Řetězení indexních čísel - Marshallův podnět [1887][1]

U mnoha jinak „kvalitních“ indexních čísel činí **problém nesplnění axiomu okružnosti (F4)**. To platí mj. pro všechna klasická indexní čísla založená na aritmetickém nebo harmonickém průměrování. Způsob, jak této slabině částečně ulehčit, nabízí postup nazývaný ***řetězení* [chaining]**.

Řetězení spočívá v postupném zjemňování dělení mezi dvěma stavy (např. stavem „0“ a stavem „1“) a v následném vyjádření jisté „atomizované“ formy k původnímu indexnímu číslu tak, že se nejprve spočtou „parciální“ indexní čísla mezi jednotlivými body tohoto dělení a tato se poté vzájemně vynásobí. Název tomuto postupu však přisoudil nikoliv A. Marshall, ale až Irving Fisher.

Vyčísleme nejprve hodnotu P_{st} pro jakékoliv dva body (období) z přijatého dělení intervalu základního období „0“ a běžného období označeného „T“, kde toto druhé období odpovídá symbolu „1“ v původním (neděleném) označování. (Při této dočasné úpravě notace je možné zachovat vzestupnou tendenci v označování dělících bodů přirozenými čísly). Platí tedy: $1 \le s < t \le T$.

Definujme nyní **zřetězené indexní číslo** (příslušné nějakému prostému IČ) P^*_{st} výrazem

(1)
$$P^*_{st} = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot .... \cdot P_{t-1,t}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot .... \cdot P_{s-1,s}} ,$$

resp. při $s < t$ (a následném částečném vykrácení zlomku výše) zjednodušeněji jako

(1A)
$$P^*_{st} = P_{s,s+1} \cdot P_{s+1,s+2} \cdot P_{s+2,s+3} \cdot .... \cdot P_{t-1,t} .$$

Buďme si vědomi toho, že jeho hodnota je obecně odlišná od prostého indexního čísla P_{st} .

Podílovou odchylku $D_{st} = \frac{P^*_{st}}{P_{st}}$ mezi zřetězeným a prostým indexním číslem
nazveme **zkreslením při zřetězení**.

[1] **Marshall A.: Remedies for fluctuations of prices. Contemporary Review 1887.**

Lze ukázat, že **postupným zjemňováním dělení mezi body „1“ a „T“ volbou stále více vnitřních dělicích bodů (teoreticky při T→∞) lze postupně zmenšovat hodnotu tohoto zkreslení a přibližovat tak zřetězené indexní číslo výchozímu indexnímu číslu.**

Poznámka 1 Je patrné, že řetězit má smysl především indexní čísla při časovém srovnání (pozorování musí být seřazena v časových posloupnostech), postupu nelze tedy srovnatelně účinně využít pro geografická data.

Poznámka 2 Hlavní bariérou, na kterou zjemňování dělícího intervalu naráží, je přirozená okolnost, že ***statistická data jsou registrována vždy pouze v určitých pevně stanovených časových okamžicích***. Podnikové i makroekonomické ukazatele bývají vykazovány zpravidla v měsíčních nebo čtvrtletních intervalech, pouze výjimečně častěji. Častější vykazování hodnot lze zaznamenat pouze u burzovních indexů (akcií a obligací) a údajů z oblasti měnových kursů, kde jsou dostupná denní, příp. i hodinová data. V jiných oblastech reálné ekonomiky je srovnatelná "hustota" sledovanosti dat nedosažitelná.

Zřetězené indexní číslo vykazuje naopak dvě teoretické přednosti: splňuje totiž Fisherovy ***axiomy okružnosti* (F4)** a ***záměny období* (F3)**, a to i tehdy, když původní indexní číslo těmto testům nevyhovuje. Ukážeme to snadno:

Ověření **(F3)**: Zvolíme např. $s < t$. Potom platí

(2)
$$P_{st}^{*} \cdot P_{ts}^{*} = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot .... \cdot P_{t-1,t}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot .... \cdot P_{s-1,s}} \cdot \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot .... \cdot P_{s-1,s}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot .... \cdot P_{t-1,t}} = 1$$

a podobně při porovnání hodnot ve třech bodech (např. $r < s < t$) snadno ukážeme, že platí ***axiom okružnosti* (F4)**

(3)
$$P_{rt}^{*} = P_{r,r+1} \cdot P_{r+1,r+2} \cdot .... \cdot P_{s-1,s} \cdot P_{s,s+1} \cdot P_{s+1,s+2} \cdot .... \cdot P_{t-1,t} = P_{rs}^{*} \cdot P_{st}^{*} \quad .$$

□.

