Třístupňová metoda nejmenších čtverců
3SLS (3-stage least squares)
v soustavě simultánních regresních rovnic
autoři metody: Henri Theil , Arnold Zellner [1962][1]

Třístupňová metoda nejmenších čtverců je jednodušší ze dvou odhadových metod poskytujících konzistentní a asymptoticky vydatné odhady strukturních parametrů v interdependentních soustavách simultánních regresních rovnic.

Název metody však nevyjadřuje přesně výpočetní "algoritmus" metody. Metoda sestává sice ze tří kroků, avšak nejde o trojnásobné nasazení metody *LS*-nejmenších čtverců. Vztah *3SLS* k *2SLS* je analogický vztahu *GLS* k *OLS* - přesnější název by tedy byl Aitkenovo zobecnění 2SLS. Algoritmus metody lze formálně zapsat jedním explicitním vzorcem, takže k výpočtu parametrů není třeba použít numerické iterační metody.

Rozdíl oproti *2SLS* i jiným metodám s omezenou informací je mj. to, že výpočet se uskutečňuje paralelně pro všechny rovnice soustavy. Nejdříve se odhadnou pomocí *2SLS* strukturní parametry všech modelových rovnic. Poté se z *2SLS*-reziduí odhadne souhrnná kovarianční matice *3SLS* odhadové funkce a způsobem podobným *GLS* se spočtou nejprve *3SLS*-odhady parametrů a poté *3SLS*-asymptotická kovarianční matice.

Formální popis metody (uvažujeme libovolnou i-tou regresní rovnic):

Při zápisu libovolné i-té rovnice ve tvaru

1) $$\mathbf{y}_i = \mathbf{Y}_i.\beta_i + \mathbf{X}_i.\gamma_i + \varepsilon_i$$

můžeme psát celou soustavu m rovnic v souhrnném tvaru:

1a) $$\mathbf{w} = \mathbf{Q}.\delta + \mathbf{r}$$

kde $\mathbf{w} = (\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \ldots, \mathbf{w}'_m)'$ je $q.m$-rozměrný vektor tvořený $q.m$-rozměrnými vektory $\mathbf{w}_i = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}_i$ transformovaných pozorování vysvětlovaných proměnných $i-\text{té}$ rovnice

$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)'$ je $\sum(m_i + q_i)$- rozměrný vektor parametrů všech m regresních rovnic, $\delta_i = (\beta'_i, \mathbf{y}'_i)'$.

$\mathbf{r} = (\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \ldots, \mathbf{r}'_m)'$ je $q.m$-rozměrný vektor tvořený $q.m$-rozměrnými vektory transformovaných náhodných složek $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon_i$ $i-\text{té}$ rovnice.

$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m)$ je blokově diagonální matice složená z *m* matic rozměrů $[q, m_i + q_i]$ transformovaných pozorování vysvětlujících (běžných endogenních i predeterminovaných) proměnných $i-\text{té}$ rovnice.

[1] Zellner, A:, Theil, H.: Three-stage Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equation. Econometrica 30/1962 str. 53-78.

2) $$Q_i = (R^{-1}X'Y_i, R^{-1}X'X_i)$$

Vztah mezi vektory původních náhodných složek $\varepsilon_{.i}$ a transformovaných náhodných složek $r_{.i}$ lze vyjádřit souhrnně jako

3) $$r = (I_m \otimes R^{-1}X')\varepsilon$$

kde I_m je jednotková matice řádu m a symbol $\otimes$ označuje Kroneckerův součin matic.
Souhrnný výraz pro 3SLS-odhadovou funkci (daný jako Aitkenův estimátor v soustavě rovnic) **je při zápisu modelu ve tvaru o *m* stochastických rovnicích ve tvaru**

$$w = Q\delta + r$$

dán výrazem

4) $${}_{3SLS}\hat{\delta} = (Q'\Phi^{-1}Q)^{-1}Q'\Phi^{-1}w$$

v němž $\Phi = \Sigma_m \otimes I_q$ je kovarianční matice transformovaných náhodných složek r .
Pokud by matice Φ (nebo, což je totéž, matice Σ) **byla známá, mohli bychom výraz 4) již přímo převzít jako výraz pro $\hat{\delta}$ a mít tak 3SLS-odhadovou funkci. Situace, kdy známe Σ, jsou ovšem výjimečné a tak je zpravidla nutné při praktickém uplatnění 3SLS-estimátoru nahradit Σ nějakým jejím konzistentním odhadem. Místo vzorce 3) se proto zpravidla uplatňuje výraz**

