

2.1 Axiomaticko-testový přístup Irvinga Fishera a jeho současníků

Axiomatická/testová teorie indexních čísel¹, jejímž iniciátorem byl *Irving Fisher* na počátku 20. století, sestává z několika logicky odůvodněných předpokladů, jejichž splnění lze vyžadovat od každého dostatečně "rozumného" indexního čísla. Výčet ani přesné formulace těchto axiomů/testů nejsou však všemi problémem se zabývajících autory přijímány jednotně. Zde se přidržíme původních formulací, kategorizace a uspořádání testů zastávaných *Irvingem Fisherem* a jeho současníky. Ve druhé polovině 20. století byly formulovány další testy, které původní *Fisherovu axiomatickou soustavu* svým způsobem „doplňují“. Z nich uvádíme jen ty, které jsou čteněji komentovány v literatuře a které mohou být elegantně interpretovány. S ohledem na některá pojednání z nedávné doby lze do budoucna již sotva očekávat, že se na této „systavě“ něco ještě podstatněji změní. Zde uvedené axiomy/testy budeme značit **(F1) - (F12)**, přičemž jako prvních 8 axiomů uvádíme ty, které pocházejí z *Fisherova, Walshova, Bowleyho či Frischova období*.

Dobré indexní číslo by mělo vyhovovat co největšímu počtu z těchto požadavků.

(F1w) test (slabé) identity [weak identity test]:

Jestliže platí $p(0) = p(1)$ a současně $q(0) = q(1)$, pak $\tilde{P}_{01} = 1$, což lze psát $P_{00} = 1$.

(F1s) test (silné) identity [strong identity test]:

Jestliže platí $p(0) = p(1)$ pak $\tilde{P}_{01} = 1$

říká, že "neutrální" hodnota indexního čísla (vzatého jako podílový ukazatel) je rovna jedné. Shodu cen (příp. i kvantit) v obou obdobích lze pokládat též za "nedostatek času" ke změně komplexu. Test **(F1w)** je splněn všemi uvedenými indexními čísly.

(F2w) test záměny faktorů [factor reversal test]: $P_{01} \cdot \tilde{P}_{01} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}$ resp.

(F2s) „součinnový“ test² [product test]: $P_{01} \cdot Q_{01} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)}$

požadují, aby hodnota součinu P_{01} a indexního čísla \tilde{P}_{01} téže konstrukce získaného záměnou cen za kvantit a obráceně (interpretovatelného obvykle jako kvantový index) dávala podíl peněžních agregátů, tj. vynaložených výdajů na komodity v běžném a základním období³.

¹ Není podstatné, zda používáme pojem test či axiom. Jde tak či onak o podmínku, kterou určitý konstrukt tj. indexní číslo testujeme z toho hlediska, zda jej splňuje nebo ne, či se na ni díváme jako na postulát vyvozený z elementární ekonomicko-matematické podstaty věci.

² Možná ne zcela zřetelně postřehnutelný rozdíl mezi tímto a předchozím testem (F2w) spočívá v tom, že ne vždy je kvantové indexní číslo vytvořeno mechanickou záměnou cen a kvantit z cenového a naopak.

³ Výraz na pravé straně (F2) by mohl být považován také za určitý typ indexního čísla, avšak při bližším zkoumání zjistíme, že jeho konstrukce není vhodná - viz dále komentář k (F11).

(F3) test záměny období (míst) [time reversal test]: $P_{01} \cdot P_{10} = 1$

znamená požadavek, aby při "inverzním" pohledu na změnu komplexu v čase (návrat do výchozího období) bylo "časově převrácené" indexní číslo reciprokou hodnotou původního. Tentýž požadavek lze analogicky vyslovit při prostorovém srovnání, kde ovšem zpravidla máme libovůli při přiřazení "0" a "1" srovnávaným územním celkům.

(F4s) test okružnosti (též cirkularity či tranzitivity) [circularity test]: $P_{02} = P_{01} \cdot P_{12}$

požaduje, aby se přechod ze základního období "0" do běžného období "2" (přes meziobdobí "1") odehrál bez tranzitivního zkreslení (a to při libovolném meziobdobí). Při územním srovnání půjde o analogický požadavek, ať volíme "přestupný" územní celek jakkoliv.

