Preferenční relace a její vlastnosti

Teorie užitku (též ***teorie hodnoty*** nebo ***teorie rovnováhy spotřebitele***), **se zabývá zkoumáním chování** jednoho **typického spotřebitele, který při nákupu dostupných komodit usiluje o maximalizaci svého užitku**, tzn. že - při stejných výdajových možnostech - nakupuje soubor komodit poskytujících mu co největší užitek. Maximalizace se odehrává v prostředí, kde **spotřebitel** musí vycházet z *cen komodit, které jsou utvářeny v rámci tržního prostředí nezávisle na jeho vůli*, a kde **musí** rovněž **přihlížet k velikosti svého příjmu/důchodu**, který má pro tento účel k dispozici a který nesmí překročit.

Preferenční uvažování spotřebitele

Formulace problému: Spotřebitel maximalizuje svůj subjektivně posuzovaný užitek za předpokladu, že při koupi potřebných množství jednotlivých komodit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ zajišťujících mu velikost užitku na požadované úrovni u^* nepřekročí rozpočtové omezení dané jeho disponibilním příjmem M.

Poznámka 1 *Pro následující úvahy není příliš podstatné, jak chápeme veličinu důchod. Ta nemusí být představována pouze příjmem běžného období, ale také dřívějšími úsporami spotřebitele popř. jinými aktivy nebo naopak také budoucími aktivy (půjčkami, budoucími výnosy, rentou, pohledávkami), která mu budou k dispozici později. V dalším textu budeme konkrétní množství komodit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ označovat veličinami $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Definice 1 ***Uvažujme konečnou množinu komodit (statků) $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, z níž provádíme postupně několik výběrů $j = 1, 2, \ldots, r$. Množinu všech možných vybíraných množství /kombinací ze všech komodit nazveme <u>komoditní prostor</u> a označíme jej***

$$X = \left(x^{(j)}, x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)\right), \quad x^{(j)} \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, r$$

Hodnota $x_i^{(j)}$ tedy vyjadřuje množství komodity ζ_i vybírané při j-té variantě výběru. Pro tuto chvíli, (ač to není zásadně důležité), budeme předpokládat (třeba velký) konečný soubor možných výběrů. Každé komoditě ζ_i přiřadíme kladné číslo p_i, které bude vyjadřovat cenu za jednotku fyzického množství *(jednotkovou cenu)* ***této komodity.***

Definice 2 ***Soubor cen p_i všech komodit $\zeta_i, i = 1, \ldots, n$ představovaných vektorem kladných čísel $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, kde každé p_i vyjadřuje jednotkovou cenu i-té komodity ζ_i, a to nezávisle na provedeném výběru nazveme <u>cenovým vektorem</u>. V systému neuvažujeme volné statky, u nichž $p_i = 0$.)***

Přijmeme předpoklad, že spotřebitel musí být pro jakékoliv dvě kombinace komodit, řekněme A a B schopen rozhodnout, která z nich mu přinese vyšší užitek, případně zda užitek jimi poskytnutý bude stejný. Jinými slovy to znamená, že tyto dvě kombinace A, B mohou být co do užitku poskytnutého spotřebiteli rovnocenné (z pohledu spotřebitele jde o indiferentní komodity), nemohou však být nesrovnatelné. *Konkrétněji :*

Předpoklad ***Spotřebitel je schopen vzájemně porovnat libovolné dvě varianty $x^{(i)}, x^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, r$ a*** *(subjektivně)* ***posoudit, která z nich je pro něj výhodnější, popř. jsou-li vzájemně rovnocenné.***

Rozlišovací (binární) relace definovaná na kartéském součinu $X \times X$ **(*tj. pro každou dvojici variant*) má přitom dále uvedené vlastnosti**. Pro značení

použijeme symbol „ ϕ ***„ „ jako symbol neostrého preferenčního uspořádání tj. relace pro dvě srovnávané kombinace zapíšeme*** $x^{(j)} \ \phi \ x^{(k)}$*, přičemž*

symbol „ ϕ **„** čteme jako **„preferováno nebo stejně hodnoceno“.**

Vlastnosti preferenční relace „ ϕ „

Definice 3

(P1) Relace „ ϕ **„ je *reflexívní*** , tzn. **platí** $\boldsymbol{x}^{(j)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(j)}$ **pro libovolné** $\boldsymbol{x}^{(j)}$.

