**Cviceni k predmetu PMMAT1**
**Cviceni 1 - prubeh funkce jedne promenne**

Pro zjisteni prubehu funkce jedne promenne si zapamatujte nasledujici postup:
1. zjisteni definicniho oboru funkce, oboru hodnot, lichost a sudost funkce, nejmensi perioda funkce, kdy je funkce nad a pod osou x.

2. vypocet prvni derivace, zjisteni, kde je prvni derivace kladna (funkce tam roste), zaporna (funkce klesa), nulova (stacionarni bod - podezrely z extremu).

3. vypocet druhe derivace, zjisteni, kde je druha derivace kladna (funkce je tam konvexni), zaporna (funkce je tam konkavni), nulova (funkce tam ma inflexni bod). Vysetreni take stacionarniho bodu. Pokud je ve stacionarnim bode druha derivace kladna (funkce tam ma minimum), zaporna (funkce tam ma maximum), nulova (funkce tam ma inflexni bod).

4. vysetreni 'nekonecen' a bodu, kde funkce neni definovana, popr urceni asymptot.

5. nakresleni prubehu funkce na zaklade bodu 1. - 4.

Priklad: Vysetrete prubeh funkce $y = \arctan(\frac{x-1}{x})$.
1. Ve jmenovateli nesmi byt nula, jinak je funkce arctan definovana pro vsechna realna cisla (je to vlastne obor hodnot funkce tangens). Dale vysetrujeme sudost nebo lichost. Tedy suda $\arctan(\frac{x-1}{x}) \neq \arctan(\frac{-x-1}{-x})$, ani licha $-\arctan(\frac{x-1}{x}) \neq \arctan(\frac{-x-1}{-x})$ byt nemuze. Nejmensi periodu funkce nema smysle zjistovat. Funkce bude pod osou x jestlize $\frac{x-1}{x} > 0$, tedy pro $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, a pod osou x jestlize $\frac{x-1}{x} < 0$, tedy pro $x \in (0, 1)$. V bode 1 bude prochazet nulou. Pro jistotu prikladam obrazek funkce arctan, tam by ale mela byt znama ze stredni skoly, protoze patri mezi elementarni funkce.

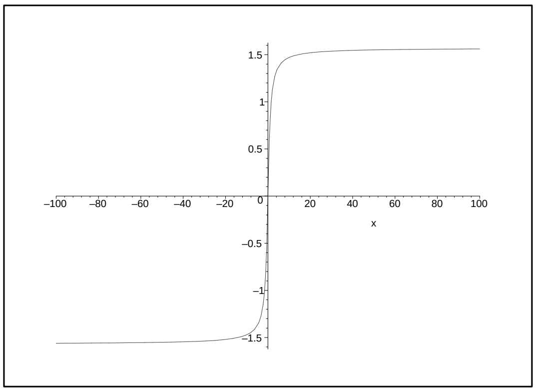


Figure 1: Funkce $f(x) = \arctan(x)$

2.Pocitame prvni derivaci jako slozenou funkci, nejdrive derivujeme arctan, pote vnitrni funkci a dostavame $y' = \frac{1}{1+(\frac{x-1}{x})^2}\frac{x-(x-1)}{x^2} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$. Tato funkce se nikdy nebude rovnat nule, takze extrem nenastava, navic bude vzdy kladna, takze je rostouci v celem definicnim oboru.

3.Pocitame druhou derivaci (jako derivaci prvni derivace) a dostavame $y'' = -\frac{4x-2}{(2x^2-2x+1)^2}$.

Takze tato funkce bude mit inflexni bod v bode $\frac{1}{2}$, pricemz pro $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ bude funkce konvexni (druha derivace je kladna) a pro $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ bude funkce konkavni (druha derivace je zaporna).

