

Rekursivní ekonometrický model

jako zvláštní tvar obecné interdependentní soustavy regresních rovnic

Rekursivní model je zvláštní (ne však výjimečná) forma ekonometrického modelu charakteristická tím, že :

- tvar matice **B** vztahů propojujících běžné endogenní proměnné odpovídá situaci, kdy vhodné seřazení modelových rovnic umožní zápis modelu ve tvaru, v němž běžná endogenní proměnná přítomná jako vysvětlující v uvažované rovnici může být vysvětlována pouze v některé z rovnic, které ji předchází

a současně kdy

- v matici Σ se nepřipouští korelace náhodných složek v různých rovnicích modelu (ani v témže čase).

Formálně vyjádřeno, v (ryze) rekursivním modelu platí restrikce:

a) matice B koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným je dolní (resp. horní) **trojúhelníková**, tj . platí pro ni $\beta_{jk} = 0$ pro $j < k$

b) matice Σ kovarianční matice náhodných složek soustavy, pro niž platí $\text{Cov}(u_t, u_s) = \delta_{ts}$. Σ je **diagonální**. Připouští se tedy "heteroskedasticita", nikoliv "korelovanost" náhodných složek (v témže čase) v různých rovnicích .

Obě podmínky a), b) souhrnně vyjadřuje schéma :

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \beta_{m3} & \dots & \beta_{mm} \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}$$

kde β_{jk} je regresní koeficient mezi j-tou a k-tou běžnou endogenní proměnnou (s vhodným normováním $b_{jj} = 0$ nebo -1 podle zápisu strukturního tvaru) ,

σ_{jk} je rozptyl náhodné složky j-té rovnice. ($j, k = 1, 2, \dots, m$)

Poznámka 1 Některé z prvků b_{jj} mohou být rovněž nulové (není podmínkou, aby se v j-té rovnici nutně vyskytovaly všechny vysvětlující běžné endogenní proměnné z předchozích rovnic)

Poznámka 2 Obě podmínky a), b) nemají stejnou povahu: *podmínka a)* je dána specifikací (běžných endogenních) proměnných v modelových rovnicích (a skutečnost, zda je v souladu s realitou, není testovatelná na základě dat statistického vzorku), zatímco *podmínka b)* může být konfrontací se statistickými daty prověřena vcelku snadno pomocí vhodného odhadu matice Σ (např. na základě 2SLS-reziduí).

Vlastnost dolní triangularity matice B , implikující tutéž vlastnost u matice $I - B$, znamená, že v první rovnici modelu (po seřazení) se kromě vysvětlované běžné endogenní proměnné vyskytují již jen predeterminované proměnné. Ve druhé (pro y_2) rovnici se může na pravé straně jako vysvětlující kromě kterýchkoliv predeterminovaných proměnných vyskytovat již jen běžná endogenní proměnná y_1 vysvětlovaná v první rovnici, ve třetí rovnici (pro y_3) mohou být jako vysvětlující z běžných endogenních zastoupeny jen proměnné y_1, y_2 atd.

Lze ukázat, že v (ryze) rekursivním modelu (s vlastnostmi a), b) jsou běžné endogenní proměnné vystupující jako vysvětlující v r -té rovnici tzn. y_1, y_2, \dots, y_{r-1} z předchozích rovnic nekorelované s náhodnou složkou r -té rovnice ε_r . Ze statistického hlediska mají pak tyto proměnné v r -té rovnici povahu v podstatě proměnných predeterminovaných.

Ne každý ekonometrický model lze přecíslováním rovnic převést na model rekursivního typu, protože v řadě případů v ekonomické realitě se projevují zpětné vazby mezi endogenními proměnnými neumožňují vyjádřit matici B v požadované formě (nemluvě o restrikci z podmínky b). Častěji se lze setkat s volnějším projevem této vlastnosti, kterou je tzv. **bloková rekursivita**.

Blokově rekursivní ekonometrický model

Blokově rekursivní model je rovněž zvláštní (přitom nijak výjimečná) forma ekonometrického modelu, která je charakteristická tím, že model může být přeskupením rovnic převeden do tvaru, v němž

- matice B vztahů propojujících běžné endogenní proměnné má strukturu, že všechny rovnice modelu lze (po případném přeskupení) zapsat ve tvaru, v němž žádná běžná vysvětlující běžná endogenní proměnná jednoho bloku není vysvětlována rovnicemi, která jsou obsahem následujícího bloku a

současně kdy

- v matici Σ se nepřipouští autokorelace náhodných složek v rovnicích různých bloků tohoto modelu (v témže čase).

Formálně vyjádřeno, platí podmínky:

c) matice B koeficientů příslušných běžným endogenním proměnným je horní resp. dolní **blokově trojúhelníková**

d) matice Σ kovarianční matice náhodných složek soustavy, pro niž platí $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \delta_{ts}$. Σ je **blokově diagonální**, tzn. na její diagonále jsou bloky (obecných symetrických, pozitivně definitních) matic Σ

Obě podmínky c), d) vyjadřuje schéma :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & \dots & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{r1} & B_{r2} & B_{r3} & \dots & B_{rr} \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Sigma_{rr} \end{pmatrix}$$

Každá z r čtvercových matic B_{kk} ležících na "diagonále" matice B je regulární matice rozměrů $s_k \times s_k$ s příslušně normovanými diagonálními prvky. Na ostatní matice B_{jk} rozměrů $s_j \times s_k$ nejsou kladeny žádné podmínky.

Každá z r čtvercových symetrických matic Σ_{kk} ležících na "diagonále" (pozitivně definitní, symetrické) kovarianční matice Σ má rozměry rovněž $s_k \times s_k$, tyto matice však nemusí být diagonální. Členění matic B a Σ na bloky si přirozeně musí odpovídat.