(P2) Relace „ ϕ **„ je *tranzitivní***, tzn.

jestliže $\boldsymbol{x}^{(j)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(k)}$ a $\boldsymbol{x}^{(k)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(l)}$, **potom platí** $\boldsymbol{x}^{(j)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(l)}$

(P3) Relace „ ϕ **„ je *úplná***, tzn. pro všechna $\boldsymbol{x}^{(j)}, \boldsymbol{x}^{(k)}$ **platí** $\boldsymbol{x}^{(j)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(k)}$ **nebo** $\boldsymbol{x}^{(k)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(j)}$**.**
nebo současně obojí (poslední případ znamená indiferentnost/rovnocennost „ ≈ “).

(P4) Relace „ ϕ **„ je *nenasycená (nesaturovaná)***, tzn. neexistuje taková varianta $\boldsymbol{x}^{(j)}$,
která by byla (ostře) nadřazená vůči všem ostatním variantám. Jinými slovy :
Ke každé variantě $\boldsymbol{x}^{(j)}$ **lze nalézt variantu** $\boldsymbol{x}^{(k)}$ **takovou, že platí** $\boldsymbol{x}^{(k)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(j)}$

Tato vlastnost má za následek, že užitková funkce je neklesající a přinejmenším v jednom svém argumentu je rostoucí.

(P5) Relace „ ϕ **„ je *spojitá***, což znamená toto :

Pro jakoukoliv variantu $\boldsymbol{x}^{(j)}$ **definujme dvě množiny**

a) $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ jako **množinu všech variant "přinejmenším stejně dobrých“ jako** $\boldsymbol{x}^{(j)}$"
b) $\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ jako **množinu všech variant "nikoliv lepších než“** $\boldsymbol{x}^{(j)}$" tzn. :

$$\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right) = \left\{\boldsymbol{x}^{(k)};\ \boldsymbol{x}^{(k)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(j)}\right\} \quad , \quad \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right) = \left\{\boldsymbol{x}^{(k)};\ \boldsymbol{x}^{(j)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(k)}\right\}$$

Relace „ ϕ **„ je spojitá právě tehdy, jestliže množiny** $\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ **i** $\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{x}^{(j)}\right)$ **jsou uzavřené**, tj. **součástmi těchto množin jsou i jejich hranice (tj. body, kde platí indiference vůči** $\boldsymbol{x}^{(j)}$).

Tato vlastnost reprezentuje konzistentní způsob uvažování spotřebitele v tom smyslu, že když existuje posloupnost komoditních kombinací $z^{(n)}$ ***takových, že pro kterýkoliv prvek této posloupnosti platí*** $z^{(n)} \phi \, x$ ***, potom také pro limitní bod z této posloupnosti z (pro který*** $z = \lim_{n \to \infty} z^{(n)}$ ***) platí*** $z \ \phi \ x$ ***.***

(P6) Relace „ ϕ **„ je *konvexní***, tzn. platí implikace :

jestliže $\boldsymbol{x}^{(j)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(k)}$ **, potom** $\lambda \cdot \boldsymbol{x}^{(j)} + (1 - \lambda) \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} \ \phi \ \boldsymbol{x}^{(k)}$ **pro libovolné** $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ **.**

(P1) konstatuje samozřejmost, že ***každá komoditní kombinace je vůči sobě „nejméně stejně dobrá“*. Účelem je dosažení rovnocennosti hodnocení kombinace vůči sobě.**

Smyslem vlastnosti **(P2) je dosáhnout uspořádání variant v souladu se zásadou, že je-li varianta A nejméně stejně dobrá jako druhá varianta B a tato druhá nejméně stejně dobrá jako varianta C, pak je i varianta A vždy nejméně stejně dobrá jako varianta C.**

***Úplnost* relace (P3) znamená *vyloučení možnosti nesrovnatelných variant*, tzn. že pro kterékoliv dvě varianty musíme být schopni rozhodnout o jejich vzájemném preferenčním postavení.** Lze tedy také mluvit o axiomu srovnatelnosti.

Vlastnost (P4) je zavedena za účelem vyloučení situace, že by existovala „*absolutně nejlepší*“ varianta, nadřazená všem ostatním. To by znamenalo, že užitek pociťovaný spotřebitelem již nelze žádným způsobem zvýšit.