Slabší vyjádření předchozího testu představuje

(F4w) bazický test [base test]:

výraz $P_{01} = \frac{P_{02}}{P_{12}}$ je nezávislý na volbě období „2“.

Ten (pouze) požaduje, aby podíl P_{02} / P_{12} byl nezávislý na hodnotách $p(2), q(2)$ neboli, aby srovnání vývoje spotřeb a cen základního období vůči spotřebám a cenám běžného období prováděné přes třetí časový bod nebylo závislé na hodnotách výchozího období.

(F5) test určenosti [determinateness test]:

P_{01} je vždy určité, konečné a ne identicky nulové reálné číslo.

představuje požadavek, aby indexní číslo bylo vždy definováno a mělo konečnou, ne identicky nulovou hodnotu v jakékoliv situaci (např. při nepřítomnosti některé z komodit v základním nebo v běžném období). Zesílenou verzí tohoto testu je níže uvedený axiom (F12).

Další dvojici představují

(F6w) test (slabé) souměřitelnosti [commensurability test] konstatující toto

Jestliže provedeme stejnou proporční změnu měrových jednotek kvantit, tj. $q_i^*(1) = d \cdot q_i(1)$, $q_i^*(0) = d \cdot q_i(0)$ pro nějaké reálné $d > 0$ a adekvátní změnu cen $p_i^*(1) = d^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d^{-1} \cdot p_i(0)$, potom musí vždy platit $\tilde{P}_{01} = P_{01}$, neboli

P_{01} nezávisí na měrové jednotce komodit

popř.

(F6s) test (silné) souměřitelnosti konstatující totéž, ovšem za volnější podmínky

pokud ceny i kvantitů změníme vzájemně konformně (každou však v obecně jiném poměru)

Jestliže platí $q_i^*(1) = d_i \cdot q_i(1)$, $q_i^*(0) = d_i \cdot q_i(0)$ pro nějaký vektor d s kladnými složkami a podobně $p_i^*(1) = d_i^{-1} \cdot p_i(1)$, $p_i^*(0) = d_i^{-1} \cdot p_i(0)$, potom musí vždy platit $\tilde{P}_{01} = P_{01}$.

Slabá i silná verze testu vyjadřují očekávání, že indexní číslo nesmí být ovlivněno změnou velikosti měrových jednotek komodit analyzovaného souboru: např. v situaci,

kdy se mění měrové jednotky, ve kterých uvádíme množství komodit, musí být zachována hodnota indexního čísla vyčíslená před touto změnou a po ní. Jako příklad vezměme situaci, kdy přecházíme z kg na tony: jednotková cena komodity se 1000-násobně zvětší, avšak současně se také 1000-násobně zmenší původní množství komodity vyjádřené v nové jednotce ($kg = 0,001t$). Konstrukce indexního čísla musí být vůči těmto změnám invariantní.

(F7w) test (slabé) úměrnosti [weak proportionality test]:

**Jestliže platí $p_i(I) = c \cdot p_i(0)$ a též $q_i(I) = q_i(0)$ pro všechna i
a pro nějakou konstantu $c > 0$, pak musí platit $\tilde{P}_{01} = c$.**

Upuštěním od druhé podmínky získáme

(F7s) test (silné) úměrnosti [strong proportionality test]:

**Jestliže platí $p_i(I) = c \cdot p_i(0)$ pro všechna i (nezávisle na hodnotách kvantit)
a pro nějakou kladnou konstantu c , pak musí platit $\tilde{P}_{01} = c$.**

Axiom **(F7s)** vyžaduje, aby v "ideálním" případě, kdy by ceny všech komodit vzrostly ve stejném poměru (např. c -násobně), bylo cenové indexní číslo rovno příslušné konstantě úměrnosti c . Jiná hodnota by zřejmě signalizovala nekorektnost konstruktů. K platnosti slabé verze tohoto testu postačuje, platí-li tento závěr tehdy, nedojde-li mezi základním a běžným obdobím k žádným změnám v kvantitách..