4a) $${}_{3SLS}\hat{\delta} = (Q'\hat{\Phi}^{-1}Q)^{-1}Q'\hat{\Phi}^{-1}w$$

v němž $\hat{\Phi}$ je příslušný konzistentní odhad matice Φ. Za odhad Σ se zpravidla vezme estimátor ${}_{2SLS}\Sigma_m$ určený dvoustupňovou metodou nejmenších čtverců, tj. estimátor daný výběrovou kovarianční maticí reziduí z *2SLS*, tedy

$$\hat{\Sigma}_m = \{\hat{\sigma}_{ij}\} = \frac{e'_i e_j}{T}$$

kde $e'_i = y_i - W_{i2SLS}\hat{\delta}_i$ pro $i, j = 1,2,\ldots,m$

Shrnutí **První stupeň 3SLS odhadové metody tedy představuje** (stejně jako u 2SLS) **očištění** (všech) **vysvětlujících běžných endogenních proměnných od jejich stochastických komponent** (jejich náhradou maticí $X.\hat{\Pi}$). **Druhý krok představuje získání konzistentního odhadu kovarianční matice Σ pomocí nahrazení maticí ${}_{2SLS}\hat{\Sigma}$ získanou návazně na první krok. Hledané 3SLS odhady parametrů jsou získány ve třetím kroku dosazením $\hat{\Sigma}$ resp. $\hat{\Phi}$ do výrazu 4a) .**

Poznámka **Bez ohledu na název lze 3SLS-odhady parametrů všech *m* rovnic pořídit pomocí jediné operace (znamená to ovšem nahradit prvky v Σ**

veličinami vyjádřenými v transformovaných pozorovaných proměnných). Každé σ_{ij} lze totiž zapsat jako

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\mathbf{y}'_i \mathbf{A}_{ij} \mathbf{y}_j}{\mathbf{T}}$$

kde $\mathbf{A}_{ij}$ je matice

$$\mathbf{A}_{ij} = \left[\mathbf{I}_T - \mathbf{W}_i(\mathbf{Q}'_i\mathbf{Q}_i)^{-1}\mathbf{Q}'_i\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}'\right]'\left[\mathbf{I}_T - \mathbf{W}_i(\mathbf{Q}'_i\mathbf{Q}_i)^{-1}\mathbf{Q}'_i\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}'\right]$$

přičemž $\mathbf{W}_i = (\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i)$ $\quad \mathbf{Q}_i = (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_i ; \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_i)$, **kde** $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{RR}'$.
Připomeňme, že matice $\mathbf{R}$ rozměrů $[\mathbf{q},\mathbf{q}]$ je regulární a platí $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{RR}'$ ($\mathbf{X}$ má rozměry $[\mathbf{T},\mathbf{q}]$ a nemůže být tedy – až na ojedinělý případ, kdy $\mathbf{T} = \mathbf{q}$– regulární).

Kovarianční matice transformovaných náhodných složek má tvar

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}')(\Sigma \otimes \mathbf{I}_T)(\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}')' = \Sigma \otimes \mathbf{I}_q$$

Tato matice (ani $\mathbf{E}(\mathbf{r})$) **nezávisí na matici predeterminovaných proměnných $\mathbf{X}$, transformace snižuje dimenzi kovarianční matice celé soustavy z mT na mq Lze se tedy důvodně domnívat, že aplikace Aitkenova přístupu poskytne ve srovnání s 2SLS vydatnější odhad.**

Vlastnosti 3SLS -odhadové funkce

Lze ukázat, že 3SLS-odhadová funkce má tyto vlastnosti:

1) Odhady parametrů $_{3SLS}\hat{\beta}_{.i}, {}_{3SLS}\hat{\gamma}_{.i}$ ***i = 1, 2, ... , m* jsou konzistentní, tj. platí**

$$\mathbf{p}\lim_{T\to\infty}\begin{pmatrix} {}_{3SLS}\hat{\beta}_i \\ {}_{3SLS}\hat{\gamma}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$$

2) Odhady parametrů $_{3SLS}\hat{\beta}_{.i}, {}_{3SLS}\hat{\gamma}_{.i}$ **nejsou nestranné** (podobně jako u *2SLS*, *ILS*, *LIML*, *IV*)

3)Odhady parametrů $_{3SLS}\hat{\beta}_{.i}, {}_{3SLS}\hat{\gamma}_{.i}$ **jsou vydatné i v rámci metod s úplnou informací** (*asymptotická rozdělení 3SLS a FIML jsou totožná*)
Rozdělení *3SLS*-odhadové funkce pro konečný rozsah výběru je sice (opět díky P.C.B. Phillipsovi) **známo** (cca od roku 1984), **ale je příliš komplikované, než aby ho bylo možno prakticky použít pro testovací účely. V úlohách, které jsou spojeny s konstrukcí intervalů spolehlivosti a postupy testování hypotéz se proto omezujeme na rozdělení asymptotické** (tj. rozdělení, které má 3SLS-odhadová funkce při neomezeně rostoucím rozsahu výběru $\mathbf{T} \to \infty$).

