Teorie produkce

Teorie produkce je další z oblastí matematické ekonomie, v níž matematické nástroje slouží k formalizaci mikroekonomické teorie. Analyzuje se zde chování typického výrobního ekonomického subjektu (firmy), který usiluje o racionální fungování výrobního procesu v tržním prostředí, kde ceny výrobních faktorů, příp. výrobků jsou určeny mimo vůli výrobce, jsou tedy považovány za exogenní veličiny. Soubor *výrobních faktorů* v rámci uvažované technologie (*souborů výrobních postupů*, *zkušeností*, *informací*, *know-how*) vede k dosažení určité úrovně produkce (*výroby*, *výstupu*, *outputu*). Výrobce přitom primárně usiluje o maximalizaci ziskové stránky výroby tzn. o maximalizaci rozdílu mezi objemem tržeb z prodaných výrobků a mezi s výrobou souvisejícími výrobními náklady.

Zatím ponecháme stranou cenová hlediska a soustředíme se na ”technologickou” stránku výrobního procesu. Popíšeme elementární vlastnosti, které charakterizují abstraktně chápaný výrobní vztah, pomocí něhož se výrobní faktory transformují v rámci dané technologie do celkové produkce. Tento vztah nazýváme *produkční funkcí*. Později k tomuto připojíme analýzu cenově-nákladové stránky výroby, abychom mohli zkoumat zákonitosti, které v daném prostředí platí mezi uvažovanými ekonomickými kategoriemi. V některých směrech zde spatříme obdobu ekonomických funkčních typů, se kterými jsme se dříve setkali v prostředí analýzy spotřebitelské poptávky.

1. Produkční množiny, produkční funkce

Nejprve zavedeme základní pojmový aparát umožňující na základě množinových kategorií (tzv. produkčních množin vstupů, popř. výstupů) zavést pojem **produkční funkce**. Omezíme se na výrobní vztahy v naturálním pojetí, zatím bez zavedení cenových vektorů (výrobních činitelů, resp. výrobků).

Produkční funkce však není výchozím, fundamentálním pojmem. Lze uplatnit složitější analytický aparát (tzv. produkční korespondence, či relace) který však překračuje rámec aktuální potřeby výkladu. Tyto pojmy poprvé důkladně vyšetřoval počátkem 50.let americký matematický ekonom prof. **Ronald W.Shephard**, který při teoretické analýze elementárních vlastností produkčních vztahů dospěl k možnosti popsat strukturu vlastností produkčních množin axiomaticky.

Definice 1

Uvažujeme-li konkrétní hodnotu velikosti produkce $\mathbf{y}^0 > 0$, pak pro danou technologii je příslušná **produkční množina vstupů** [production input set] $\mathbf{L}(\mathbf{y^0})$ definována jako množina kombinací všech výrobních faktorů, s nimiž lze v dané technologii dosáhnout produkce $\mathbf{y}^0$. Jestliže této technologii odpovídá konkrétní produkční funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, lze $\mathbf{L}(\mathbf{y}^0)$ vyjádřit jako

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}^0) = \{\mathbf{x}\,;\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{y}^0\}$$

V produkční množině vstupů jsou - jak patrno z definice - obsaženy i neefektivní kombinace výrobních faktorů (faktory jsou přítomny ve větších množstvích, než je nutné k dosažení produkce $\mathbf{y}^0$). Je proto účelné se v další analýze zaměřit jen na hraniční body množiny $\mathbf{L}(\mathbf{y}^0)$, případně na oblasti těchto bodů, vyznačující se úsporným nakládáním s výrobními faktory ve vztahu k požadované úrovni produkce.

Definice 2

Izokvanta [Isoquant] $\mathbf{Q}(\mathbf{y}^0)$ (na hladině produkce $\mathbf{y}^0$) produkční množiny vstupů $\mathbf{L}(\mathbf{y}^0)$ je definována jako

$$\mathbf{Q}(\mathbf{y}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{L}(\mathbf{y}^0); \Theta \cdot \mathbf{x} \notin \mathbf{L}(\mathbf{y}^0) \qquad \text{pro skalární } \Theta \in (0,1)\}$$

Jde tedy o množinu hraničních bodů produkční množiny vstupů, vymezující takové kombinace výrobních faktorů, které jsou v níže uvedeném smyslu postačující pro dosažení produkce na úrovni $\mathbf{y}^0$. Izokvantu ve vztahu k produkční funkci se chápat jako obdobu indiferenční křivky vůči užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Jinak ale produkční funkce vzhledem k objektivní možnosti měřit velikost produkce (peněžně i naturálně) se od užitkové funkce liší mj. právě svým kardinálním vymezením.

