

5.4 Nákladová minimalizace

Uvažujme minimalizační problém, v němž jsou nezáporné jednotkové ceny výrobních faktorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ určeny exogenně jako vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, tedy

$$(5.18) \quad \min_{x_i} \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad \text{za}$$

podmínky, že dosahovaná úroveň produkce je rovna (alespoň) y^0 , tj. $F(x) \geq y^0$. K tomu připojíme obvyklé podmínky nezápornosti množství výrobních faktorů $x_i \geq 0$.

Pohledme na tuto optimalizační úlohu jako na problém nalézt vázaný extrém funkce a proměnných $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (při pevných cenách/parametrech). Optimálního stavu (stavu rovnováhy) lze dosáhnout ve dvou krocích. Nejprve předpokládejme, že je dán objem produkce y^0 a ceny výrobních faktorů $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Spotřeba faktorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je taková, že výrobní náklady px jsou minimální za podmínky, že $F(x) = y^0$.

Tuto minimalizační úlohu lze řešit, jak známo, např. pomocí *metody Lagrangeových multiplikátorů*. S ohledem na jedinou omezující podmínku zde postačí jeden multiplikátor. Označíme ho λ . Znamená to minimalizovat výraz tvaru

$$(5.19) \quad H(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i x_i - \lambda \cdot (F(\mathbf{x}) - y^0) \quad \text{při daných } y^0, p_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Derivacemi podle jednotlivých $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ a jejich anulováním obdržíme postupně soustavu podmínek nutných pro rovnováhu :

$$(5.20) \quad \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial x_i} = p_i - \lambda \cdot F_i(x) = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(5.20A) \quad \frac{\partial H(x, \lambda)}{\partial \lambda} = F(x) - y^0 = 0$$

Z (5.20a) dostaneme poptávkové funkce $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ jako funkce parametrů $y^0, p_1, p_2, \dots, p_n$. Tyto funkce musí splňovat podmínky nutné pro rovnovážný stav :

$$(5.21) \quad \frac{p_i}{F_i(x^*)} = \lambda. \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(5.21A) \quad \text{tj. } \frac{p_1}{F_1(x^*)} = \frac{p_2}{F_2(x^*)} = \dots = \frac{p_n}{F_n(x^*)} = \lambda$$

za vedlejší podmínky $F(x) = y^0$. Výrobní náklady $\sum p_i x_i$ jsou tedy rovněž funkcí parametrů y^0 a p . Tyto podmínky vyjadřují požadavek, aby podíl mezní produktivity každého výrobního faktoru a jeho jednotkové ceny byl konstantní pro všechny faktory. Převrácené hodnoty těchto (stejných) podílů jsou rovny multiplikátoru λ .

Poznámka 1 Podmínky (5.21) můžeme interpretovat prostřednictvím pojmu **parciální mezní náklady**. Jde o podíl změny $p_i dx_i$ na celkových nákladech a příslušné změny $F_i dx_i$ v objemu produkce (znamená to malou změnu x_i , přičemž ostatní $x_j, j \neq i$ zůstávají beze změny. Platí totiž

$$\frac{\frac{\partial \sum p_i x_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}} = \frac{p_i}{F_i(x)}$$

Poznámka 2 Všimněme si dále, že platí $\partial C / \partial y = \lambda$.

ověření: Poptávkové funkce (vyjádřené pro rovnovážný bod) jsou zřejmě funkcí cenového vektoru p a stanovené úrovně produkce y . Můžeme tedy psát $x_1 = x_1(y, p), x_2 = x_2(y, p)$. Ze zápisu produkční funkce máme

$$F(x_1(y, p), x_2(y, p)) = y$$

Provedeme-li ne obou stranách parciální derivace podle y , dostaneme

$$F_1 \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + F_2 \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 1$$

Z nutných podmínek pro rovnovážný bod pak vyplývá

$$\frac{p_1}{\lambda} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{p_2}{\lambda} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 1$$

