1. Klasická indexní čísla

1.1. Průměry jako prostředek formulace indexních čísel

Tři klasičtí představitelé moderní formalizované ekonomie **Stanley W. Jevons, [1865], Francis Y.Edgeworth [1881] a Alfred Marshall [1887] se snažili nalézt objektivní hlediska, jak řešit formulovaný problém rigorózně**, **s použitím** nemnoha tehdy známých **výsledků statistické analýzy**. Několik v té době známých konstruktů bylo založeno na prostých nebo vážených průměrech (*aritmetickém či geometrickém*) a úlohou bylo vyšetřit, které vlastnosti přisoudit indexnímu číslo jako nutné a pokusit se zdůvodnit návrhy IČ čísel ve světle chování ekonomické reality.

Vůbec první "indexní číslo" navrhl již v r. 1738 století Charles Dutot jako prostý podíl zprůměrovaných cen komodit v běžném a v základním období, tj. výraz

$$\frac{\sum p_i(1)}{N} \Big/ \frac{\sum p_i(0)}{N}$$

Byla přitom vyslovena tato úvaha: ***Za normálního stavu by se cenový vývoj ekonomického komplexu měl odehrávat tak, že změna*** *(obvykle vzestup)* ***ceny jedné z uvažovaných komodit mezi dvěma obdobími by měl být postupně provázen analogickou změnou*** *(vzestupem)* ***cen ostatních komodit***. Tím by mělo dojít (připusťme malé časové zpoždění) k (téměř) proporční změně cen všech uvažovaných komodit mezi těmito obdobími. **Edgeworth a Jevons usuzovali, že nepravidelnosti, které v realitě u (nestejného) vývoje cen komodit pozorujeme, jsou způsobeny (kromě zpoždění) především chybami v pozorování hodnot (cen) příslušného statistického souboru***/.

Tehdy zastávaný názor vycházel z úvahy, že **na vektor podílových změn cen**

$$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \qquad i = 1,2,\dots\dots,N$$

lze pohlížet jako na konečnou množinu realizací náhodné veličiny X **"všeobecná cenová změna"**, a že každý konkrétně vyšetřovaný soubor podílových cenových změn $p_i(1)/p_i(0)$ má charakter náhodného výběru, jehož prvky jsou vzájemně nezávislé a stejně rozdělené. Přitažlivost tohoto nazírání byla podložena statistickými vývody, neboť je známo, že:

a) **jsou-li složky náhodného vektoru** $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ **nezávisle a stejně normálně rozděleny** $N(\mu;\delta^2)$**, pak nestrannou odhadovou funkcí (získanou např. metodou maximální věrohodnosti) střední hodnoty** μ **je aritmetický průměr prvků výběrového souboru** $\bar{x}^A = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

b) **jsou-li složky náhodného vektoru** $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ **nezávisle a stejně logaritmicko-normálně rozděleny** $LN(\mu,\sigma^2)$**, pak nestrannou odhadovou funkcí** (získanou **metodou maximální věrohodnosti) střední hodnoty** μ **je prostý geometrický průměr prvků výběrového souboru** $\bar{x}^G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} (x_i)}$

V **Edgeworthově pohledu** (nazývaném ***varianta stochastického standardního přístupu***) **lze zaznamenat snahu po vyjádření přesnosti měření individuálních cenových změn adekvátním váhovým vektorem**. Na druhé straně je však tímto přesnosti měření přikládán význam nesouvisející s tím, jaká je významnost komodity v analyzovaném spotřebním koši (vyjádřená např. objemem její spotřeby).

Přes inspirativnost byl nicméně záhy tento přístup odmítnut pro zřetelné znásilnění ekonomické reality ve prospěch uvedeného teoreticko-statistického schématu. **Jak později ukázali A.L.Bowley a J.M.Keynes**, **odporují tomuto pohledu jak empirické tak teoretické důvody**: **Empirická šetření nedala za pravdu domněnkám o normalitě ani logaritmické normalitě rozdělení cenových poměrů** (až snad na ojedinělé případy). Podobně, **reálné projevy cenového vývoje různých komodit jsou charakteristické tím, že vývoj cen určité skupiny komodit se zpravidla (v krátkém či delším horizontu) systematicky liší od vývoje cen jiné skupiny** (v závislosti např. na substitučních aspektech) a **ke sbližování trendů nemusí dojít ani po velmi dlouhém období**. Zde hraje zřejmou úlohu provázanost cen se spotřebou charakteristická pro prostředí všeobecné ekonomické rovnováhy : **ceny či jejich podíly nejsou v ekonomickém prostředí rozděleny náhodně**.