Poznámka 3 Je zřejmé, že pokud prosté indexní číslo splňuje axiom okružnosti **(F4)**, pak je hodnotou shodné s jemu příslušným zřetězeným indexním číslem (při jakémkoliv dělení), tzn. $P_{st}^{*} = P_{st}$.

Podobně snadno ověříme platnost testů **(F1)** a **(F7)**[2]:

(4) $$P_{ss}^{*} = \frac{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot .... \cdot P_{s-1,s}}{P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \cdot .... \cdot P_{s-1,s}} = 1 \ ,$$

(5) $$P_{st}^{C*} = \frac{c.P_{01} \cdot c.P_{\cdot 12} \cdot c.P_{23} \cdot .... \cdot c.P_{t-1,t}}{c.P_{01} \cdot c.P_{12} \cdot c.P_{23} \cdot .... \cdot c.P_{s-1,s}} = c^{t-s} P_{st}^{*} \ .$$

(Pro případ $t = s+1$ tedy zřejmě dostaneme $P^{C*}{}_{s,s+1} = c.P^{*}{}_{ss}$).
□ .

Jinak však vyšetřování dalších vlastností zřetězených indexních čísel nemusí být jednoduché, resp. tyto vlastnosti budou zpravidla záviset na vlastnostech výchozích prostých indexních čísel.

Otázku, zda preferovat užití indexního čísla prostého (tj. s pevným základem) nebo zřetězeného, nelze obecně zodpovědět. V souvislosti s konstatováním učiněným v souvislosti s testem **(F4)** lze přijmout názor, že pokud pracujeme s indexními čísly, která zacházejí symetricky s vahami (což platí mj. u $P_{01}^{W}, P_{01}^{F}, P_{01}^{E}, P_{01}^{T}$), nezáleží příliš na tom, kterou verzi použijeme, protože při praktickém použití se výsledky budou lišit jen málo.

Pokud statistická metodika obměňuje základ pro výpočet cenových indexů zhruba po 5 - 8 letech a používá uvedené typy indexních čísel, nebude příliš záležet na tom, zda vezmeme index prostý nebo zřetězený. **Ve statistické praxi** však **přetrvává tendence setrvávat na indexech s vahami „nesymetrickými“, což platí o Laspeyresovu i o Paascheho indexu.**

Přirozeně je však nutno přihlížet k dalším okolnostem, jako je *délka užívaných časových řad*, resp. časové odstupy, ve kterých se srovnání provádí, a míře *variability u cen i kvantit mezi jednotlivými obdobími*. Lze-li předpokládat zhruba monotónní vývoj (optimální je pozvolný růst cen i kvantit, nezbytné je vyloučení extrémního kolísání a silných kompenzačních efektů, pokud se tyto odehrají ve srovnávaných obdobích), pak mohou být rozdíly také

[2] Konkrétní podobu testů musíme formulovat v kontextu obecných období *s,t* v *m+1*-bodovém úseku.

u „nesymetrických“ indexních čísel téměř neznatelné. Čím zřetelněji bude pozorována značná rozkolísanost, tím bude nesoulad mezi oběma typy indexů pravděpodobnější.

Poznámka 4 ***von Bortkiewiczův vztah*** lze u některých indexních čísel využít ke zjištění, jakým směrem jsou tato indexní čísla vychýlena při zřetězení, tzn. zda dochází k nějaké systematické odchylce (pouze však u IČ nesplňujících ***test okružnosti*** **(F4)**) při srovnání hodnot prostého a zřetězeného indexního čísla.

Zřetězení Carliho/Sauerbeckova indexního čísla

Nejprve vyjádříme u tohoto indexního čísla příslušné zkreslení při zřetězení. To má tvar

(6)
$$D_{012}^{S} = \frac{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right)}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(0)}}$$

Nyní využijeme již dříve uvedeného vztahu

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i y_i = \overline{xy} + s_x \cdot s_y \cdot r_{xy}$$

v níž uplatníme následující konkretizace vektorů x a y. Pro sledovaný účel vezmeme

$$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad \text{a podobně} \quad y_i = \frac{p_i(2)}{p_i(1)}$$

neboli podíly cenových poměrů komodit vzatých ve dvou po sobě jdoucích úsecích.