Vynásobením obou stran rovnice λ dostáváme

$$p_1 \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = \lambda$$

Protože dále platí

$$C(y, p) = p_1 x_1(y, p) + p_2 x_2(y, p) \quad ,$$

zřejmě máme

$$\frac{\partial C(y, p)}{\partial y} = p_1 \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + p_2 \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = \lambda \quad .$$

Postačující podmínky (zajišťující minimalizaci výrobních nákladů) mají tvar, *mutatis mutandis*, jako v případě maximalizace užitkové funkce. Rozdíl je dán tím, že zde řešíme úlohu nalezení minima. Aby byla minimalizována hodnota výrobních nákladů, je nutné, aby **druhý diferenciál** níže definované **kvadratické formy** $d^2 H(x^*, \lambda)$ **vyčíslený v bodě** x^* **byl záporný** pro všechna dx_i , ne všechna nulová:

$$(5.22A) \quad d^2 H(x^*, \lambda) = -\lambda \cdot \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n F_{jk}(x^*) dx_j dx_k \right] > 0.$$

a to pro všechna dx_j propojená vedlejší podmínkou

$$(5.22B) \quad \sum_{i=1}^n F_i(x^*) \cdot dx_j = 0.$$

Tato vedlejší podmínka je odvozena diferencováním ze vztahu $F(x^*) = y^0$

Podmínka (5.21A) je zřejmě ekvivalentní požadavku, aby platila (při kladném λ , což plyne z (3.20)) nerovnost

$$(5.23A) \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n F_{jk}(x^*) dx_j dx_k < 0.$$

pro všechna dx_j provázaná zmíněnou vedlejší podmínkou.

$$(5.23B) \quad \sum_{i=1}^n F_i(x^*) \cdot dx_j = 0.$$

Převědeme-li – obdobně jako v případě užitkové funkce – výše uvedené podmínky na vlastnost (symetrické) matice Φ , vzniklé z matice druhých parciálních derivací produkční funkce $F(x)$ ovroubením **gradientním vektorem** v prvním řádku a prvním sloupci (a s nulovým levým horním prvkem), lze požadavek na existenci extrému v bodě x^* vyslovit ekvivalentně jako požadavek na **střídání znamének konečné posloupnosti hlavních minorů matice Φ^1** , tj.

$$(5.24) \quad (-1)^k \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{k1} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1k} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} & \dots & F_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_k & F_{1k} & F_{2k} & \dots & F_{kk} \end{vmatrix} > 0. \quad k = 2, 3, \dots, n$$

Pokud tedy má daná kombinace množství výrobních faktorů x^* vést k minimalizaci výrobních nákladů, musí s přidáním každého výrobního faktoru (bez ohledu na pořadí jejich výběru) dojít ke změně znaménka takto zvětšeného **hlavního minoru matice Φ** (s kladnou hodnotou pro dva výrobní faktory) vyčíslené v této uvažované faktorové kombinaci x^* . Není-li tomu tak, bod x^* minimem být nemůže.

Na nákladovou minimalizaci navazuje jako druhý krok maximalizace zisku. Tu provedeme tak, že při dané jednotkové ceně výrobku q stanovíme rozsah výroby tak, aby byl maximalizováno rozpětí mezi tržbami a náklady. Zisk je tímto je vyjádřen jako

$$(5.25) \quad q \cdot y^0 - C(y^0, p) \quad ,$$

tj. rozdíl mezi objemem tržeb a výrobními náklady. K tomu ovšem stačí položit (kladný) multiplikátor λ hodnotě q (jednotkové ceně výrobku). Tím je řečeno, že v rovnovážné situaci jednak platí (nutné) podmínky $p_i / F_i(x^*) = q$ pro všechna

¹ Je zřejmé, že pro $k = 1$ je vztah (5.23) splněn vždy: minor je roven $-F_1^2$

$i = 1, 2, \dots, n$ jednak (jako postačující) též *Hicksovy podmínky stability* (5.22), resp. (5.23).