Edgeworthův přístup udává nicméně základní **motivaci pro** racionální **konstrukci indexního čísla tím, že usiluje o vystižení "střední cenové změny" nějakým průměrováním podílů** $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$.

Přirozeným způsobem, jak zlepšit vlastnosti průměrování podílů $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ **, je použití vážených typů průměrů**. Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah α_i, které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) na celkovém agregátním vyjádření.

Máme-li **čtyři základní typy průměrů** (aritmetický, geometrický, harmonický a kvadratický), lze dospět ke čtyřem použitelným agregujícím konstruktům :

A. Indexní čísla založená na aritmetickém průměru:
$$P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}$$

B. Indexní čísla založená na geometrickém průměru:
$$P_{01}^{G} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\alpha_i}$$

C. Indexní čísla vycházející z harmonického průměru:
$$\frac{1}{P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \left(\frac{p_i(0)}{p_i(1)} \right)$$

D. Indexní čísla založená na kvadratickém průměru:
$$P_{01}^{Q} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^2}$$

Prosté průměry, z nichž se některým též dostalo specifického pojmenování (při operování s podílovými cenovými změnami), dostaneme snadno z vážených volbou rovnoměrných vah tj. při $\alpha_{i;} = \frac{1}{N}$. Kvadratický průměr se oproti třem ostatním používá v prostředí indexních čísel nejřidčeji.

Pro váhy α_i budeme předpokládat standardní omezení spočívající v jejich nezápornosti (též s ohledem na nezápornost kvantit a kladnost cen) a dále **v tom, že jejich součet (uvažovaný přes všech N komodit) je jedničkový**,

$$\alpha_i \geq 0 \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

Použitelnými způsoby vyjádření odlišnosti váhového podílu každé komodity na celkovém agregátním komplexu jsou např. volby vah následujícího typu :

$$\alpha_i = \frac{q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} q_i(*)} \qquad \alpha_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(*)} \qquad \alpha_i = \frac{p_i(1) \cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(*)}$$

Z obecné teorie středních hodnot vyplývá, že pro libovolnou n-tici nezáporných čísel **platí nerovnosti pro vztahy mezi průměry (prostými i váženými)**

$$P_{01}{}^{H} \leq P_{01}{}^{G} \leq P_{01}{}^{A} \leq P_{01}{}^{Q}$$

Všechny tyto průměry lze totiž zapsat jako zvláštní formy obecného výrazu pro střední hodnotu řádu ρ.

Tuto **obecnou střední hodnotu lze** pro průměry prostého typu **vyjádřit výrazem**

$$P^{\rho}{}_{01} = \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}$$

resp. **pro průměry váženého typu** ji lze zapsat analogicky jako

$$_{\alpha}P^{\rho}{}_{01} = \left(\cdot \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{\rho} \right)^{1/\rho}$$

Aritmetický průměr je zvláštním **případem obecné střední hodnoty při volbě ρ = 1, kvadratický průměr při volbě ρ = 2, harmonický průměr obdržíme při dosazení ρ = -1 a geometrický průměr je limitním případem obecné střední hodnoty řádu ρ, pokud se hodnota ρ limitně blíží k 0.**

Vzorce platí jak pro prosté, tak pro vážené průměry, pokud váhy splňují podmínky – platnost nerovností se zachovává i při určitém uvolnění podmínek.

