Zadání příkladů

Matice a determinanty, lineární prostory

Blok 1: Počítání s maticemi

Příklad 1: Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určete matice $\mathbf{D} = \mathbf{A}.(\mathbf{B} + \mathbf{C}^\top)$ a $\mathbf{E} = \mathbf{B}.\mathbf{C} + \mathbf{A}^\top$.

Příklad 2: Je dán vektor $\mathbf{b} = (1\ 4\ 2)^\top$ a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete řešení systému $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$, víte-li, že

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 10 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Proveďte zkoušku.

Blok 2: Determinanty

Příklad 3: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Určete hodnotu determinantu $det(\mathbf{A})$.

Příklad 4: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Najděte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad 5: Pomocí Cramerova pravidla najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= -4 \\ -2x_1 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Blok 3: Lineární prostory

Příklad 6: V prostoru $\mathbb{V}_3$ jsou dány vektory $\mathbf{a} = (1, 4, 5)$, $\mathbf{b} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (-1, 3, -2)$ a $\mathbf{d} = (1, 3, -3)$. Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé. Je vektor $\mathbf{a}$ lineární kombinací ostatních?

Příklad 7: V prostoru $\mathbb{V}_4$ je dán podprostor $\mathbb{Q}$ tvořený všemi vektory, které mají součet všech čtyř složek roven nule. Určete dimenzi a najděte nějakou bázi podprostoru $\mathbb{Q}$.

Řešení příkladů

Matice a determinanty, lineární prostory

Blok 1: Počítání s maticemi

Příklad 8: Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \ \text{a} \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{D} = \mathbf{A}.(\mathbf{B} + \mathbf{C}^\top) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 4 \\ -13 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}.\mathbf{C} + \mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} -15 & 7 & 26 \\ 6 & 0 & -16 \\ 3 & 5 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 27 \\ 11 & 0 & -15 \\ 3 & 3 & -19 \end{pmatrix}$$

Příklad 9: Je dán vektor $\mathbf{b} = (1\ 4\ 2)^\top$ a matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení systému $\mathbf{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je dáno vztahem $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b}$, tedy

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 10 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Provedeme zkoušku:

$$L = \mathbf{A}.\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b} = P.$$

Blok 2: Determinanty

Příklad 10: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Určeme hodnotu determinantu $|\mathbf{A}|$ pomocí rozvoje podle druhého řádku:

$$|\mathbf{A}| = (-1)^3.1.\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^6.(-2).\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1.(21 - 10 + 0 - 0 - 0 - 140) - 2.(0 - 9 + 10 + 60 - 4 - 0) = 15.$$

Příklad 11: Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice $\mathbf{A}$ je: $|\mathbf{A}| = 90 + 24 - 21 - (27 + 84 - 20) = 2$. Označme symbolem $\mathbf{B}$ inverzní matici k matici $\mathbf{A}$. Prvky matice $\mathbf{B}$ jsou:

$$b_{1,1} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix},\ b_{2,1} = -\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix},\ b_{3,1} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix},$$

$$b_{1,2} = -\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix},\ b_{2,2} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix},\ b_{3,2} = -\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix},$$

$$b_{1,3} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix},\ b_{2,3} = -\frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\ b_{3,3} = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},$$

takže

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{21}{2} & \frac{-15}{2} \\ -8 & -15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Příklad 12: Pomocí Cramerova pravidla najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= -4 \\ -2x_1 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

Matice soustavy je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -8 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

vektor pravých stran je $\mathbf{b} = (1 \ \ -4 \ 11)^\top$. Determinant matice soustavy je

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -8 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 64 + 0 - (-20 + 0 + 12) = 60,$$

takže můžeme určit řešení $(x_1,\ x_2,\ x_3)^\top$ pomocí Cramerova pravidla:

$$x_1 = \frac{|\mathbf{B_1}|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{60}.\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -4 & -2 & -8 \\ 11 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{60}.[-6 - 352 + 0 - (110 + 0 - 48)] = -7,$$

$$x_2 = \frac{|\mathbf{B_2}|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{60}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -8 \\ -2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{60}.[-24 + 16 - 55 - (-40 - 176 + 3)] = 5/2,$$

$$x_3 = \frac{|\mathbf{B_3}|}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{60}.\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{60}.[-44 + 32 + 0 - (4 + 0 + 44)] = -1.$$

Blok 3: Lineární prostory

Příklad 13: V prostoru $\mathbb{V}_3$ jsou dány vektory $\mathbf{a} = (1, 4, 5)$, $\mathbf{b} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (-1, 3, -2)$ a $\mathbf{d} = (1, 3, -3)$. Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé. Je vektor $\mathbf{a}$ lineární kombinací ostatních?

Řešení: Dimenze prostoru $\mathbb{V}_3$ je rovna 3, tedy v každé skupině vektorů z $\mathbb{V}_3$ jsou maximálně 3 lineárně nezávislé vektory. Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou čtyři, a tudíž jsou lineárně závislé.

Můžeme vektor $\mathbf{a}$ vyjádřit jako kombinaci ostatních? Hledáme koeficienty $c_1,\ c_2,\ c_3$, takové že: $c_1.\mathbf{b} + c_2.\mathbf{c} + c_3.\mathbf{d} = \mathbf{a}$, neboli

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 + c_3 &= 1 \\ 3c_2 + 3c_3 &= 4 \\ -c_1 - 2c_2 - 3c_3 &= 5 \end{aligned}$$

Vyjádříme-li ze třetí rovnice c_1 a dosadíme do první rovnice, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -5c_2 - 5c_3 &= 21 \\ 3c_2 + 3c_3 &= 4, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= -21/5 \\ c_2 + c_3 &= 4/3. \end{aligned}$$

Tato soustava nemá řešení, takže vektor **a** není kombinací ostatních.

Příklad 14: V prostoru $\mathbb{V}_4$ je dán podprostor $\mathbb{Q}$ tvořený všemi vektory, které mají součet všech čtyř složek roven nule. Určete dimenzi a najděte nějakou bázi podprostoru $\mathbb{Q}$.

Řešení: Libovolný vektor $\mathbf{q}$ z podprostoru $\mathbb{Q}$ lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{q} = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ -q_1 - q_2 - q_3)$$

pro nějaká čísla $q_1,\ q_2,\ q_3 \in \mathbb{R}$. Vektor $\mathbf{q}$ můžeme rozepsat jako součet tří vektorů

$$\mathbf{q} = (q_1,\ 0, 0,\ -q_1) + (0,\ q_2,\ 0,\ -q_2) + (\ 0,\ 0,\ q_3,\ -q_3),$$

takže $\mathbf{q}$ je lineární kombinací vektorů $(1,\ 0,\ 0,\ -1)$, $(0,\ 1,\ 0,\ -1)$, $(0,\ 0,\ 1,\ -1)$:

$$\mathbf{q} = q_1.(1,\ 0, 0,\ -1) + q_2.(0,\ 1,\ 0,\ -1) + q_3.(\ 0,\ 0,\ 1,\ -1).$$

Abychom ukázali, že tyto tři vektory tvoří bázi podprostoru $\mathbb{Q}$, stačí ověřit, že jsou lineárně nezávislé:

$$c_1.(1,\ 0, 0,\ -1) + c_2.(0,\ 1,\ 0,\ -1) + c_3.(\ 0,\ 0,\ 1,\ -1) = (0,\ 0,\ 0,\ 0) \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$