

## Giniho formulace indexních čísel

Rozšířením techniky řetězení je postup, který pod názvem **síťová metoda** uplatnil italský matematik a ekonom **Carrado Gini**<sup>1</sup>. Opět se uvažuje **rozčlenění období mezi počátečním - „0“-tým - a koncovým - „m“-tým - obdobím na celkem m úseků**, v nichž jsou dostupné potřebné statistické údaje.

Gini formuloval (následně po něm nazvaná) indexní čísla následujících tvarů:

tzv. **GINiho indexní číslo 1. typu**

$$(G1) \quad P_{0m}^{G(1)} = m+1 \sqrt[m+1]{\prod_{j=0}^m \frac{\sum_{i=1}^N p_i(m) \cdot q_i(j)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(j)}} ,$$

tzv. **GINiho indexní číslo 2. typu**<sup>2</sup>

$$(G2) \quad P_{0m}^{G(2)} = m-1 \sqrt[m-1]{\prod_{j=1}^{m-1} P_{0j}^* \cdot P_{jm}^*} ,$$

přičemž ve druhém případě může symbol  $P_{0m}^{G(2)}$  představovat libovolné jiné, z hlediska vlastností uspokojivé výchozí indexní číslo (definice  $P_{0m}^{G(2)}$  tedy není jednoznačná).

**Giniho konstrukty (G1), (G2) lze použít i pro data, která nemusí tvořit časové posloupnosti cen a kvantit.** Určitou jejich slabinou je však okolnost, že při aktualizaci je nutný celkový přepočítání indexního čísla v případě, kdy získáme statistická data za nová období (nebo individua či jiné statistické jednotky). Tato nevýhoda však nemusí být v praxi až tak citelná, neboť konstrukty byly autorem původně navrženy hlavně za účelem provádění prostorových (geografických) cenových srovnání.

**Předností obou indexních čísel (G1), (G2) je automatické splnění axiomu záměny období (F3) a dále skutečnost, že při velkém m**

<sup>1</sup> **Gini, C.:** „On the Circular Test of Index Numbers“. *Metron* 1931.

<sup>2</sup> **Ragnar Frisch** nazývá tyto konstrukty *Gini's aggregate crossing*, resp. *Gini's two-point crossing*.

(počtu dělení) se takto vytvořená veličina hodnotou zpravidla málo liší od hodnoty vzaté přímým výpočtem (bez dělení intervalu mezi „0“ a „ $m$ “).

**poznámka ke (G1):**

Všimněme si, že v případě (G1) (jde-li o cenové indexní číslo) stačí znát cenové vektory jen v počátečním "0" a koncovém " $m$ " období, zatímco údaje o spotřebě komodit, které využíváme pro stanovení vah při geometrickém průměrování, je potřebné sledovat též ve všech meziobdobích  $1, 2, \dots, m-1$ .

Jak je bezprostředně vidět z definičního vztahu **(G1)**, **při volbě  $m=1$  dostáváme pro  $P_{01}^{G(1)}$  přímo Fisherův cenový index**, zatímco pro  $m=2$  v případě  $P_{02}^{G(2)}$  obdržíme obdobně (nevážený) geometrický průměr obou částí  $P_{01}$  a  $P_{02}$  generujícího cenového indexního čísla. Není obtížné ukázat, že **Giniho indexní čísla vyhovují Fisherovým postulátům (F1), (F3), (F5), (F6), (F7), (F8)** (v případě  $P_{0m}^{G(2)}$  je ovšem musí splňovat generující indexní číslo). Axiom záměny faktorů **(F2)** není splněn a axiom okružnosti **(F4)** platí jen za velmi speciálních podmínek (nikoliv obecně).

### Stuvelova indexní čísla

Postup navržený v polovině 50. let 20. století nizozemský statistik **Gerhard Stuvel** se vrací ke klasickým přístupům z počátku století. Vyložíme jeho základní myšlenku<sup>3</sup>:

1) **Hledá se dvojice indexních čísel** (cenové  $P_{01}^{St}$ , kvantové  $Q_{01}^{St}$ ) přímo **splňující axiom záměny faktorů (F2)**, tj. aby platilo

$$(A) \quad P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)} .$$

**poznámka 1**

Ke zkrácení zápisu uijeme úspornější označení výrazu na pravé straně jako  $\frac{M(1)}{M(0)}$ , přičemž peněžní výdaje  $M(1) = \sum_{i=1}^N p_i(1) \cdot q_i(1)$ , resp.