Výraz **(6)** tak přejde do tvaru

(7) $$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_i(0)}\cdot\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right)=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(1)}{p_1(0)}\right)\cdot\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(1)}\right)+s_x\cdot s_y\cdot r_{xy}$$

s tím, že na levé straně po zkrácení uvnitř sumace dostaneme $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i(2)}{p_i(0)}$. Nyní vydělíme výraz pro D_{012}^{S} prvním členem pravé strany **(7)**, což je vlastně součin $\bar{x}\cdot\bar{y}$. Po úpravě dostaneme

(8) $$D_{012}^{S}=\frac{1}{1+\dfrac{\left(s_x\cdot s_y\cdot r_{xy}\right)}{\bar{x}\cdot\bar{y}}} ,$$

kde příslušné průměry, směrodatné odchylky a korelační koeficient se vztahují (prostým, neváženým způsobem) k výše definovaným hodnotám x_i a y_i.

S ohledem na dosazené hodnoty x_i a y_i můžeme říci, že výraz ve jmenovateli **(8)** bude menší než 1, neboť znaménko výrazu $\frac{\left(s_x\cdot s_y\cdot r_{xy}\right)}{\bar{x}\cdot\bar{y}}$ závisí jedině na znaménku r_{xy}. Toto znaménko bude v převážné většině situací záporné, neboť lze důvodně předpokládat, že ve dvou po sobě jdoucích obdobích (0→1) a (1→2) - nebudou-li časové odstupy příliš krátké - bude vzestup cen u komodit s podprůměrným růstem v prvém z těchto období následován (s ohledem na tendenci vedoucí k přibližování cenových úrovní) převážně nadprůměrným růstem v navazujícím období. Výraz pro D_{012}^{S} bude proto zpravidla větší než 1 a Sauerbeckovo indexní číslo bude tedy zkresleno směrem nahoru.

Zřetězení Laspeyresova indexního čísla

Obdobně jako v předešlém případě se pokusíme vyjádřit zkreslení indexního čísla D_{012}^{L} výrazem vyskytujícím se na pravé straně **von Bortkiewiczova poměru**. Po zkrácení máme

(10)
$$D_{012}^{L}=\frac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(2)\cdot q_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(1)}\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(0)}}{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(2)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(0)\cdot q_i(0)}}=\frac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(2)\cdot q_i(1)}{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(1)}}{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(2)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{i=1}^{N}p_i(1)\cdot q_i(0)}}\;.$$

Nyní nalezneme vhodnou náplň vektorů x a y a pro váhy w_i, pro kterou by platila relace

(11)
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}w_i x_i y_i}{\overline{x}_w.\overline{y}_w}=1+\frac{s_{xw}.s_{yw}.r_{x,y}}{\overline{x}_w.\overline{y}_w}$$
při

použitém značení

$$\overline{x}_w=\sum_{i=1}^{N}w_i x_i\;,\quad \overline{y}_w=\sum_{i=1}^{N}w_i y_i\;,\quad s_{xw}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}w_i\left(x_i-\overline{x}_w\right)^2}\;,\quad s_{yw}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}w_i\left(y_i-\overline{y}_w\right)^2}\;,$$

a
$$\operatorname{cov}_w(x,y)=\sum_{i=1}^{N}w_i\left(x_i-\overline{x}_w\right).\left(y_i-\overline{y}_w\right)$$

a takovou, při níž by levá strana **(11)** byla vyjádřitelná jako výraz pro zkreslení D_{012}^{L} .

Ukazuje se, že tomuto účelu vyhovují dosazení

(12A)
$$x_i=\frac{p_i(2)}{p_i(1)}$$
a podobně vymezení

$$y_i=\frac{q_i(1)}{q_i(0)}$$

(resp. vice versa) a volba vah w_i ve tvaru

(12B)
$$\frac{p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum\limits_{j=1}^{N}p_j(1)\cdot q_j(0)}\;.$$

Při uvedené konkretizaci dostaneme totiž

(13)

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} w_i y_i\right)} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)} \cdot \dfrac{p_i(2)}{p_i(1)} \cdot \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}}{\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)} \cdot \dfrac{p_i(2)}{p_i(1)}\right) \cdot \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(0)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(1)\cdot q_j(0)} \cdot \dfrac{q_i(1)}{q_i(0)}\right)}$$

,

přičemž po následném zkrácení uvnitř sumací a následně dvou ze tří přítomných výrazů $\sum p_i(1)\cdot q_i(0)$ dospějeme k výrazu rovnému právě D_{012}^L. □

Také v tomto případě lze na základě přítomných výrazů učinit jisté úvahy o očekávaném směru zkreslení. Opět je zřejmé, že směr zkreslení bude záviset na znaménku korelačního koeficientu r_{xy} mezi vektory x a y výše definovanými.