Ilustrace Výše uvedený postup ukážeme nyní na nejjednodušším případě, v němž výrobní technologie operuje tak, že je vyráběn pouze jeden výrobek y , k jehož zhotovení se používají dva výrobní faktory x_1, x_2 .

Nejprve vyšetříme podobu podmínek nutných pro rovnovážný bod. Postupně odvodíme výrazy pro změnu poptávky po každém výrobním faktoru při změně jedné z cen (arbitrárně zvolme p_1). Vydeme přitom z podmínek (5.25):

$$(5.26A,B,C) \quad F(x_1(p), x_2(p)) = y^0 \quad F_1(x_1(p), x_2(p)) \cdot \lambda = p_1 \\ F_2(x_1(p), x_2(p)) \cdot \lambda = p_2$$

Derivujme nyní všechny tři vztahy podle p_1 (ceny, která se mění). Dostaneme

$$(5.27A) \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = 0.$$

$$(5.27B) \quad F_1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \lambda \cdot \left(\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \right) = 1.$$

$$(5.27C) \quad F_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} + \lambda \cdot \left(\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \right) = 0.$$

Po jednoduché úpravě druhé a třetí rovnice (vydělením každé z nich λ) dostáváme soustavu tří rovnic pro tři neznámé (dvě poptávkové změny $\partial x_1 / \partial p_1$ a $\partial x_2 / \partial p_1$ a pomocnou neznámou $1 / \lambda \cdot \partial \lambda / \partial p_1$). Tuto soustavu je pak možno souhrnně vyjádřit vektorově-maticovým zápisem

$$(5.28) \quad \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Odtud použitím *Cramérova pravidla* již snadno získáme řešení: výraz pro poptávkové změny.

$$(5.29) \quad \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{|\Phi_1|}{|\Phi|}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{|\Phi_2^*|}{|\Phi|},$$

kde

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_2 \\ F_1 & \frac{1}{\lambda} & F_{12} \\ F_2 & 0 & F_{22} \end{pmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & 0 \\ F_1 & F_{11} & \frac{1}{\lambda} \\ F_2 & F_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Přímým výpočtem obou determinantů dostaneme

$$(5.30) \quad |\Phi_1| = \frac{-F_2^2}{\lambda} \quad |\Phi_2| = \frac{F_1 F_2}{\lambda}$$

a tedy následně

$$(5.31) \quad \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{-F_2^2}{\lambda \cdot |\Phi|} \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{F_1 \cdot F_2}{\lambda \cdot |\Phi|}$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda > 0$ a $|\Phi| > 0$, dostáváme zřejmě, že $\partial x_1 / \partial p_1 < 0$, zatímco $\partial x_2 / \partial p_1 > 0$. Znamená to tedy, že růst ceny příslušné výrobnímu faktoru vede k poklesu poptávky po něm, zatímco v případě druhého přítomného faktoru vede růst jeho ceny k růstu poptávky. Oba výrobní faktory jsou tedy v substitučním vztahu.

5.4 Přímá maximalizace zisku pomocí ziskové funkce

Rozšířme úlohu formulovanou v části [5.3] tak, že *souběžně* s minimalizací nákladové stránky výroby budeme usilovat o dosažení maximálního zisku z hodnoty vyrobené produkce. K tomuto účelu potřebujeme vedle výše výrobních nákladů (připomeňme, že ty jsou dány součinem množství výrobních faktorů a jejich jednotkových cen) stanovit hodnotu, za kterou se bude vytvořená produkce prodávat na trhu. Proto je třeba do úvah zařadit veličinu množství výrobků a k nim příslušných jednotkových cen, tedy (při m výrobcích) hodnotu skalárního součinu tvaru

$$(5.32) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^m \mathbf{q}_j \mathbf{y}_j$$