Pro jakékoliv dvě střední hodnoty řádů r,s pro které platí nerovnost řádů, tj. např. r < s, vždy platí nerovnosti

$$P_{01}{}^{r} < P_{01}{}^{s} \qquad \text{resp.} \qquad {}_{\alpha}P_{01}{}^{r} < {}_{\alpha}P_{01}{}^{s}$$

1.2 Klasická (statistická) indexní čísla

Vůbec nejjednodušší případ "rozumného indexního čísla" představuje

1. CARLI/SAUERBECKovo indexní číslo [Gian-Ricardo Carli 1764, Augustus M.Sauerbeck 1885]

$$P^{S}{}_{01} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)},$$

které je prostým aritmetickým průměrem podílových cenových změn. Jde o nejjednodušší možný přístup k agregaci podílových změn $p_i(1)/p_i(0)$ bez možnosti (průměr je nevážený) **uplatnit jakákoliv hlediska k vyjádření rozdílné významnosti jednotlivých komodit v celkovém agregátním vyjádření.**

Nahradíme-li aritmetické průměrování geometrickým, lze formulovat jednoduchý výraz nazývaný

2. JEVONSovo indexní číslo [William Stanley Jevons 1865]

$$P_{01}^{J} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{\frac{1}{N}}$$

Tento indexní konstrukt je pojmenován po anglickém ekonomu Stanley W. Jevonsovi. Tvoří ho prostý geometrický průměr podílových cenových změn. Jak vyplývá z již zmíněných obecných zákonitostí pro jednotlivé typy průměrů operujících s nezápornými veličinami, Jevonsův index poskytuje vždy nižší (nanejvýš stejnou) **hodnotu než Carliho/Sauerbeckův index – rovnost nastává jen pro netypický případ, kdy by všechny podílové cenové změny $p_i(1)/p_i(0)$ nabývaly stejnou hodnotu. Jinými slovy řečeno to znamená, že *geometrický průměr "střední hodnotu" těchto cenových změn podhodnocuje, zatímco aritmetický ji nadhodnocuje.***

Jak Carliho/Sauerbeckovo tak Jevonsovo indexní číslo vykazují určité **slabiny, které je znehodnocují vzhledem k možnosti praktického použití:**

- Nutnost výskytu shodných komodity zařazené do příslušných spotřebních košů (to může činit problém v situacích, kdy jsou obě období časově značně vzdálená),

- Vyloučení přítomnosti volných statků (komodit s nulovými cenami) **v základním období, u Jevonsova indexu –** nemá-li být index identicky nulový – navíc **i v běžném období.**

- Nemožnost odlišit rozdílnost přínosu cenových podílů různých komodit k hodnotě souhrnného indexu v praktických situacích. (Změna ceny chleba i ceny pepře se v indexu uplatní stejnou vahou navzdory diametrálně odlišné spotřebě těchto komodit u všech spotřebitelů). *Stejnou slabinou by ostatně trpěl i (prostý) harmonický či kvadratický průměr.*

Přirozeným *způsobem, jak zlepšit vlastnosti (prostého) průměrování podílů* $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$*, je proto použití vážených typů průměrů.* Přitom můžeme volit jednak z několika typů průměrování, jednak z více možných výběrů vah α_i, které slouží jako míra ohodnocení významnosti jednotlivé komodity (z hlediska ceny či kvantity) **na celkovém agregátním indexním vyjádření.**
Příkladem indexů "váženého typu" je dvojice indexních čísel, Laspeyresovo a

Paascheho, která využívají aritmetický popř. harmonický způsob vážení:

3. LASPEYRESovo indexní číslo [Ernst Louis Etienne Laspeyres 1871][1]

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}$$

tzn. jde o **vážený aritmetický průměr cenových změn**, s vahami $\alpha_i = \dfrac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}$

Pak $${}_{\alpha}P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0)q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(0)q_j(0)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)} = P_{01}^{L}$$

Laspeyresův index obdržíme také jako **vážený harmonický průměr**, pokud zvolíme

$$\alpha_i = \frac{p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}\text{, protože } \frac{1}{{}_{\alpha}P_{01}^{H}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1).q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(1)q_j(0)} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{-1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)} = \frac{1}{P_{01}^{P}}$$

Index uplatnil v roce 1871 německý ekonom E.Laspeyres k analýze cenových relací *při zbožních výměnách v Německu*. Laspeyresovo indexní číslo je využíváno v české (stejně jako dříve v československé) **statistické praxi,** zejména **k měření vývoje inflace (CPI - index spotřebitelských cen, PPI – index cen průmyslových výrobců) a indexů životních nákladů** (u různých sociálních kategorií)**.**

Záměnou cen za kvantity a *vice versa* získáme **Laspeyresovo kvantové (množstevní, objemové) indexní číslo** ve tvaru

$$Q_{01}^{L} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} q_i(1)\cdot p_i(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N} q_i(0)\cdot p_i(0)} \quad ,$$

ve kterém se uplatňují opět tři z vektorů, tentokrát $p(0), q(0), q(1)$.