Definice 3

Účinná (efektivní) podmnožina [efficient subset] $\mathbf{E}(\mathbf{y^0})$ produkční množiny vstupů je daná definicí

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{L}(\mathbf{y}^0), \mathbf{z} \leq \mathbf{x} (\text{ avšak } \mathbf{z} \neq \mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{z} \notin \mathbf{L}(\mathbf{y}^0)\}$$

Účinná podmnožina $\mathbf{E}(\mathbf{y}^0)$ reprezentuje takové varianty nasazení výrobních faktorů, při kterých jsou tyto faktory vynakládány právě v minimálních nutných množstvích.

Abychom si lépe uvědomili rozdíl mezi *izokvantou* a *účinnou podmnožinou* (téže *produkční množiny vstupů* $\mathbf{L}(\mathbf{y}^0)$), všimněme si, že bod $\mathbf{x}$ leží na izokvantě $\mathbf{Q}(\mathbf{y}^0)$ právě tehdy, neexistuje-li žádný jiný bod $\mathbf{z}$, který by byl jeho proporčním zmenšením (ležel by tedy na polopřímce spojující počátek souřadnic s bodem $\mathbf{x}$ nacházejícím se na izokvantě) a který by rovněž na této izokvantě ležel. Naproti tomu bod (tzn. kombinace výrobních faktorů) $\mathbf{x}$ účinné podmnožiny produkční množiny vstupů $\mathbf{E}(\mathbf{y}^0)$ nemůže být "zmenšen" v žádném směru rovnoběžném s osami souřadnic (aby tímto zmenšením vzniklý jiný bod z ještě ležel na účinné podmnožině). Bod účinné podmnožiny musí být bodem izokvanty, zatímco opačně tomu tak být nemusí.

Poznámka 1

Jednou z typických vlastností množiny $\mathbf{L}(\mathbf{y}^0)$ je její konvexnost, která připouští technologie dělitelné v čase. Jestliže $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ náleží do $\mathbf{L}(\mathbf{y}^0)$, pak lze produkce $\mathbf{y}^0$ dosáhnout tak, že po dobu λ používáme faktory v kombinaci $\mathbf{x}$ a po zbývající časový úsek $(1-\lambda)$ v kombinaci $\mathbf{z}$.

Stejně jako vymezuje produkční funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ soustavu produkčních množin vstupů, lze také obráceně pomocí posloupnosti produkčních množin vstupů $\mathbf{L}(\mathbf{y})$ s vhodnými vlastnostmi definovat produkční funkci $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ vztahem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{Max}\{\mathbf{y}; \mathbf{x} \in \mathbf{L}(\mathbf{y})\}$$

Produkční funkce je definována - při vhodných vlastnostech produkčních množin vstupů jako je jejich uzavřenost a konvexnost pro každou úroveň produkce, prázdný průnik těchto množin při $\lim \mathbf{y} \to \infty$, tj. při neomezeně rostoucí produkci - **jako maximální** dosažitelný **výstup, disponujeme-li** danou **množinou výrobních faktorů** $\mathbf{x}$.

2 Vlastnosti obecné produkční funkce

Na základě podrobné teoretické analýzy provedené v 50.letech **Ronald W.Shephard**em, lze pro obecnou produkční funkci $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ přijmout tuto (axiomatickou) soustavu vlastností:

(P1) $\mathbf{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$; tj. hodnototvorný výrobní proces může být realizován pouze s kladnými hodnotami (aspoň některých) výrobních faktorů.

(P2) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je konečná reálná a nezáporná funkce proměnných $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ při jakýchkoliv konečných hodnotách výrobních faktorů vzatých z nezáporných definičních oborů $\mathbf{X}_j=\langle 0,+\infty)$ pro všechna $\mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{n}$.