Dále máme

(F8) test symetrie [symmetry test] vyslovuje požadavek, že

Indexní číslo je invariantní vůči jakékoliv permutaci (záměně) pořadí cen komodit (při analogické záměně pořadí příslušných kvantit).⁴

Je zřejmé, že závislost hodnoty indexního čísla na pořadí komodit nelze připustit, neboť bychom nemohli přistupovat ke všem statkům v příslušném konstruktů rovnocenně.

Axiom **(F8)** splňují zřejmě všechny v části [2.1] uvedené návrhy "inteligentních" indexních čísel. Protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikační operace (jinými slovy jak při aritmetickém, tak geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciální kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

⁴ Z uvedených 8 testů je **Irvingu Fisherovi [1911], [1922]** přímo přisuzováno autorství axiomů **(F1)**, **(F3)**, **(F6)**, **(F8)** a spolu s **C.M.Walshem [1901]** test **(F7)**, zatímco axiom okružnosti **(F4)** formuloval Dán **Harald Ludwig Westergaard [1890]**. Důraz na význam axiomu záměny faktorů **(F2)** kladl zejména holandský ekonom **Ragnar Frisch [1930]**. Test **(F6)** údajně poprvé navrhl již holandský ekonom **N.G.Pierson [1896]** pod názvem **test invariance vůči změnám v jednotkách měření**. Tentýž autor vyslovil poprvé podnět pro test **(F3)**. **E.Laspeyres [1871]** se mj. zasloužil o uvedení testu **(F1s)** představované požadavkem, aby hodnota cenového indexního čísla byla rovna 1, kdykoliv za $p(0)$ a $p(I)$ dosadíme shodné vektory.

(F9) axiom monotónnosti: [monotonicity test]

Jestliže platí $p_i(1) \leq p_i^*(1)$ pro všechna i při nezměněných $p(0), q(0), q(1)$,
potom vždy platí $P_{01} \leq P_{01}^*$.

Axiom říká, že taková změna cen všech komodit mezi základním a běžným obdobím, při které jsou alternativně vzaté hodnoty cen $p_i^*(1)$ u všech komodit nejméně rovné původním cenám $p_i(1)$ běžného období, musí vést k indexnímu číslu, které je hodnotou aspoň stejně velké jako původní indexní číslo.

(F10) axiom střední hodnoty [mean value test] [W.Eichhorn – J.Voeller 1976]

$$\min_{I=1,\dots,N} \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \leq P_{01} \leq \max_{I=1,\dots,N} \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

požaduje, aby se velikost (cenového) indexního čísla nacházela mezi hodnotami nejmenší a největší individuální poměrové cenové změny.

(F11) axiom invariance vůči změnám v měřítkách [**] [Y.Vartia [1985]].

Změníme-li peněžní jednotku shodně u všech cen v obou obdobích "0" a "1",
tzn. položíme-li $p^*(0) = d \cdot p(0)$ a $p^*(1) = d \cdot p(1)$,

pak při libovolných proporčních změnách měrových jednotek kvantit v základním i běžném období, přičemž v každém období může jít o jinou proporční změnu v jednotkách měření kvantit, tzn. $q^*(0) = b \cdot q(0)$ a $q^*(1) = c \cdot q(1)$, musíme dospět k původní hodnotě indexního čísla.

Jestliže tedy změněné indexní číslo (s ohvězdičkovanými veličinami) označíme P_{01}^* ,

$$\text{musí platit } P_{01}^* = P_{01}.$$

Smyslem testu je, aby "vážení" spotřebami probíhalo vždy srovnatelným způsobem (tedy buď spotřebami vždy ze základního nebo vždy z běžného období). Tomuto testu nevyhovuje např. konstrukt objevující se na pravé straně testu záměny faktorů (F2), pokud bychom uvažovali o jeho použití též jako jistého "indexního čísla".