***Spojitost* (P5) je** nutná **matematická vlastnost, která zajišťuje spojitost užitkové funkce** (v kterékoli komoditní kombinaci). **Zamezuje růstu užitku „skokem“ při nepatrném zvýšení užitých statků.**

***Konvexnost* (P6) preferenční relace není samozřejmá. Zajišťuje** nicméně **vlastnost kvanzikonkávnost užitkové funkce.** Problém spočívá v tom, že **vlastnost reprezentuje konstatování, že "směs" dvou komoditních kombinací nemůže být horší než horší z obou těchto kombinací. Je patrné, že v řadě situací tomu tak být nemusí: Smícháme-li dva nápoje (např. whisky a gin), získaný výsledek málokdy poskytne lepší chuťový dojem, než kterákoliv z obou substancí užívaných samostatně.** Totéž nepochybně platí o mnoha jiných komoditních kombinací spojených s jídlem a pitím.

Spojitost (P5) vázaná k preferenční relaci však pro jiné situace **není** až tak **samozřejmou vlastností**, jak se může na první pohled zdát. Za **protipříklad** můžeme vzít např. tuto relaci:

Definice 4 ***Lexikografická preferenční relace*** je (v kontextu dvou komodit) definována takto:

$$x \succ y \Leftrightarrow \quad [x_1 > y_1] \, nebo \, [x_1 = y_1 \; a \; současně \; x_2 > y_2]$$
$$y \succ x \qquad \text{ve všech ostatních případech}$$

Tvrzení 1 **Lexikografická preferenční relace není spojitá.**
Ověření: **Ukážeme, že nelze najít komoditní kombinaci (z_1, z_2), která by byla odlišná od**

(x_1, x_2) a která by byla vůči (x_1, x_2) indiferentní.

a) Jestliže $x_1 \neq z_1$, pak bude $z = (z_1, z_2)$ ostře lepší nebo ostře horší než $x = (x_1, x_2)$ -

b) Jestliže $x_1 = z_1$, pak bude $z = (z_1, z_2)$ opět ostře lepší nebo ostře horší než $x = (x_1, x_2)$ v závislosti na hodnotě druhého argumentu.

Další možnost zřejmě není, indiference tedy nelze dosáhnout.

Důsledkem tvrzení je skutečnost, že k lexikografické preferenční relaci nelze vyjádřit indiferenční křivky jako souvislé vícebodové množiny. Pro libovolnou hladinu užitku $u > 0$ je „indiferenční křivka“ degenerovaná jednobodová množina. Obecněji můžeme na věc pohlížet tak, jakoby měla

„jednodimenzní“ indiferenční křivka „příliš málo“ bodů pro jednoznačné zobrazení kartéského součinu $X_1 \otimes X_2$ na ni. V našem případě jde o zobrazení $E_2 \to E_1$.

Zesílení konvexnosti **(P6)** udává

Definice 5 **(P6s) Relace „ $\underline{\phi}$ „ je *ryze konvexní*, jestliže platí** implikace:

Jestliže $\mathbf{x}^{(j)} \ \underline{\phi} \ \mathbf{x}^{(k)}$, potom $\lambda \cdot \mathbf{x}^{(j)} + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}^{(k)} \ \phi \ \mathbf{x}^{(k)}$ pro libovolné $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$,

Touto podmínkou vyloučíme z uvažování „lineární úseky“ na indiferenčních křivkách a ***dosáhneme jednoznačnosti určení rovnovážných bodů.***

Ještě razantnějšího zesílení konvexnosti bychom dosáhli touto definicí:

Definice 6 **(P6ss) Relace „ $\underline{\phi}$ „ je *striktně konvexní***, jestliže platí implikace:

Jestliže $\mathbf{x}^{(j)} \ \phi \ \mathbf{x}^{(k)}$, potom $\lambda \cdot \mathbf{x}^{(j)} + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}^{(k)} \ \underline{\phi} \ \mathbf{x}^{(j)}$ pro libovolné $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$,

kterou můžeme vyjádřit jako **požadavek, aby užitek z komoditní kombinace, která jakýmkoliv způsobem směšuje statky zastoupené v kombinacích $x^{(k)}, x^{(j)}$ nebyl menší než dokonce lepší z obou variant.** V přeneseném smyslu (vztaženo k příslušné vlastnosti užitkové funkce) lze mluvit o ***axiomu*** resp. ***vlastnosti různorodosti či pestrosti***. Jak je ovšem zřejmé, jde o nepřiměřeně silný a málo realistický požadavek. Těžko bychom hledali oblast praktického života, ve které by byl uplatnitelný (snad jen v omezeném okruhu módního oděvního zboží posuzováno očima extravagantních konzumentů).