4) Dále lze ukázat, že za poměrně předpokladů totožných jako byly zavedeny u 2SLS-odhadové funkce je rozdělení *3SLS*-odhadové funkce normální. Platí

$$\mathrm{Cov}({}_{3SLS}\hat{\delta}) = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{p}\lim_{T\to\infty}\left\{\mathbf{W}'\left[\Sigma^{-1} \otimes \mathbf{X}(\mathbf{XX})^{-1}\mathbf{X}'\right]\mathbf{W}\right\}^{-1}$$

Za podmínek 1) - 4) platí, že asymptotické rozdělení 3SLS-estimátoru je normální se střední hodnotou δ a kovarianční maticí $p\lim_{T\to\infty}(Q'\Phi^{-1}Q)^{-1}$.
Obvyklý zápis tohoto rozdělení je

$$\sqrt{T}({}_{3SLS}\hat{\delta}-\delta)\approx N\left[0, p\lim_{T\to\infty}\left(\frac{Q'\Phi^{-1}Q}{T}\right)^{-1}\right]$$

Statistické testy budou tedy založeny na normálním $N(0,1)-$ rozdělení.

Poznámka **Ve dvou situacích dochází ke shodě 3SLS a 2SLS odhadových funkcí. Těmito situacemi jsou :**

a) Případ, kdy jsou náhodné složky různých rovnic vzájemně nekorelovány, tzn., kdy platí : $\sigma_{ij}=0$ pro všechna $i\neq j$ a Σ je tedy diagonální matice.[2] **Pak**

$$_{3SLS}\hat{\delta}=(Q'\hat{\Phi}^{-1}Q)^{-1}Q'\hat{\Phi}^{-1}w=\mathrm{diag}\left[\hat{\sigma}_{11}\left(Q_1{}'Q_1\right)^{-1},\dots,\hat{\sigma}_{mm}\left(Q_m{}'Q_m\right)^{-1}\right].$$
$$\mathrm{diag}\left[Q'_1\hat{\sigma}_{11}{}^{-1},\dots,Q'_m\hat{\sigma}_{mm}{}^{-1}\right]w=(Q'Q)^{-1}Q'w$$

Tuto okolnost lze za určitých okolností využít takto: Pokud je možné analyzovaný ekonometrický model rozložit do několika submodelů takových, že náhodné složky jednoho submodelu jsou nekorelované s náhodnými složkami ostatních submodelů, stačí se nasadit *3SLS* proceduru vždy jen na individuální submodel (rozšíření na celý model již neznamená žádný přínos ve vydatnosti).

b) Případ, kdy jsou všechny rovnice modelu přesně identifikované, tzn. platí $m_i+q_i=q$ pro všechna $i=1,2,\dots,m$. Pak jsou totiž všechny matice Q_i čtvercové matice řádu (i hodnosti) q a lze tedy provést invertování všech matic ve vzorci pro 3SLS estimátor následovně:

$$_{3SLS}\hat{\delta}=(Q'\hat{\Phi}^{-1}Q)^{-1}Q'\hat{\Phi}^{-1}w=Q^{-1}\hat{\Phi}Q'^{-1}.Q'\hat{\Phi}^{-1}w=Q^{-1}w$$

rovněž tak pro 2SLS estimátor

$$_{2SLS}\hat{\delta}=(Q'Q)^{-1}Q'w=Q^{-1}Q'^{-1}.Q'w=Q^{-1}w$$

V tomto případě mají obě odhadové funkce zjednodušený tvar $Q^{-1}w$. Tuto okolnost lze také využít pro případ, kdy by model obsahoval více přesně identifikovaných rovnic. V takovém případě stačí použít 3SLS-estimátor pouze na přeidentifikované rovnice, zatímco (stejně kvalitní) **odhad přesně**

[2] Všimněme si rozdílu oproti jednorovnicovému modelu: Zobecněné metoda nejmenších čtverců GLS ztrácí vůči OLS přednost (ve vydatnosti) pouze tehdy, jsou-li náhodné složky homoskedastické a neautokorelované. Přednost 3SLS oproti 2SLS se ztrácí již tehdy, jsou-li náhodné složky „neautokorelované“. Zde však nemá smysl uvažovat o „homoskedasticitě“, protože není žádný důvod předpokládat, že by náhodné složky ***různých rovnic*** měly mít stejný rozptyl (závisle proměnné rovnic nemají k sobě velikostí svých hodnot vůbec žádný vztah).