(F12) axiom konzistence při mizející komoditě [**][Erwin Diewert [1992]],

vyjádřený následovně

$$\lim_{q_N(0) \rightarrow 0, q_N(1) \rightarrow 0} P_{01}^{(N)} = P_{01}^{(N-1)},$$

kde výrazy $P_{01}^{(N)}, P_{01}^{(N-1)}$ označují totéž indexní číslo, jednou spočtené včetně, podruhé bez určité (pro jednoduchost zápisu řekněme N-té) komodity:

Pokud se množství kterékoliv komodity neomezeně zmenšuje, musí být limitním výrazem indexní číslo vytvořené pouze ze zbývajících $N-1$ komodit.

2.2 Nekonzistence a neúplnost Fisherovy axiomatické soustavy

Rozsáhlý „sortiment“ v úvahu přicházejících indexních čísel a početný okruh testů spojených s vyšetřováním teoretických vlastností vede k položení tří základních otázek:

- Je (přínejmenším všech prvních 8 testů (F1) - (F8)) vzájemně nezávislých ?
- Je daná soustava testů/axiomů vzájemně konzistentní, resp. jinými slovy: existuje indexní číslo splňující všechny testy ?
- Vede splnění všech testů, případně omezení se na nějakou vybranou podskupinu z nich, k určení konkrétního tvaru indexního čísla ?

Pokud jde o **soustavu původních 8 Fisherových testů**, je (bohužel) **odpověď** na každou z těchto otázek **záporná**.

Poznámka 1 Ne všechny z původní soustavy testů jsou nezávislé, jak je snadno vidět např. ze dvou následujících protipříkladů:

Tvrzení 1. Z axiomu úměrnosti vyplývá splnění axiomu (silné i slabé) identity.

Ověření: Platí-li v (F5) $p_i(I) = c \cdot p_i(0)$ pro nějakou konstantu $c > 0$, pak volbou této konstanty $c = 1$, dostáváme $p_i(I) = p_i(0)$. Pak ovšem implikace spojená s platností implikace v (F5): $\tilde{P}_{0I} = c \cdot P_{0I}$ znamená $\tilde{P}_{0I} = P_{0I}$. Uvedené platí nezávisle na tom, co se děje s kvantitami.

Tvrzení 2 Z axiomů okružnosti a identity vyplývá splnění axiomu záměny období.

Ověření: Platí-li podle (F4s) $P_{02} = P_{01} \cdot P_{12}$, resp. $P_{01} = \frac{P_{02}}{P_{12}}$ při nenulovosti P_{12} ,

pak

speciální volbou meziobdobí „2“ situovanou do období „0“ (to je přípustné) dostaneme

$P_{0I} = \frac{P_{00}}{P_{10}}$, což spolu s (F1w) dává implikaci v (F3). Ztotožníme-li u bazického testu

(F4w) období „2“ se základním obdobím „0“, pak se s podmínky $P_{01} = \frac{P_{02}}{P_{12}}$ stane

identita $P_{0I} = \frac{P_{00}}{P_{10}}$ a využitím platnosti (F1) dostáváme ihned (F3).

Poznámka 2

Soustava původních 8 Fisherových testů (F1)-F(8), tím spíše pak se zahrnutím dalších (T9)-(T12) **není vzájemně konzistentní**. Na **neslučitelnost současného splnění testů okružnosti (F4w)**, **určenosti (F5)** a **souměřitelnosti (F6w)** poukázal již **Ragnar Frisch**. Jím podaný důkaz však nebyl dostatečně obecný. O něco později se obdobným problémem zabýval **Abraham Wald**¹[1937], který našel vzájemný

rozpor v trojici testů **(F7s)**, **(F4s)** a **(F2w)**. Oba autoři přitom předpokládali, že indexní čísla (cenová i kvantová) jsou derivovatelná podle cen p_i i kvantit q_i . Jimi podané důkazy však nebyly později shledány za plně korektní.