Vezmeme-li místo spotřeb komodit $q_i(0)$ spotřeby z běžného období $q_i(1)$,

[1] **Laspeyres, E.L.E.: Die Berechnung einer mittleren Warenpreissteigerung. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 16, s.296-314.**

dostaneme

4. PAASCHEho indexní číslo [Hermann von Paasche 1874][2]

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}$$

Jde o obdobu předchozího, avšak váhy α_i jsou zde dány jako $\alpha_i = \dfrac{p_i(0) \cdot q_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(0) \cdot q_i(1)}$

Uplatníme-li tyto váhy ve váženém **aritmetickém průměru**, dostaneme

$$P_{01}^{A} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) q_i(1)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(0) q_j(1)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum\limits_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(1)} = P^{P}{}_{01}$$

$P_{01}{}^{P}$ lze interpretovat i jako vážený **harmonický průměr** s vahami $\alpha_i = \dfrac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i(1) \cdot q_i(1)}$

Index má jméno po německém ekonomu H. von Paaschem, který jej použil *při analýze vývoje cenových kursů na hamburské burze*. Paascheho indexní číslo je (zejména v anglosaské jazykové oblasti a v Japonsku) **používáno k charakterizaci vývoje burzovních indexů na kapitálových trzích.**

Záměnou cen za kvantity a *vice versa* získáme Laspeyresovo kvantové (množstevní, objemové) indexní číslo ve tvaru

$$Q_{01}^{P} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} q_i(1) \cdot p_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N} q_i(0) \cdot p_i(1)} .$$

Poznámka: Údajně prvním ekonomem, který uvedl a podpořil postupy vedoucí k definicím Paascheho a Laspeyresova indexního čísla byl rovněž v roce 1871 německý ekonom **Wilhelm Moritz Drobisch**. Jeho jméno je nicméně vztaženo k indexu jiného tvaru.

Obě tato indexní čísla tvoří určité rozmezí (s dolní hranicí $P_{01}{}^{P}$ a horní hranicí $P_{01}{}^{L}$), v rámci něhož lze považovat posouzení vývoje poměrů sledovaných veličin (cen,kvantit) za realistické. Hodnoty převyšující $P_{01}{}^{L}$ a hodnoty menší než $P_{01}{}^{P}$) za

---

[2] **Paasche, von H.: Über der Preisentwicklung der Letzte Jahre nach den Hamburger Börsennotirungen. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 23, s.168-178.**

realistické považovat nelze a případný výsledek (získaný jiným indexním číslem) **je třeba posuzovat již jako zřetelné nadhodnocení, resp. podhodnocení skutečného stavu.**

Nevýhodou obou těchto indexních čísel (kromě jiných teoretických vad) je skutečnost, že **nezacházejí symetricky s informacemi získanými v základním resp. v běžném období. Tuto nevýhodu odstraňují jiná indexní čísla, která váží cenové podíly** $p_i(1)/p_i(0)$ **vahami, zacházejícími s kvantitami** základního nebo běžného období **"neutrálně". Jde o**

5.MARSHALL-EDGEWORTHovo indexní číslo [Alfred Marshall, Francis Y.Edgeworth 1887]

$$P_{01}^{E} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}$$

V něm jsou váženy jednotlivé cenové poměry aritmetickým průměrem kvantit vzatým ze základního a běžného období. Také toto indexní číslo může být interpretováno jako vážený aritmetický průměr s vahami

$$\alpha^{E}{}_{i} = \frac{p_i(0)\cdot[q_i(0)+q_i(1)]}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)[q_j(0)+q_j(1)]}$$

