$, $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{x}_2 = (-16, 20, 1)^\top$, $\lambda_3 = -1$, $\mathbf{x}_3 = (1, 0, -1)^\top$.