Zeslabení nenasycenosti **(P4)** udává

Definice 7 **(P4w) Relace „ $\underline{\phi}$ „ je *lokálně nenasycená***, jestliže platí:

Pro každou variantu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ existuje okolí $S_\delta(x)$ bodu x, takové, že aspoň pro jedno $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $z \in S_\delta(x)$ platí $z \ \phi \ x$..

Význam vlastnosti (P4w) níže ukážeme v souvislosti s existencí rovnovážného bodu na množině rozpočtového omezení.

Zesílení spojitostí **(P5)** udává

Definice 8 Rovněž spojitost preferenční relace může být zesílena v několika směrech. Jeden z nich představuje tzv.

axiom nezávislosti Jestliže $x \phi y$ a $\lambda \in (0,1>$, pak

(P7) $\lambda.x + (1-\lambda).z \ \phi \ \lambda.y + (1-\lambda).z$ pro všechna z

Druhým pak je tzv.

archimédovský axiom Jestliže máme komoditní kombinace v relacích $x \ \phi \ y \ \phi \ z$, pak existují konstanty $\lambda, \mu \in (0,1)$ takové, že platí

(P8) $$\lambda.x + (1-\lambda).z \succ y \succ \mu.x + (1-\mu).z$$

Poznámka 2 Rovnocennou definici konvexnosti bychom dostali touto formulací: Preferenční uspořádání se nazývá ***konvexní***, jestliže dolní obrysová množina

$L\left(\mathbf{x}^{(j)}\right) = \left\{\mathbf{x}^{(k)};\ \mathbf{x}^{(k)} \succeq \mathbf{x}^{(j)}\right\}$ je konvexní pro všechna $x^{(k)} \in X$.

Symetrie, antisymetrie, indiference

Definice 9 ***Ostrou preferenční relaci*** **"$\succ$" získáme doplněním neostré preferenční relace "$\succeq$" o** dodatečnou vlastnost *antisymetrie*.

(P9) ***Antisymetrie***

Varianta $\mathbf{x}^{(j)}$ je ostře preferována před variantou $\mathbf{x}^{(k)}$- ve značení $\mathbf{x}^{(j)} \succ \mathbf{x}^{(k)}$ **jestliže platí $\mathbf{x}^{(j)} \succeq \mathbf{x}^{(k)}$, avšak nikoliv $\mathbf{x}^{(k)} \succeq \mathbf{x}^{(j)}$.**

Protikladem *antisymetrie* pak bude vlastnost

Definice 10 ***Symetrie***

(P10) Jestliže platí $\mathbf{x}^{(j)} \succeq \mathbf{x}^{(k)}$, pak vždy také platí $\mathbf{x}^{(k)} \succeq \mathbf{x}^{(j)}$.

Poznámka 3 **Pokud platí obě podmínky v (P10)** , pak **řekneme, že**

Varianta $\mathbf{x}^{(j)}$ je indiferentní vůči variantě $\mathbf{x}^{(k)}$ **, a značíme $\mathbf{x}^{(j)} \approx \mathbf{x}^{(k)}$**

Ekvivalence vs. uspořádání

Definice 11 Binární relace, splňující vlastnosti **(P1)**, **(P2)** a **(P10)** se nazývá ***ekvivalence***. **Je** tedy současně ***reflexívní***, ***symetrická*** **a** ***tranzitivní***. (Značí se např. „$\cong$„)

Definice 12 Binární relace, která splňuje vlastnosti **(P1)** a **(P2)** se nazývá ***částečné uspořádání***. Je to tedy relace s vlastnostmi ***reflexivity*** a ***tranzitivity***.

Definice 13 Binární relace splňující **(P1),(P2),(P3)** se nazývá ***úplné uspořádání***. Je to tedy relace s vlastnostmi ***reflexivity, úplnosti*** a ***tranzitivity***.