6. WALSHovo indexní číslo [Correa Moylan Walsh 1921]

$$P_{01}^{W} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}} \quad ,$$

ve kterém jsou s kvantity neutrálně průměrovány geometricky. C.M.Walsh argumentoval pro tento návrh právě potřebou zacházet „symetricky" s informacemi převzatými ze základního a běžného období, nejsou-li jiná vodítka, kterému z těchto období dát přednost. I jeho index je speciálním případem váženého aritmetického průměru, pokud za váhy α_i **vezmeme výrazy**

$$\alpha^{W}{}_{i} = \frac{p_i(0)\cdot\sqrt{q_i(0)\cdot q_i(1)}}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot\sqrt{q_j(0)\cdot q_j(1)}}$$

Ve snaze dospět k "optimálnímu" indexnímu konstruktu, byl mj. uveden návrh známý jako

7. FISHERovo (ideální) indexní číslo [Irving Fisher 1922]

$$P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L}\cdot P_{01}^{P}} ,$$

Index je definován jako (prostý) **geometrický průměr Laspeyresova a Paascheova indexního čísla. Index je pojmenován po Američanovi Irvingu Fisherovi, ač byl již dříve zmiňován Arthurem Leonem Bowleyem [1899] a Arthurem Cecilem Pigouem [1912]. Z konstrukce tohoto indexního čísla je zřejmé, že** ***jeho hodnota se musí nacházet mezi Paascheho a Laspeyresovým indexním číslem.***

Jak se při praktickém uplatnění ukazuje, **hodnoty Fisherova, Edgeworthova a Walshova**

indexního čísla jsou často velmi blízké a všechna mohou dobře vyjadřovat "neutrální" hodnocení vývoje či územního srovnání stavů posuzovaného komplexu.

Proti Laspeyresovu a Paascheho indexním číslům operují, jak patrno, **Walshův, Edgeworthův a Fisherův index s celou čtveřicí vektorů** $p(0), p(1), q(0), q(1),$

1.3 Některá další statistická indexní čísla

Další indexní číslo, kterému se dostalo teoretické **pozornosti, je**

8. TÖRNQUISTovo indexní číslo [Leo Törnquist 1936] [3]

$$P_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)} \right)^{w_i}$$

kde $w_i = 0{,}5 \cdot \left(\dfrac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \right) + 0{,}5 \cdot \left(\dfrac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)} \right)$,

což je vážený geometrický průměr cenových poměrů $\dfrac{p_i(1)}{p_i(0)}$**, v němž jsou váhy** w_i **vytvořeny jako** prosté **aritmetické průměry výdajových účastí** i**-té kvantity** (na peněžním agregátu) **v základním a v běžném období.**

Ke klasickým indexním číslům můžeme přiřadit ještě dva návrhy, které lze vyjádřit jako vážené průměry. Jedná se o

9. PALGRAVEovo indexní číslo [R.H.Inglis Palgrave kolem **1910]**

$$P_{01}^{PL} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_i(1)]^2 \cdot q_i(1) / p_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1) \cdot q_j(1)}$$

10. Harmonický LASPEYRESův index [Yrjö Vartia 1976][4]

$$\frac{1}{P_{01}^{HL}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(0) \cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)} \cdot \frac{p_i(0)}{p_i(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [p_i(0)]^2 \cdot q_i(0) / p_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(0)}$$

Obě tato indexní čísla se vyznačují tím, že se v jejich konstrukci objevují opět váhy

---

[3] Törnquist, L.: The Bank of Finland´s consumption price index. Bank of Finland Monthly Bulletin 10, 1936

[4] Vartia Y: Ideal Log-Change Index Numbers. Scandinavian Journal of Statistics 3/1976

v podobě výdajových účastí („*expenditure shares*“) mající u Palgraveova indexu tvar

$$\alpha^{PL}{}_i = \frac{p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(1)}$$ **u harmonického Laspeyresova indexu** $$\alpha^{HL}{}_i = \frac{p_i(0)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(0)}$$

Indexní čísla Laspeyresovo, Paascheho a některá další **lze zařadit do kategorií indexů tzv. Löweova typu. Tato indexní čísla lze vyjádřit ve tvaru**

11. LÖWEův (cenový) index [Joseph Loewe 1823]

$$P_{01}^{LW} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(*)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(*)}$$

kde hvězdičky v závorce vyjadřují situování do nějakého pevného časového období nebo jde prostě o nějakým způsobem stanovené kvantity (u Edgeworthova či Walshova čísla se vezmou průměry kvantit ze základního a běžného období). Obvykle se předpokládá, že období vyjádřené hvězdičkou není dřívější než základní období „*0*“.