První exaktní důkazy o rozpornosti některých testů podali matematictí ekonom Ind **Subramanian Swamy** a Japonec **K.Mizutani**¹. Uplatnili přitom poznatky z teorie funkcionálních a parciálních diferenciálních rovnic. O něco později (za slabších předpokladů položených na indexní číslo a bez potřeby diferencovatelnosti indexního konstruktů podle argumentů) provedl zevrubnou analýzu problému **Wolfgang Eichhorn**. Důkazy jím podané jsou ryze analytické a nevyžadují žádné předpoklady ve vztahu k diferencovatelnosti indexního čísla (dle cen resp. kvantit) Na další nekonzistence (případně zahrnující i některé níže uvedené testy) upozornili a příslušné věty vyslovili **P.Samuelson [1974]**, **W.Eichhorn [1976]** a **Eichhorn a Voeller [1976]**.

Poznámka 3

Není znám (a patrně neexistuje) **případ, kdy by z jakékoliv konzistentní podsoustavy testů (F1)-F(8) bylo možno přímo vyvodit konkrétní tvar indexního čísla.**

W.Eichhorn [1976] ale ukázal, že indexní číslo splňující současně bazický test **(F4w)**, test souměřitelnosti **(F6w)**, popř. ještě test záměny faktorů **(F2w)** musí mít dosti speciální tvar.

Poznámka 4

Pokud jde o **modifikovanou soustavu 20 Diewertových testů (zahrnujících s výjimkou (F2) a (F4) zbývající testy Fischerovy, je odpověď na první otázku kladná, neboť právě ideální Fisherův index splňuje všech 20 testů.**⁵

⁵ Je ovšem třeba dodat, že, aniž je tím autor podezírán, že volba testů je do určité míry podřízena indexu Fischerova typu.

2.3 Poznámky k podmínkám splnění některých testů

Účelem testu (F12) je, podobně jako u (F5), ošetřit situace, kdy není přítomna některá komodita a zabránit, aby při její nepřítomnosti došlo ke zhroucení hodnoty indexního čísla. Lze ho považovat za určité zpřesnění axiomu určenosti (F5); ten sám o sobě nespécifikuje, jak má vypadat výraz při výpadku jedné nebo více komodit.

Požadavku vyžadovanému testem (F12) zpravidla nevyhovují indexní čísla založená na geometrickém průměrování.

Testu okružnosti (F4) vyhovuje jen relativně malý počet indexních čísel. Stojí za zmínku, že v r. 1979 dokázali Funke, Hacker a Voeller, že indexní číslo, které má tento axiom splňovat a současně vyhovuje určitým podmínkám regularity zaručujícím, že i z jiných hledisek půjde o „rozumné“ indexní číslo, musí mít tvar vyjádřitelný obecným (váženým) geometrickým průměrem, u kterého budou váhy splňovat podmínky

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad \text{a} \quad \alpha_i > 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Z uvedených tedy tento axiom **splňují** pouze **Jevonsův a Törnquistův index**.

Pokud jde o axiom (F4), ukázalo se, že jeho přesnou platnost lze oželeť, pokud zkoumané indexní číslo vyhovuje tomuto testu aspoň s určitou přibližností. Již Irving Fisher v tomto směru shledal, že v praktických situacích, kdy pracujeme s reálnými ekonomickými daty, jsou odchylky u P_{02}^F od součinu $P_{01}^F \cdot P_{12}^F$ obvykle velmi malé.

Podobná zkušenost byla získána i u dalších indexních čísel, které zacházejí symetricky v vahami, jako je Walshovo indexní číslo P_{01}^W , případně i jiná.

Pouhý počet splněných testů však není jediným vodítkem při komparaci vhodnosti návrhů indexních čísel. Důležitou roli hraje rovněž otázka, do jaké míry umožňuje zvolená váhová struktura vyhovět odlišnostem v poměrování vlivu komodit u jednotlivých agregátních výrazů. V tomto smyslu jsou obecně průměry "váženého typu" nadřazeny indexním číslům založeným na prostém průměrování (Carli, Jevons), neboť přinejmenším v určité míře dovedou stupeň významové odlišnosti komodit postihnout. Rovněž záměr objektivizovat či neutralizovat vliv volby období, která se objevuje v konstrukcích Fisherova, Edgeworthova, Walshova a Törnquistova indexu staví tato indexní čísla nad "nesymetricky formulovanými" indexy Paascheho či Laspeyresova typu.