Zatímco smyslem zavedení ***relace ekvivalence*** je především jistá kategorizace prvků/variant do tříd obsahujících prvky z jistého hlediska podobné, je účelem uplatnění ***relace uspořádání*** (***částečného*** či ***úplného***) dosažení *seřaditelnosti* prvků/variant podle nějak zvoleného kritéria, které obsahují. (Přítomnost vlastnosti (P1) naznačuje, že takto definované uspořádání je *neostré).*

Definice 14 **Preferenční uspořádání** se nazývá ***monotónní***, jestliže situace, kdy platí $\mathbf{x}^{(j)} \succeq \mathbf{x}^{(k)}$ a současně $\mathbf{x}^{(j)} \neq \mathbf{x}^{(k)}$, znamená vždy $\mathbf{x}^{(j)} \succ \mathbf{x}^{(k)}$.

Monotónnost vylučuje možnost existence ekvivalentních tříd*, ve kterých by bylo více různých vzájemně indiferentních prvků. Vlastnost udává, že u kteréhokoli zboží je preferováno jeho větší množství , což znamená, že všechna zboží jsou žádoucí.*

Tvrzení 2 *Užitková funkce odvozená z monotónního uspořádání je rostoucí.*

Vyvození užitkové funkce

Definice 15 **Přiřadíme-li každé variantě $\mathbf{x}^{(k)}$ číslo $u\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \in R_1^+$, získáme tak funkci přiřazující každému bodu komoditního prostoru X hodnotu, kterou nazveme *užitek.***

Tato ***užitková funkce*** $u(x)$ **přiřazuje lepší variantě $\mathbf{x}^{(j)}$ větší hodnotu $u\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)$** oproti **horší variantě $\mathbf{x}^{(k)}$, které přiřazuje menší hodnotu** $u\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$ v souladu se vztahem

$$\mathbf{x}^{(j)} \succeq \mathbf{x}^{(k)} \Leftrightarrow u\left(\mathbf{x}^{(j)}\right) \geq u\left(\mathbf{x}^{(k)}\right).$$

V případě, že jsou obě varianty indiferentní, tzn. platí $\mathbf{x}^{(j)} \succeq \mathbf{x}^{(k)}$ a současně $\mathbf{x}^{(k)} \succeq \mathbf{x}^{(j)}$, budou hodnoty užitku při obou variantách stejné tj.

$$u\left(\mathbf{x}^{(j)}\right) = u\left(\mathbf{x}^{(k)}\right).$$

Přijmeme úmluvu, že komoditní prostor je tvořen *kartéským součinem* uzavřených intervalů $X_1 \times X_2 \times .... X_n$, kde každý interval $X_i =< 0, \theta_i$), přičemž pravé krajní body těchto intervalů jsou tvořeny buď konečnými hodnotami nebo neomezenou hodnotou „$+\infty$„. Intervalové uvažování přípustných hodnot komodit ve svém důsledku znamená, že množství každé komodity budeme považovat za neomezeně dělitelnou (a nezápornou **) veličinu a rovněž to, že z komoditního prostoru můžeme provádět nekonečně mnoho opakovaných různých výběrů.**

Reálný problém omezené dělitelnosti

Zdaleka ne každá ekonomicky posuzovaná komodita má vlastnost neomezené dělitelnosti. To nečiní podstatnější problém v případě, kdy ji oceňujeme peněžně (dělení v principu diskrétní veličiny je zde „dostatečně jemné“), avšak v případě naturálního vyjádření to může přinést i hrubé odchýlení se od skutečnosti. Měříme-li užitek, který spotřebiteli přináší elektrospotřebič, vozidlo či objekt bydlení, jsme při popisu množství komodity odkázáni na vyjádření v přirozených číslech (které je typicky diskrétního charakteru), přičemž přechod např. ke zlomkovému vyjádření by s ohledem na celistvost užitné hodnoty věci byl sotva rozumně interpretovatelný. Podobných „protipříkladů“ nalézáme ostatně mnoho i mezi předměty zřetelně nižší peněžní hodnoty (oděvy, kancelářské potřeby, hračky, tkaničky od bot apod.).

„Zespojitění“ komoditního prostoru, popř. omezení oboru hodnot každé komodity zprava na prakticky uvažovatelný rozsah je tedy provedeno především z důvodu matematické účelnosti, mj. k možnosti definovat řadu pojmů marginální ekonomicko-matematické analýzy s použitím spojitosti a diferencovatelnosti (užitkové) funkce.