Zadání příkladů

Příklad 1: Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete matice

a) $2\mathbf{A} - \mathbf{B}^\top$, b) $(\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, c) $\mathbf{C}^\top \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

Příklad 2: V prostoru $\mathbb{V}_4$ jsou dány vektory
$\mathbf{a} = (1,\ 0,\ 5,\ 8)$, $\mathbf{b} = (2,\ 4,\ 6,\ -2)$, $\mathbf{c} = (5,\ 3,\ 0,\ 7)$, $\mathbf{d} = (-4,\ 6,\ 18,\ -20)$ a $\mathbf{e} = (3,\ -1,\ -6,\ 9)$.
a) Jsou vektory $\mathbf{a},\ \mathbf{d},\ \mathbf{e}$ lineárně nezávislé?
b) Generují vektory $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ stejný podprostor ve $\mathbb{V}_4$ jako vektory $\mathbf{d},\ \mathbf{e}$?
c) Označme $\mathbb{Q}$ podprostor ve $\mathbb{V}_4$ generovaný vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Určete dimenzi tohoto podprostoru a najděte některou jeho bázi.

Příklad 3: Je dána matice

a) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

b) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Jordanovy metody najděte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad 4: Je dána matice

a) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -20 & 36 \\ 5 & 15 & -25 & 40 \\ -3 & -11 & 19 & -39 \\ 4 & 16 & -24 & 40 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -5 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Určete hodnotu determinantu $det(\mathbf{A})$.

Příklad 5: Je dán systém lineárních rovnic

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -4 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & & & = & -8 \\ 7x_1 & - & 8x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \end{array}$$

Řešte systém pomocí Cramerova pravidla.

Příklad 6: Najděte všechna řešení homogenního systému s maticí soustavy

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & -6 \\ 10 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Příklad 7: Je dán systém lineárních rovnic a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & + & 7x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ & & 6x_2 & & & - & 5x_4 & = & -5 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 4x_1 & & & + & 8x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & = & -7 \\ 7x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 6x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ & - & 3x_2 & - & 4x_3 & & & = & 7 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 4_2 & - & 24x_3 & - & 4x_4 & = & 8 \\ -4x_1 & - & 4x_2 & + & 36x_3 & + & 4x_4 & = & -4 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 27x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

Řešte systém Gaussovou metodou.

Příklad 8: Je dána matice

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$b)\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$.

Výsledky

Příklad 1:

$$\text{a) } 2\mathbf{A} - \mathbf{B}^\top = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix},$$

b) $(\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ 3 & 22 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{C}^\top \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -28 & 6 & -8 \\ -10 & -2 & -18 \end{pmatrix}$.

Příklad 2:
a) ano
b) ano
c) $dim(\mathbb{Q}) = 3$, bází jsou například vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$

Příklad 3:

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Příklad 4: a) $det(\mathbf{A}) = -44$, b) $det(\mathbf{A}) = 480$, c) $det(\mathbf{A}) = 80$.

Příklad 5: a) $\mathbf{x} = (2,\ 0,\ -1)^\top$, b) $\mathbf{x} = (2,\ 0,\ -3)^\top$.

Příklad 6:
a) $p.(1,3,5,7)^\top + q.(2,0,8,6)^\top,\ p,q \in \mathbb{R}$,
b) $p.(1,-1,-1,1)^\top + q.(1,-2,1,0)^\top,\ p,q \in \mathbb{R}$.

Příklad 7:
a) $\mathbf{x} = (2,\ 5,\ 0,\ 7)^\top$, b) $\mathbf{x} = (2,\ -1,\ -1,\ 0)^\top$, c) $\mathbf{x} = (-7,\ -3,\ -2,\ 7)^\top$.

Příklad 8:
a) $\lambda_1 = 3,\ \mathbf{x}_1 = (0,1,1)^\top,\ \lambda_2 = 0,\ \mathbf{x}_2 = (-3,0,2)^\top,\ \lambda_3 = -1,\ \mathbf{x}_3 = (1,0,-1)^\top$,
b) $\lambda_1 = 2,\ \mathbf{x}_1 = (0,0,1)^\top,\ \lambda_2 = -2,\ \mathbf{x}_2 = (-16,20,1)^\top,\ \lambda_3 = -1,\ \mathbf{x}_3 = (1,0,-1)^\top$.