4.Zjistujeme limity v nekonecnu a v bode nula, kde funkce neni definovana. Takze $\lim_{x\to 0^-} \arctan(\frac{x-1}{x}) = \lim_{x\to 0^-} \arctan(-1/0^-) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0^+} \arctan(\frac{x-1}{x}) = \lim_{x\to 0^+} \arctan(-1/0^+) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Dale $\lim_{x\to\infty} \arctan(\frac{x-1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \arctan(1^-) = (\frac{\pi}{4})^-$ a $\lim_{x\to-\infty} \arctan(\frac{x-1}{x}) = \lim_{x\to-\infty} \arctan(1^+) = (\frac{\pi}{4})^+$.

5. na zaklade vyse udanych faktu, muzeme nacrtnout graf...

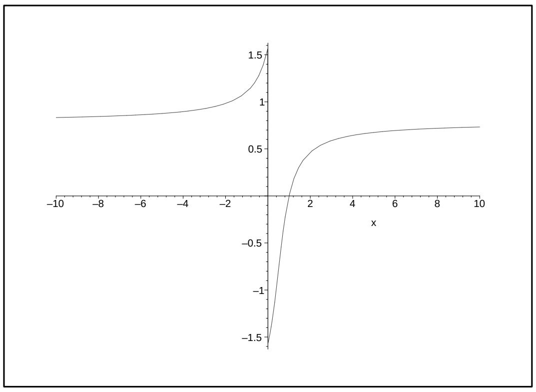


Figure 2: Funkce $f(x) = \arctan((x-1)/x)$

Priklad: Vysetrete prubeh funkce $y = (x^3 - 6x^2)^{\frac{1}{3}}$.
1.definicnim oborem jsou vsechna realna cisla, funkce neni ani suda $((x^3 - 6x^2)^{\frac{1}{3}} \neq ((-x)^3 - 6(-x)^2)^{\frac{1}{3}})$, ani licha $(-(x^3 - 6x^2)^{\frac{1}{3}} \neq ((-x)^3 - 6(-x)^2)^{\frac{1}{3}})$. Nejmensi periodu funkce opet nema smysl zjistovat. Funkce bude pod osou x pro $x^2(x-6) < 0$, tedy pro $x \in (-\infty, 6)$, nad osou pro $x \in (6, \infty)$, v bode 6 bude prochazet nulou.

2.pocitame prvni derivaci tedy $y' = \frac{x(x-4)}{(x^2(x-6))^{\frac{2}{3}}}$, takze funkce bude rostouci pro $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ (prvni derivace je kladna), a klesajici pro $x \in (0, 4)$ (derivace bude zaporna). Body podezrele z extremu jsou 0 a 4.

3.spocetme druhou derivaci, tedy $y'' = -\frac{8}{(x-6)((x^2(x-6))^{\frac{2}{3}}}$, tedy funkce bude konvexni pro $x \in (-\infty, 6)$ a konkavni pro $x \in (6, \infty)$ a bode 6 bude inflexni bod.

4.proverime limity v nekonecnech tedy $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2)^{\frac{1}{3}} = -\infty$ a $\lim_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2)^{\frac{1}{3}} = \infty$. Spocteme jeste asymptoty, tedy funkci $g(x) = ax + b$, kde $a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^3-6x^2)^{\frac{1}{3}}}{x} = (x^3-6x^2)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to-\infty}(1-\frac{6}{x})^{\frac{1}{3}} = 1$. Podobne $\lim_{x\to\infty} \frac{(x^3-6x^2)^{\frac{1}{3}}}{x} = 1$ a dale $b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty}((x^3 - 6x^2)^{\frac{1}{3}} - x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-6x^2-x^3}{(x^3-6x^2)^{\frac{2}{3}}+x(x^3-6x^2)^{\frac{1}{3}}+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x^2}{3x^2} = -2$. Podobne $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = -2$. Asymptota v $\infty$ i v $-\infty$ ma tvar $g(x) = x - 2$.