Obecnost Löweovy formulace nazývané **přístupem pevného koše [fixed basket approach] přináší s sebou na druhé straně stupeň neurčitosti, máme-li rozhodnout o nejvhodnějším naplnění hvězdiček v závorkách.**

Ještě jednomu obecnému tvaru, jímž je možno řadu klasických indexních čísel zapsat**, se dostalo pozornosti. Jde o indexy vyjádřitelné jako**

„obecná střední hodnota řádu *r*“ $${}_sP_{01}^{t}(r) = \left(\sum_{i=1}^{N} s_i(t)\cdot\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^r\right)^{1/r}$$ **pro** $r \neq 0$

nebo výrazem $${}_sP_{01}^{t}(0) = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{s_i(t)}$$ **limita pro** $r \to 0$

přičemž váhy $$s_i(t) = \frac{p_i(t)q_i(t)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(t)q_i(t)}$$

představují výdajové účasti [expenditure shares] i-té komodity na hodnotě celkového **spotřebního koše. Hodnoty těchto účastí se přebírají zpravidla buď ze základního nebo běžného období. Z uvedených indexních čísel lze za speciální případy *obecné střední hodnoty s vahami* *charakteru* *výdajových účastí* vyjádřit**

Laspeyresovo indexní číslo $$P^{L}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} s_i(0)\frac{p_i(1)}{p_i(0)} = {}_s\, P^{0}{}_{01}(1)$$

Paascheho indexní číslo $$P^{P}{}_{01} = \left(\sum_{i=1}^{N} s_i(1)\frac{p_i(0)}{p_i(1)}\right)^{-1} = {}_s\, P^{1}{}_{01}(-1)$$

Palgraveův cenový index
$$P^{PL}{}_{01} = \sum_{i=1}^{N} s_i(1)\frac{p_i(1)}{p_i(0)} =_s P^1{}_{01}(1)$$

Harmonický Laspeyresův index
$$P^{P}{}_{01} = (\sum_{i=1}^{N} s_i(0)\frac{p_i(0)}{p_i(1)})^{-1} =_s P^0{}_{01}(-1)$$

Törnquistův cenový index
$$P_{01}^{T} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)^{0{,}5.s_i(0)+0{,}5.s_i(1)} =_s P^{0+1}{}_{01}(0)$$

Fisherovo indexní číslo může být zapsáno jako
$$P^{F}{}_{01} = (P^0{}_{01}(1))^{1/2}(P^1{}_{01}(-1))^{1/2}$$

Podobně bychom mohli nejrůznější volbou vah a průměrů různých typů dospět k mnoha dalším tvarům, které by dohromady vytvořily početný soubor více nebo méně užitečných typů **souhrnných indexů. Většina nahodile konstruovaných výrazů ovšem nepřesvědčila z hlediska svých vlastností, popř. i podmínek praktického užití, takže se do teoretického povědomí dostaly jen málokteré z nich.**

Předchozí soubor cenových (případné kvantových) **indexů je už sám o sobě dost početný, aby nás postavil před otázku, volba jakého typu cenového nebo kvantového indexu je** pro daný případ nebo obecně **optimální ?**

Jak rozlišit mezi vhodností a použitelností mnoha možných návrhů navzájem ? Přitom musíme mít na zřeteli, že vedle čistě matematických vlastností je ještě důležitější posuzovat index z hlediska účelu zasazení do ekonomického prostředí.

Otázka vhodnosti určitého indexu pro konkrétní použití je nicméně poněkud **arbitrární.**

Na konci 19. a v průběhu celého 20.století bylo věnováno značné úsilí, jak formulovat soubor kritérií, podložených zdůvodněnými teoretickými požadavky, které do určité míry dovolují posoudit "kvalitu" toho-kterého návrhu tvaru konkrétního indexního čísla, byť - jak dále uvidíme - nelze aspirovat na stanovení "všestranně nejlepšího" indexního čísla.