Maximalizaci zisku (při nejmenších možných výrobních nákladech) lze pak zapsat ve tvaru

$$(5.33) \quad \text{Max} \Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{Max} [\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}] = \text{Max} \left[\sum_{j=1}^m \mathbf{q}_j \mathbf{y}_j - \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \mathbf{x}_i \right]$$

tentokrát však bez přímého uvažování vedlejší podmínky $F(\mathbf{x}) \geq y^0$ představující požadavek, aby produkce dosažitelná pomocí vektoru množství výrobních faktorů \mathbf{x} měla alespoň velikost y^0 . Zisková funkce $\Pi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ v (5.32) pak udává maximální dosažitelný zisk z produkce realizované při minimálních výrobních nákladech a při tržně stanovených cenách \mathbf{p} a \mathbf{q} .

V dalším výkladu se pro zjednodušení omezíme na situaci, kdy je produkován pouze jediný výrobek, $m = 1$, tzn. $\mathbf{q}\mathbf{y} = qy$. Příslušné úvahy by nicméně zůstaly v platnosti i pro případ sdružené produkce, tj. tehdy, pokud bychom rozšířili pojem produkční funkce na vektorovou situaci. S ohledem na sledovaný cíl (nalézt optimální rozsah výroby, při němž je minimalizován zisk) však bude nyní nutno na argumenty ziskové

funkce pohlížet odlišně : Ceny p a q budeme považovat za exogenně stanovené „parametry“ úlohy, zatímco optimalizaci budeme provádět vzhledem k (proměnným, hledaným) množstvím výrobních faktorů. Abychom však nekomplikovali situaci dalším symbolem, přidržíme se původního značení ziskové funkce Π .

Nutné podmínky pro to, aby v konkrétním bodě x^* byla maximalizována zisková funkce², jsou

$$(5.34) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_n} = 0.$$

vyčíslení parciálních derivací zde vede k soustavě podmínek nutných pro rovnovážný bod³:

$$(5.35A) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_1} = q \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_1} - p_1 = 0.$$

$$(5.35B) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_2} = q \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_2} - p_2 = 0.$$

$$(5.35C) \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(x^*)}{\partial x_n} = q \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_n} - p_n = 0.$$

Optimální (rovnovážná) spotřebovávaná množství výrobních faktorů $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ získáme nyní jako funkce cen $x_i^* = x_i^*(q, p)$ úpravou předchozí soustavy rovnic, v níž píšeme

$$(5.36) \quad F_i(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} : \frac{p_j}{F_j(x^*)} = q$$

$$(\text{tj. } \frac{p_1}{F_1(x^*)} = \frac{p_2}{F_2(x^*)} = \dots = \frac{p_n}{F_n(x^*)} = q)$$

Optimální rozsah výroby je potom dán vztahem $y = F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, je tedy vyroben pro danou technologii z optimálních množství výrobních faktorů x^* . Z dosaženého lze vyvodit :

A) Vztah (5.36) ukazuje, že v rovnovážném stavu x^* je poměr spotřeby kterýchkoliv

² Používáme značení $\tilde{\Pi}$ oproti Π , protože zisková funkce definovaná v [5.15] je funkcí cen q, p . Zde, ač pracujeme s formálně shodným výrazem $qy - px$, pohlížíme na tento výraz odlišně: při maximalizaci (5.33) pokládáme obojí ceny za pevně dané, maximum zisku se hledá ve vztahu k rovnovážnému bodu, který určují hledaná optimálně užitá množství výrobních faktorů x^* - produkci pak určíme z produkční funkce $y^* = F(x^*)$

³ Zde na rozdíl od situace v části [5.3] však neprovádíme podmíněnou, nýbrž nepodmíněnou maximalizaci, není tedy důvod uplatňovat postup s použitím Lagrangeova multiplikátoru.

dvou faktorů r, s takový, že mezní míra substituce mezi nimi $F_r(x^*)/F_s(x^*)$ je rovna poměru cen těchto faktorů p_r/p_s .