(P3) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je neklesající funkce v každé proměnné. Přidáním množství kteréhokoliv výrobního faktoru nemůže dojít k poklesu produkce. Připouští se však, že mezní produktivita určitého faktoru v některé výrobní situaci může být nulová, tzn. že ne vždy vede zvýšení množství použitého výrobního faktoru k růstu produkce.

(P4) Existuje-li taková kombinace výrobních faktorů $\mathbf{x}>\mathbf{0}$ nebo $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$, že $\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x})>\mathbf{0}$ pro nějaké skalární $\boldsymbol{\lambda}>\mathbf{0}$, pak

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mathbf{F}(\lambda\mathbf{x})=+\infty$$

Předpoklad charakterizuje vlastnost neomezeného růstu produkce, jestliže proporcionálně zvětšujeme množství faktorů v kombinaci, která poskytuje nenulový výnos.To např. vylučuje uplatnění (jako produkčních) funkcí, které se blíží k "asymptotě" rovnoběžné s některou ze souřadnicových os.

(P5) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je shora polospojitá funkce v celém definičním oboru.
Vzhledem k předpokladu (P3) lze ekvivalentně mluvit o polospojitosti zprava. Vlastnost přiblížíme definicí z matematické analýzy :
Funkce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je polospojitá shora (tj. je-li neklesající, zprava) v bodě $\mathbf{x}^0\in\mathbf{E}_n$, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje okolí $\mathbf{S}\delta(\mathbf{x}^0)$ takové, že pro všechna $\mathbf{x}\in\mathbf{S}\delta(\mathbf{x}^0)$ platí $\mathbf{F}(\mathbf{x})<\mathbf{F}(\mathbf{x}^0)+\varepsilon$.

Pro uvažované výrobní situace to znamená, že za určitých okolností může dojít ke skokům v růstu produkce (při přidání "nepatrně malého" množství některého z výrobních činitelů). Vlastnost koresponduje s připuštěním "kvalitativních změn v technologii" majících příčinu např. v technických inovacích (spíše půjde o změny na straně "kapitálu" či "technického pokroku" než v práci či surovinách).

(P6) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je kvazikonkávní funkce v celém definičním oboru. Formálně vyjádřeno platí nerovnost

$$\mathbf{F}(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{z})\geq\mathbf{Min}[\mathbf{F}(\mathbf{x}),\mathbf{F}(\mathbf{z})]$$

pro libovolnou dvojici bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ z definičního oboru produkční funkce a libovolné λ z intervalu $(0,1)$. Vlastnost je přímým důsledkem konvexnosti produkčních množin vstupů a garantuje udržení produkce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ při přechodu mezi dvěma faktorovými kombinacemi aspoň v té výši, která odpovídá méně produktivní faktorové kombinaci.

Konečně poslední vlastností, která se váže nikoliv k produkční funkci,nýbrž k účinné podmnožině, je Shephardem formulovaný, tzv. “asymetrický” axiom:

(P7*) Účinná podmnožina $\mathbf{E}(\mathbf{y}^{0})$ produkční množiny vstupů $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{0})$ je ohraničená pro jakoukoliv hodnotu produkce $\mathbf{y}^{0}$.

Znamená to, že množiny $\mathbf{E}(\mathbf{y})$ jako účinné části izokvant $\left[\mathbf{E}(\mathbf{y}^{0}) \subset \mathbf{Q}(\mathbf{y}^{0})\right]$ jsou ohraničené křivky.

Uvedený axiom se nazývá asymetrický mj. proto, že jeho platnost není vyžadována pro analogicky k $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{0})$ zkonstruované produkční množiny výstupů $\mathbf{P}(\mathbf{x}^{0})$.

Většina funkčních tvarů užívaných k popisu produkčních vztahů jako analytické vyjádření produkční funkce, však tento asymetrický axiom nesplňuje.

Poznámka 2

V obecném schématu *produkčních korespondencí*/produkčních relací se pracuje s ***n*** výrobními faktory a **m** výrobky.

Produkční množina vstupů $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{0})$ obsahuje všechny možné vstupy (kombinace výrobních faktorů $\mathbf{x}$), s nimiž je dosažitelný výstup (hodnota produkce) $\mathbf{y}^{0}$.