---

<sup>3</sup> **Stuvel, G. : A New Index Number Formula. *Econometrica* 1957, Vol. 25.**

$M(0) = \sum_{i=1}^N p_i(0) \cdot q_i(0)$ , vyjadřují náklady na pořízení úplné skupiny komodit v běžném resp. základním období.<sup>4</sup>

2) Druhou podmínkou, kterou má hledaná dvojice splňovat, je **diferenční relace, která poměřuje rozdíly mezi takto konstruovanými indexními čísly  $P_{01}^{St}$ ,  $Q_{01}^{St}$  a příslušnými Laspeyresovými indexními čísly:**

$$(B) \quad Q_{01}^{St} - Q_{01}^L \cong P_{01}^{St} - P_{01}^L .$$

Ve vztahu **(B)** je možné uvažovat dva možné případy ve specifikaci relace "≅":

**(B1)** : relace (B) platí přesně, tj. "≅" vezmeme jako rovnost,

**(B2)** : relace (B) platí s určitou, přesně specifikovanou odchylkou.

### poznámka 2

Uvedená úvaha je vcelku oprávněná, vezmeme-li v úvahu poznatky statistické praxe, kde zvláště pro krátká časová období ukazuje, že rozdíly  $P_{01}^L \cdot Q_{01}^L$ , ale i  $P_{01}^P \cdot Q_{01}^P$  od hodnoty  $\frac{M(1)}{M(0)}$  nejsou

nijak velké. Jak víme, přesně tento požadavek nesplňuje **Laspeyresovo ani Paascheho indexní číslo**, avšak lze snadno ověřit, že tato indexní čísla jej „splňují“ křížovým způsobem tj.

$$P_{01}^L Q_{01}^P = P_{01}^P Q_{01}^L = \frac{M(1)}{M(0)} .$$

Postup zaslouží komentář ještě z tohoto důvodu:

Jak víme, **okruh původních 8 Fisherových testů nevede k určení indexního čísla v tom smyslu, že by nějaká podskupina testů vedla deduktivně jednoznačně ke konstrukci určitého typu indexu.**

Stuvelova cesta, resp. formulace podmínky (B) spolu s přijetím podmínky (A) k takovému jednoznačnému určení vede (stačí tedy tyto dvě podmínky, abychom konkrétní konstrukt, jak uvidíme, získali).

## Původní Stuevelův návrh

Z povahy zadání úlohy je zřejmé, že se hledá řešení dvou rovnic (pro neznámé  $P_{01}^{St}$  a  $Q_{01}^{St}$ )

$$(A) \quad P_{01}^{St} \cdot Q_{01}^{St} = \frac{M(1)}{M(0)} \quad ,$$

$$(B1) \quad Q_{01}^{St} - Q_{01}^L = P_{01}^{St} - P_{01}^L \quad .$$

Za daných předpokladů bude předmětem Stuevelovy úlohy nalezení řešení dvou rovnic (jedné lineární, druhé kvadratické) s neznámými  $P_{01}^{St}$  a  $Q_{01}^{St}$ , které jsou vyjádřeny pomocí známých ostatních veličin, tj.  $M(1), M(0), P_{01}^L, Q_{01}^L$ .

K nalezení řešení užijeme např. substituci z **(B1)**  $Q_{01}^{St} = P_{01}^{St} - P_{01}^L + Q_{01}^L$ , která po dosazení do **(A)** dává kvadratickou rovnici s neznámou  $P_{01}^{St}$ :

$$\left(P_{01}^{St}\right)^2 - \left(P_{01}^L - Q_{01}^L\right) \cdot P_{01}^{St} - \frac{M(1)}{M(0)} = 0 \quad .$$

Následně vypočteme symetrický vztah pro  $Q_{01}^{St}$ .

Řešení získané standardním postupem, tj. nalezením kořenů kvadratické rovnice, má tvar:

$$(S1) \quad Q_{01}^{St} = \frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \quad ,$$

$$(S2) \quad P_{01}^{St} = \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2}\right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \quad .$$

**poznámka 3** Vzhledem k tomu, že pro přijatelnou ekonomickou interpretaci mají smysl jen kladné hodnoty indexních čísel, je nutno se omezit jen na kladné kořeny kvadratické rovnice. (Výrazy uvnitř odmocnin **(1)** a **(2)** jsou větší než příslušné výrazy před odmocninami.)

Výrazy **(1)**, **(2)** můžeme zapsat formou, která bude obsahovat přímo vektory cen a množství  $p(0), p(1), q(0), q(1)$  - obě indexní čísla

obsahují plnou čtveřici. Dostaneme

$$Q_{01}^{St} = \frac{\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{\sum p_i(0)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)} - \frac{\sum p_i(1)q_i(0)}{\sum p_i(0)q_i(0)}\right)^2}{4} + \frac{\sum p_i(1)q_i(1)}{\sum p_i(0)q_i(0)}}$$

$$= \frac{\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0) + \sqrt{(\sum p_i(0)q_i(1) - \sum p_i(1)q_i(0))^2 + 4 \cdot (\sum p_i(1)q_i(1))(\sum p_i(0)q_i(0))}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

Podobně bychom získali

$$P_{01}^{St} = \frac{\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1) + \sqrt{(\sum p_i(1)q_i(0) - \sum p_i(0)q_i(1))^2 + 4 \cdot (\sum p_i(1)q_i(1))(\sum p_i(0)q_i(0))}}{2\sum p_i(0)q_i(0)}$$