Znamená to tedy, že v rámci kteréhokoliv j -tého bloku ($k = 1, 2, \dots, r$) mohou být vztahy mezi proměnnými modelu "zcela libovolné" (chápáno ve smyslu podmínek "interdependentního submodelu"), zatímco vztahy modelových proměnných mezi různými bloky se řídí pravidly rekursivního modelu.

V případě **blokové rekursivity** (s vlastnostmi c), d) se běžné endogenní proměnné r -tého bloku chovají jako běžné endogenní proměnné r -té rovnice v případě **ryzí rekursivity**. Dá se ukázat, že proměnné $y_1, y_2, \dots, y_{s_1+s_2+\dots+s_{k-1}}$ jsou nekorelované s náhodnými složkami k -té podsoustavy (bloku) rovnic. To lze interpretovat tak, že v k -té podsoustavě může být na vysvětlující běžné endogenní proměnné obsažené v předchozích $k-1$ blocích nahlíženo jako na proměnné ze statistického hlediska víceméně "predeterminované".

Dopad ryzí resp. blokové rekursivity na odhadové metody

A) v případě rekursivního modelu: V rekursivním modelu lze **konzistentní odhady** parametrů pořídit prostou metodou nejmenších čtverců OLS, pokud rovnice odhadujeme v pořadí "s hierarchicky narůstajícím počtem běžných endogenních proměnných", tzn. výpočet zahájíme s rovnicí neobsahující žádnou běžnou endogenní proměnnou jako vysvětlující, poté kvantifikujeme rovnici s jednou vysvětlující běžnou endogenní proměnnou atd. Přínos odhadových metod 2SLS, ILS a IV se neuplatní, metody 3SLS a FIML však poskytnou konzistentní a asymptoticky vydatnější odhad než OLS.

B) v případě blokové rekursivního modelu: V modelu tohoto typu nelze sice prostou metodou nejmenších čtverců OLS získat konzistentní odhady parametrů, avšak v případě nasazení metod vhodných pro odhad simultánních soustav regresních rovnic (2SLS, IV, 3SLS, LIML apod.) není třeba současně odhadovat parametry všech rovnic, nýbrž s každým blokem lze zacházet jako s "parciálním" menším interdependentním modelem, v rámci něhož lze kvantifikaci kteroukoliv z těchto metod provést samostatně. Může se zde navíc projevit příznivý dopad této modelové struktury v tom, že (zvláště u modelů s několika desítkami rovnic) lze odhad provést "kvalitněji" s ohledem na menší pravděpodobnost výskytu **multikolinearity**, nižší míry autokorelace, uchování podstatně většího počtu stupňů volnosti (a tedy spolehlivějších výsledků testovacích postupů) ve srovnání s kvantifikací celého modelu, která by byla např. pro případ $T < q$ klasickými postupy nerealizovatelná.

Identifikace v rekursivním ekonometrickém modelu

A) V obecném interdependentním modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů (uvažujeme situaci, do které nevkládáme restriktce vyplývající z omezení položených na strukturní parametry) :

- počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků (obecné) matice B (s normovanou diagonálou) tj. $m(m-1)$
- počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (obecné) matice $C = mq$
- počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek strukturního tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní matice $\Sigma = (m+1) * m/2$.

Neomezený strukturní tvar $m[q + (m+1)/2]$ neznámých parametrů.

B) Naproti tomu redukovaný tvar modelu obsahuje tyto počty parametrů :

- počet parametrů redukovaného tvaru = počet prvků (obecné) matice Π tj. mq
- počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní matice $\Omega = (m+1) * m/2$

Neomezený redukovaný tvar $m[q + (m+1)/2]$ neznámých parametrů.

Informace obsažené v parametrech neomezeného redukovaného tvaru je tedy méně (o $(m-1)$ parametrů) než v parametrech neomezeného strukturního tvaru (vždy platí, že $m > 1$ u vícerovnicového modelu).

Poznámka Odtud je mj. vidět, že omezení vkládaná na parametry strukturního tvaru mohou tuto disproporci snížit, popř. ji úplně odstranit. Tím dosáhneme identifikovanosti modelu nebo (aspoň) identifikovanosti některé strukturní rovnice.

C) V rekursivním ekonometrickém modelu máme následující počty neznámých strukturních parametrů :

- počet parametrů u běžných endogenních proměnných = počet prvků matice B (s nulovými prvky v horním/dolním trojúhelníku a s normovanou diagonálou) tj. $m(m-1)/2$
- počet parametrů u predeterminovaných proměnných = počet prvků (obecné) matice $C = mq$
- počet parametrů v kovarianční matici náhodných složek redukovaného tvaru = počet prvků (symetrické) pozitivně definitní diagonální matice $\Sigma = m$.

Dohromady má tedy strukturní tvar rekursivního modelu tvar $m[q + (m+1)/2]$ neznámých parametrů, tedy tolik, kolik je parametrů redukovaného tvaru.

Počet parametrů redukovaného tvaru (i při respektování restriktcí přenesených z omezení na parametry strukturního tvaru) je nezměněný, tj. je roven počtu

$$m.[q + (m + 1)/2]$$

Poznámka Počet parametrů (neomezeného) redukovaného tvaru je tedy u modelu rekursivního typu roven počtu parametrů (neomezeného) strukturního tvaru.

Celkem tedy je předmětem odhadu $m(m-1) + mq + m = m(m/2 + q + 1/2)$ strukturních parametrů rekursivního modelu. Tento počet je přesně shodný s počtem parametrů redukovaného tvaru modelu. Nejsou-li tedy mezi parametry modelu zavedena další omezení, lze zpětně každý parametr strukturního tvaru určit jednoznačně z (odhadnutých) parametrů redukovaného tvaru.