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}^{0}) = \{\mathbf{x}; (\mathbf{x},\mathbf{y}^{0}) \in \mathbf{Z}(\mathbf{x},\mathbf{y})\}$$ [1]

Vlastnosti produkční množiny vstupů $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{0})$

(L7) $0 \notin L(y)$ pro žádné $y > 0$.
S nulovou kombinací výrobních faktorů nelze dosáhnout kladnou velikost produkce.
(L2) $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{0})$ je uzavřená, ohraničená množina.
Izokvanta je vždy součástí produkční množiny vstupů

(L3) $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{0})$ je konvexní množina.
Úsečka spojující dvě faktorové kombinace je součástí produkční množiny vstupů.

(L4) Jestliže $\lim y^{t} = +\infty$, pak $\bigcap_{t=1}^{\infty} L(y^{t}) = \emptyset$

Průnik produkčních množin vstupů je prázdná množina Neexistuje žádná konečná kombinace výrobních faktorů poskytujících nekonečně velkou hodnotu produkce.

(L5) Pro $\mathbf{y}^{2} \geq \mathbf{y}^{1} \geq \mathbf{0}$ platí $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{2}) \subseteq \mathbf{L}(\mathbf{y}^{1})$ vnořování
Dosáhneme-li s určitou kombinací výrobních faktorů určité úrovně produkce, dosáhneme s ní vždy i jakoukoli nižší hodnotu produkce.

(L6) Jestliže $\mathbf{x} \in \mathbf{L}(\mathbf{y})$ **a** $\mathbf{x}^{*} \geq \mathbf{x}$, pak platí $\mathbf{x}^{*} \in \mathbf{L}(\mathbf{y})$

(L7) Jestliže (a) $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ nebo (b) $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ a $\bar{\boldsymbol{\lambda}}.\mathbf{x} \in \mathbf{L}(\bar{\mathbf{y}})$ pro nějaké $\bar{\boldsymbol{\lambda}} > \mathbf{0}$, pak paprsek $\{\boldsymbol{\lambda}.\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\}$ protíná množiny $\mathbf{L}(\mathbf{y})$ pro všechna $\mathbf{y} \in <\mathbf{0},+\infty)$.

---

[1] Zápisem **Z(x,y)** rozumíme množinu výrobních možností, tj. množinu dvojic (vektorů) **x**,**y**, kde výstupy **x** jsou dosažitelné s vstupy **y**.

Produkční množina výstupů $\mathbf{P}(\mathbf{x}^0)$ obsahuje všechny možné výstupy (kombinace výrobků $\mathbf{y}$), které jsou dosažitelné (vyrobitelné) pomocí vektoru výrobních faktorů $\mathbf{x}^0$.

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{y}; (\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) \in \mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$$

Vybrané vlastnosti produkční množiny výstupů $\mathbf{P}(\mathbf{x}^0)$

(L1) $\mathbf{P}(\mathbf{x}^0)$ je uzavřená množina.
Izokvanta je vždy součástí produkční množiny výstupů.

(L2) $\mathbf{P}(\mathbf{x}^0)$ je konvexní množina.
Úsečka spojující dvě faktorové kombinace je součástí produkční množiny výstupů.

(L3) Jestliže $\lim \mathbf{x}^{\mathbf{t}} = +\infty$, potom $\bigcup_{t=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{t}}) = E_n^{+}$. Sjednocením všech produkčních množin vstupů je celý nezáporný orthant. Zvětšujeme-li bez omezení množství všech výrobních faktorů, není velikost produkce shora limitována žádnou hranicí.

(L4) Pro $\mathbf{x}^{\mathbf{2}} \geq \mathbf{x}^{\mathbf{1}}$ platí $\mathbf{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{1}}) \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{2}})$ vnořování
Dosáhneme-li s určitou kombinací výrobních faktorů určité úrovně produkce, dosáhneme s většími hodnotami faktorů vždy aspoň stejnou hodnotu produkce.

(L5) $0 \in \mathbf{P}(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
Triviální konstatování, že nulová produkce je součástí produkční množiny výstupů: K výrobě „ničeho“ mohou být uplatněny výrobní faktory v jakýchkoliv množstvích (i nulových)..