B) Optimální rozsah výroby, tj. množství výrobních faktorů $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ a následně hodnota produkce $y^* = F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ je pak dána úrovněmi $p_i = q \cdot F_i(x^*)$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$. Znamená to, že rozsah výroby se zvětšuje potud, pokud hodnota mezní produktivity (při daném pevném q) každého faktoru není rovna relativní ceně (vůči q) tohoto faktoru. V té chvíli se dosáhne rovnovážného stavu, v němž se výrobní poměry ustálí. V tomto stavu platí $F_i(x^*) = p_i/q$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$.

Poznamenejme ještě, že cílové kritérium, minimalizace zisku zde není přímo spojeno s požadavkem, aby hodnota produkce dosáhla jistou (dostatečnou) úroveň y^0 : Výrobce bude mít zájem zvyšovat produkci do té doby, než se dosáhne, při zpravidla klesajících mezních produktech, podmínek (5.36). Na této úrovni se pak rovnovážná (optimální) výroba ustálí.

Dodatek Zkusme nyní vyšetřit, jak se bude chovat změna poptávky po výrobních faktorech při změně produkce y : k cenám jako argumentům poptávkové funkce tak přibude ještě (proměnlivá) velikost produkce y :

vyjděme ze vztahů (5.26) resp. (5.26):

$$(5.37A,B,C) \quad F(x_1(y, p), x_2(y, p)) = y$$

$$F_1(x_1(y, p), x_2(y, p)) \lambda = p_1 \quad F_2(x_1(y, p), x_2(y, p)) \lambda = p_2$$

Derivujme nyní všechny tři vztahy podle y (produkce). Dostaneme:

$$(5.38A) \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 1.$$

$$(5.38B) \quad F_1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \cdot \left(\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} \right) = 0.$$

$$(5.38C) \quad F_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \cdot \left(\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} \right) = 0.$$

Po drobné úpravě – vydělení druhé a třetí rovnice multiplifikátorem λ - máme

$$(5.38^*A) \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 1.$$

$$(5.38^*B) \quad F_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y, p)}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y, p)}{\partial y} = 0.$$

$$(5.38^*C) \quad F_2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(y,p)}{\partial y} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(y,p)}{\partial y} = 0.$$

Tyto tři vztahy přepíšeme do vektorově-maticové podoby

$$(5.39) \quad \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí Cramérova pravidla nyní dostaneme řešení pro hledané dvě neznámé $\frac{\partial x_1}{\partial y}, \frac{\partial x_2}{\partial y}$:

$$(5.40)^4 \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & F_2 \\ F_1 & 0 & F_{12} \\ F_2 & 0 & F_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi \end{vmatrix}} = \frac{F_{12} \cdot F_2 - F_1 \cdot F_{22}}{\begin{vmatrix} \Phi \end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_1 & 1 \\ F_1 & F_{11} & 0 \\ F_2 & F_{12} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi \end{vmatrix}} = \frac{F_1 \cdot F_{12} - F_2 \cdot F_{11}}{\begin{vmatrix} \Phi \end{vmatrix}}$$

Pokud jde o znaménka obou derivací, lze vyvodit následující:

Determinant ve jmenovateli obou derivací bude kladný právě tehdy, bude-li produkční funkce kvazikonkávní. Při kladnosti mezních produktů F_1, F_2 , zápornosti členů F_{11}, F_{22} budou mít oba čitatelé kladné hodnoty, pokud $F_{12} > 0$, což v případě dvou faktorů musí platit vždy.⁵ V souladu s realitou tedy při růstu produkce poptávka po obou výrobních faktorech poroste.

⁴ Podobně jako v části pojednávající o teorii rovnováhy spotřebitele lze z Hicksových podmínek vyvodit, že $F_{ii} < 0$.

⁵ Máme-li pouze dva výrobní faktory, musí být tyto, jak bylo dříve ukázáno, v substitučním vztahu,