2.4 Rozšíření Fisherovy axiomatické soustavy

Stanovit, které z uvedených 12 testů jsou více "fundamentální" než jiné, není dost dobře možné a názory jednotlivých autorů se v hodnocení dosti liší. Přece však lze vyslovit názor, že **axiomy záměny faktorů (F2) okružnosti (F4)** a snad i **(F11)** lze považovat za ty, jejichž nesplnění lze bez větší újmy tolerovat. Pokud jde o „samozřejmý“ požadavek vyjádřený **testem (F8)**, lze říci, že jeho splnění je nutné; protože však komutativita platí jak pro aditivní, tak pro multiplikatívni operace (tj. slovy při aritmetickém i při geometrickém způsobu průměrování), nemá tento test z hlediska uplatnění jako diferenciativní kritérium mezi různými indexními čísly valný význam.

Patrně nejpodrobnější rozvedení axiomaticko-testového přístupu lze nalézt v nedávné **Diewertově práci [1992]**, kde autor **dospívá k systému celkem 20 testů**, které člení do 5 následujících skupin :

- **4 „samozřejmé“ testy**, mezi něž patří **spojitost** a **nezápornost** kteréhokoliv indexního čísla ve všech prvcích vektorů $p(0), p(1), q(0), q(1)$, dále **test silné identity** požadující, aby $P_{01} = 1$ vždy, když platí $p(1) = p(0)$ ⁶, a též symetrický požadavek ve vztahu k neměním se kvantitám, kde je vyžadováno, aby $P_{01} = \sum p_i(1)q_i / \sum p_i(0)q_i$ vždy, když platí $q(1) = q(0) = q$.
- **4 testy „homogenity“**, mezi které náleží mj. **silnější verze testu úměrnosti (F7)** požadující, aby platilo $P_{01}^* = \lambda \cdot P_{01}$, jestliže v indexním čísle P_{01}^* operujeme s λ – násobkem cenového vektoru $p(1)$, dále obdobný **test inverzní úměrnosti v cenách základního období a dva testy invariance vůči proporčním změnám v kvantitách základního a běžného období** požadující, aby se cenové indexní číslo nezměnilo, jestliže se proporčně změní kvantitativy v základním resp. v běžném období.
- **5 testů invariance a symetrie** ; Je sem řazen **test symetrie při záměně pořadí**

⁶ Za zmínku stojí, že z **testu silné identity (F1s) plyne (F1w)**, přičemž tato vlastnost plyne též z **(F7)**, což ostatně ukázal již **C.M. Walsh [1901]**.

komodit (F8), dále test souměřitelnosti (F6) - zde nazýván *testem invariance vůči změnám měrových jednotek*, dále **test záměny období (F3) a dvojice testů** nazvaných **testy záměny cen, resp. kvantit** vyjadřující požadavky na neměnnost cenového indexního čísla při prohození kvantit základního a běžného období a stejně tak *vice versa* ve vztahu ke kvantovému indexnímu číslu.

- **3 testy střední hodnoty**; Kromě (F10) sem patří též analogický test střední hodnoty formulovaný pro Q_{01} a dále striktní **požadavek na to, aby indexní číslo vždy leželo mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem**, tzn. aby pro cenové platila nerovnost $P_{01}^P \leq P_{01} \leq P_{01}^L$.
- **4 testy monotónnosti**, z nichž jedním je právě **test (F9)**. Další 3 požadavky na monotónnost jsou zde vysloveny nejen ve vztahu ke změně cen v $p(1)$, ale též vůči změnám v $p(0)$, $q(1)$, $q(0)$.

V uvedeném **Diewertově souhrnu 20 testů** nejsou zahrnuty zde formulované testy určení (F5), dále test (F12), který je jeho zesílením, ani **axiom okružnosti (F4)**, který autor posuzuje mimo kontext bilaterálních indexů. Samostatně jako 21.test je uvažován (F2).