### Modifikovaný Stuelův návrh

Analogicky předchozímu se hledá řešení dvou vztahů (pro obecně jiné neznámé  $P_{01}^{St^*}$ ,  $Q_{01}^{St^*}$ )

$$(A) \quad P_{01}^{St^*} \cdot Q_{01}^{St^*} = \frac{M(1)}{M(0)},$$

$$(B2) \quad Q_{01}^{St^*} - Q_{01}^L = P_{01}^{St^*} - P_{01}^L + \Delta,$$

kde odchylka  $\Delta$  má přesně specifikovaný tvar (interpretovatelný jako „míra nesplnění“ axiomu **(F2)** Laspeyresovými indexními čísly):

$$(B2x) \quad \Delta = P_{01}^L \cdot Q_{01}^L - \frac{M(1)}{M(0)}.$$

Obdobným způsobem jako dříve řešíme soustavu dvou rovnic, přičemž k řešení použijeme opět substituci  $Q_{01}^{St^*} = P_{01}^{St^*} - P_{01}^{St^*} - P_{01}^L + Q_{01}^L + \Delta$ . Po dosazení  $Q_{01}^{St^*}$  z **(B2x)** do **(A)** máme

$$\left(P_{01}^{St^*}\right)^2 - \left(P_{01}^L - Q_{01}^L - P_{01}^L \cdot Q_{01}^L + \frac{M(1)}{M(0)}\right) \cdot P_{01}^{St^*} = \frac{M(1)}{M(0)}$$

a stejně jako dříve odvodíme jinou dvojici indexních čísel, která mají tvar:

$$(S3)$$

$$P_{01}^{St*} = \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L \cdot (1 + P_{01}^L) + \frac{M(1)}{M(0)}}{2} + \sqrt{\left( \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L \cdot (1 + P_{01}^L) + \frac{M(1)}{M(0)}}{2} \right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}$$

**(S4)**

$$Q_{01}^{St*} = \frac{Q_{01}^L \cdot (1 + P_{01}^L) - P_{01}^L - \frac{M(1)}{M(0)}}{2} + \sqrt{\left( \frac{Q_{01}^L \cdot (1 + P_{01}^L) - P_{01}^L - \frac{M(1)}{M(0)}}{2} \right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}}$$

Obě nalezená indexní čísla mohou být rovněž použita k vystižení globální změny cenového a podobně i objemového komoditního indexu. Opět jsou přijatelné pouze kladné kořeny příslušné kvadratické rovnice.

**poznámka 4** Jak je patrné, bylo by možné vyvodit i další indexní čísla, pokud bychom v podmínkách (A) resp. (B1-B2) uvažovali vztahy k jiným než k **Laspeyresovým indexním číslům** (např. k **Paascheho** či k **Edgeworthovým**).

### Ověření Fisherových axiomů u Stuelových čísel

Na závěr ještě vyšetříme, v jaké míře vyhovuje prvá **dvojice Stuelových indexních čísel (S1), (S2)** testům Irvinga Fishera:

Test identity **(F1)** je zřejmě splněn, neboť pro obě **Laspeyresova indexní čísla** platí, že  $P_{00}^L = 1$ ,  $Q_{00}^L = 1$  a výrazy pro  $P_{00}^{St}$ ,  $Q_{00}^{St}$  se

tedy redukuje na odmocninu z podílu  $\frac{M(1)}{M(0)}$ , která je při ztotožnění obou období rovna 1.

Platnost **(F2)** je zřejmá, neboť jde přímo o definiční podmínku **(A)**, na základě níž je dvojice indexů odvozována.

Axiom **(F3)** je u dvojice **Stuvelových indexních čísel (S1), (S2)** rovněž splněn, jak nepřímo ukazuje sám autor. Přímé ověření by vyžadovalo platnost vztahu

$$P_{01}^{St} P_{10}^{St} = \left( \frac{P_{01}^L - Q_{01}^L}{2} + \sqrt{\left( \frac{Q_{01}^L - P_{01}^L}{2} \right)^2 + \frac{M(1)}{M(0)}} \right).$$

$$\left( \frac{P_{10}^L - Q_{10}^L}{2} + \sqrt{\left( \frac{Q_{10}^L - P_{10}^L}{2} \right)^2 + \frac{M(0)}{M(1)}} \right) = 1$$

Po roznásobení dostaneme dosti komplikovaný výraz (k jeho přesnému tvaru nechť se čtenář dopracuje sám), který však po postupném zjednodušování nabude hodnotu 1.

Okružnost **(F4)** není Stuvelovými indexními čísly splněna, což lze ověřit přímým vyšetřením příslušné podmínky.

Naproti tomu axiomy určenosti **(F5)** a souměřitelnosti **(F6)** platí, neboť je splňují Laspeyresova indexní čísla v jejich definici, přičemž též výraz v odmocnině **(S1)** je vždy definován a není identicky nulový (dokonce i kdyby nastala náhodná shoda  $P_{01}^{St} = Q_{01}^{St}$ ). Souměřitelnosti pak vyhovují všechny výrazy vystupující v definici **(S1)**.

Pokud jde o axiom proporcionality **(F7)**, pak zřejmě platí  $P_{01}^{St} = c$ , resp.  $Q_{01}^{St} = d$  pro konstantu  $c$  splňující  $p(1) = c.p(0)$ , resp. konstantu  $d$  splňující  $q(1) = d.q(0)$ .

Platnost **(F8)** je zřejmá.