5. na zaklade vyse zjisteneho dostavame

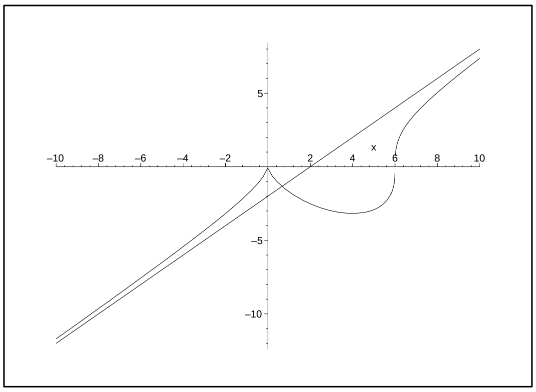


Figure 3: Funkce $f(x) = (x^3 - 6x^2)^{\frac{1}{3}}$ a asymptota $g(x) = x - 2$

Priklady:

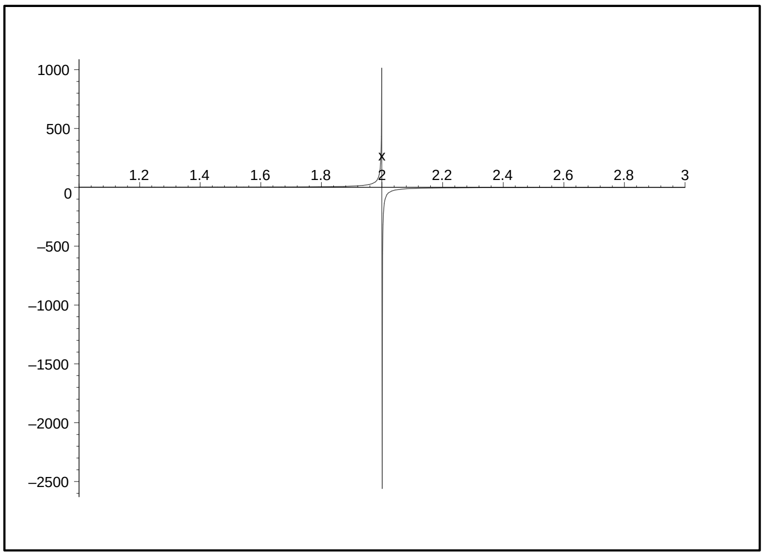


Figure 4: Funkce $f(x) = \frac{1}{2-x}$

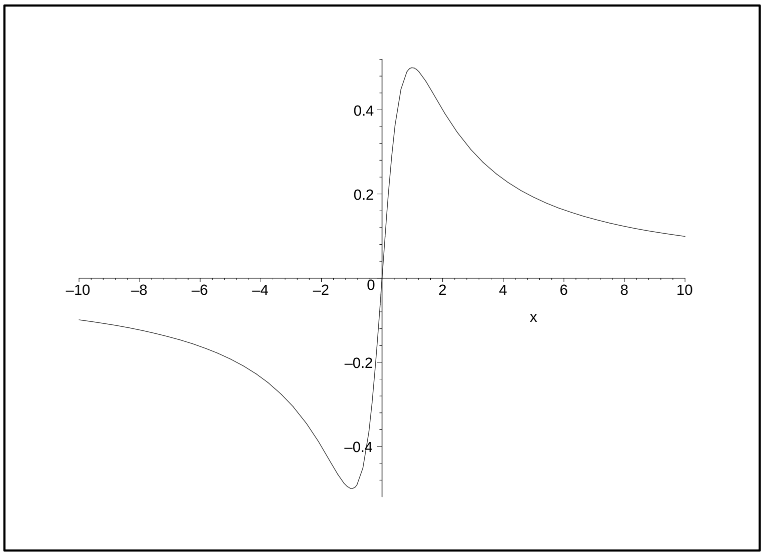


Figure 5: Funkce $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