Protože každé x_i vyjadřuje pro příslušnou komoditu cenovou změnu mezi obdobím 1 a 2, potom lze důvodně předpokládat, že ***korelace cenových vektorů mezi obdobími 0→1 a 1→2 bude záporná.*** Na druhé straně lze přinejmenším stejně oprávněně vyslovit tvrzení, že ***korelace v témže období (0→1) mezi cenovými a množstevními změnami bude rovněž záporná.*** Odtud lze tedy dovodit, že ***cenové změny za období 1→2 budou se změnami kvantit v období 0→1 převážně korelovány kladně***.

Z těchto úvah plyne, ***že Laspeyresovo indexní číslo bude (shodně jako Sauerbeckovo) při zřetězení vychýleno směrem nahoru.***

Poznámka 5 S ohledem na skutečnost, že průměrování provádíme s pomocí vah w_i, které mohou více nebo méně pozměnit vliv jednotlivých složek v agregátních součtech, platí výše uvedené vývody pouze s určitou podmíněností.

Zřetězení Paascheho indexního čísla

Obdobnými úvahami o vztazích mezi cenovými a kvantovými změnami v navazujících obdobích bychom dospěli k závěru, že ***Paascheho indexní číslo se při zřetězení chová tak, že se jeho zřetězená verze vychyluje hodnoty oproti přímo určenému číslu směrem dolů.*** Lze to prokázat touto konkrétní volbou vektorů x, y a vah w:

(14) $$x_i = \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \quad , \quad y_i = \frac{q_i(1)}{q_i(2)} \quad , \quad w_i = \frac{p_i(0) \cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0) \cdot q_j(2)} \quad .$$

Vyšetřujeme korelaci poměrových cenových změn v období **0→1** s poměrovými změnami spotřeb během období **1→2** vzatými však v časově obráceném pořadí.

Při zkoumání převažujícího směru korelovanosti obou vektorů lze usuzovat takto:

- **cenové změny uskutečněné během období 0→1 budou negativně korelovány s cenovými změnami v navazujícím období 1→2.** Tyto **následné cenové změny budou opět negativně korelovány s množstevními změnami během téhož období 1→2 (shodná úvaha jako při určení směru zkreslení u Laspeyresova indexního čísla)**. Vzhledem k tomu, že však tentokrát uvažujeme vektor y_i s inverzně zadanými složkami oproti předchozímu případu, bude korelace veličin $\frac{p_i(1)}{p_i(0)}$ a $\frac{q_i(1)}{q_i(2)}$ záporná.

Ověření: odvozením výrazu pro D^P_{012}: Při uvedené konkretizaci x_i, y_i, w_i dostaneme

(15)

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} w_i y_i\right)} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(2)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(2)}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(2)} \cdot \frac{p_i(1)}{p_i(0)}\right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}{\sum_{j=1}^{N} p_j(0)\cdot q_j(2)} \cdot \frac{q_i(1)}{q_i(2)}\right)} =$$

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(2)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}\right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)}{\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)}\right)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(2)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(0)\cdot q_i(1)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} p_i(1)\cdot q_i(2)\right)}$$

Posledně zapsaný výraz je shodný s definičním výrazem pro D_{012}^{P} po zkrácení dvou ze tří výrazů $\sum p_i(0)\cdot q_i(2)$ vyskytujících se v definičním vzorci $D_{012}^{P} = \frac{P_{01}^{\ P} \cdot P_{12}^{\ P}}{P_{02}^{\ P}}$. □ .

U složitějších indexních čísel nelze zpravidla směr tranzitivního zkreslení tak snadno odvodit nebo o něm nelze vůbec vyslovit přiměřeně určitý a ekonomickými důvody podložený závěr.