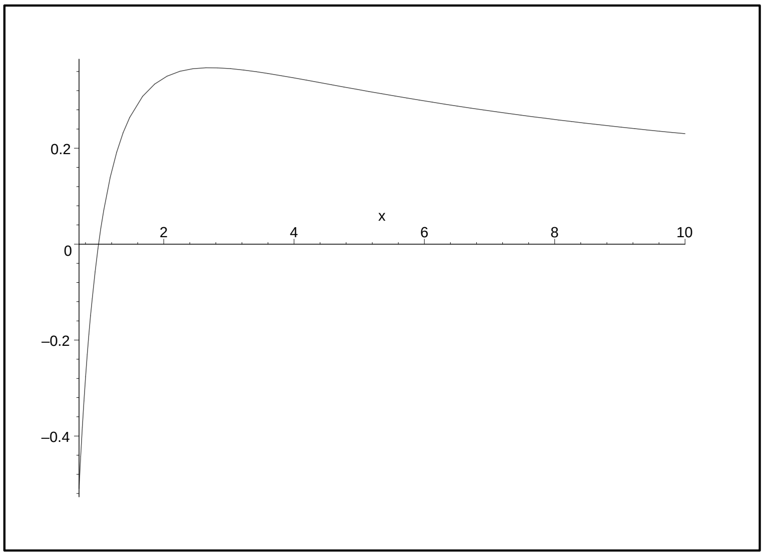


Figure 6: Funkce $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

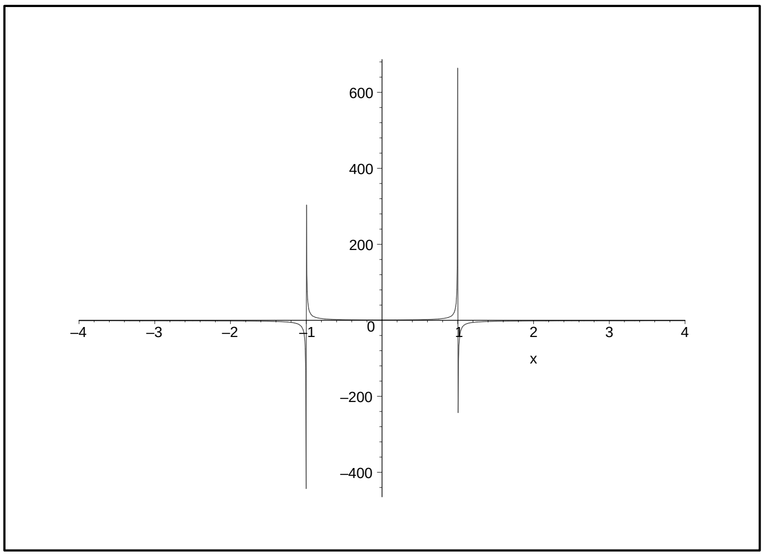


Figure 7: Funkce $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

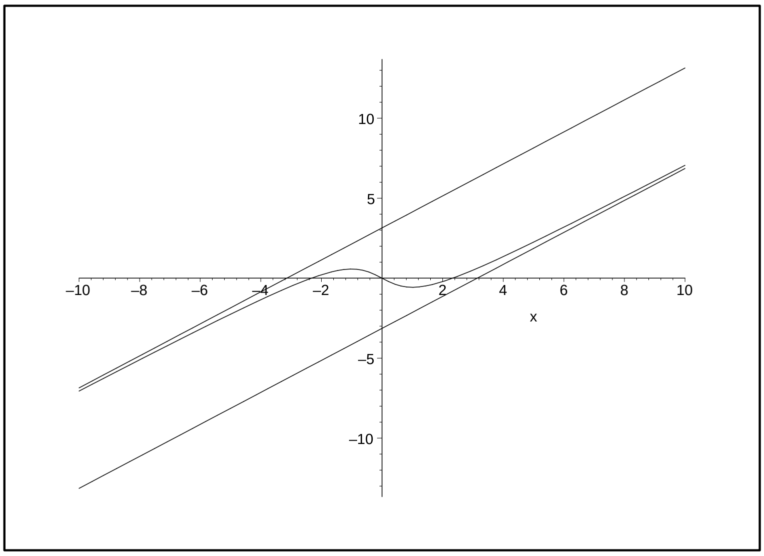


Figure 8: Funkce $f(x) = x - 2\arctan(x)$ a asymptota $g(x) = x - \pi$ a $h(x) = x + \pi$