identifikovaných rovnic zajistíme nasazením jednodušší 2SLS - metody. Obvykle ovšem v běžných modelech převažují přeidentifikované rovnice.[3] Že by model sestával jen z přesně identifikovaných rovnic

V jiných případech bude rozdíl asymptotických kovariančních matic *2SLS*- a *3SLS*-odhadových funkcí pozitivně definitní matice. Platí vztah

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left[\left(\frac{Q'Q}{T}\right)^{-1}\left(\frac{Q'Q}{T}\right)\left(\frac{Q'Q}{T}\right)^{-1}\right] = \operatorname*{plim}_{T\to\infty}\left[\left(\frac{Q'\Phi^{-1}Q}{T}\right)^{-1}\right] + D\Phi D'$$

Všimněme si, že odhad parametrů metodou 3SLS představuje vždy simultánní výpočet všech $\Sigma m_i + q_i$ parametrů současně, zatímco metodou 2SLS odhadujeme zpravidla parametry jednotlivých rovnic odděleně[4].

Připojíme ještě souhrnné vyjádření 3SLS - odhadové funkce :

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11}Q_1'Q_1 & \hat{o}^{12}Q_1'Q_2 & \hat{o}^{13}Q_1'Q_3 & .... & \hat{o}^{1m}Q_1'Q_m \\ \hat{o}^{21}Q_2'Q_1 & \hat{o}^{22}Q_2'Q_2 & \hat{o}^{23}Q_2'Q_3 & .... & \hat{o}^{2m}Q_2'Q_m \\ \hat{o}^{31}Q_3'Q_1 & \hat{o}^{32}Q_3'Q_2 & \hat{o}^{33}Q_3'Q_3 & .... & \hat{o}^{3m}Q_3'Q_m \\ ..... & ...... & ...... & ...... & ...... \\ \hat{o}^{m1}Q_m'Q_1 & \hat{o}^{m2}Q_m'Q_2 & \hat{o}^{m3}Q_m'Q_3 & ...... & \hat{o}^{mm}Q_m'Q_m \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \hat{o}^{1j} W_1'X(XX)^{-1}X'y_{.1} \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{o}^{2j} W_2'X(XX)^{-1}X'y_{.2} \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{o}^{3j} W_3'X(XX)^{-1}X'y_{.3} \\ .... \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{o}^{mj} W_m'X(XX)^{-1}X'y_{.m} \end{pmatrix}$$

kde jak víme $\quad w_i = R^{-1}X'y_i \qquad Q_i = (R^{-1}X'Y_i; R^{-1}X'X_i) \qquad W_i = (Y_i, X_i)$

[3] Že by model obsahoval jen přesně identifikované rovnice, lze snad v realitě připustit jen u velmi malých modelů (cca do počtu 3-4 rovnic).

[4] Ovšem také metodou 2SLS můžeme – pokud je model zapsán v kompaktním tvaru - spočíst odhady všech parametrů všech rovnic najednou.

σ^{ij} **je prvek ležící na v i-tém řádku a j-tém sloupci matice** Σ^{-1}
$\mathbf{X}$ **je matice všech predeterminovaných proměnných soustavy .**

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11}W_1'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{12}W_1'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_2 & \hat{\sigma}^{13}W_1'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_3 & \dots & \hat{\sigma}^{1m}W_1'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_m \\ \hat{\sigma}^{21}W_2'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{22}W_2'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_2 & \hat{\sigma}^{23}W_2'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_3 & \dots & \hat{\sigma}^{2m}W_2'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_m \\ \hat{\sigma}^{31}W_3'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{32}W_3'XR^{-1\prime}R^{-1}X'Z_2 & \hat{\sigma}^{33}W_3'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_3 & \dots & \hat{\sigma}^{3m}W_3'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\sigma}^{m1}W_m'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{m2}W_m'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_2 & \hat{\sigma}^{m3}W_m'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_3 & \dots & \hat{\sigma}^{mm}W_m'XR^{-1\prime}R^{-1}X'W_m \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{1j}W_1'XR^{-1\prime}R^{-1}X'y_{.j} \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{2j}W_2'XR^{-1\prime}R^{-1}X'y_{.j} \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{3j}W_3'XR^{-1\prime}R^{-1}X'y_{.j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{mj}W_m'XR^{-1\prime}R^{-1}X'y_{.j} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11}W_1'X(X'X)^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{12}W_1'X(X'X)^{-1}X'W_2 & \hat{\sigma}^{13}W_1'X(X'X)^{-1}X'W_3 & \dots & \hat{\sigma}^{1m}W_1'X(X'X)^{-1}X'W_m \\ \hat{\sigma}^{21}W_2'X(X'X)^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{22}W_2'X(X'X)^{-1}X'W_2 & \hat{\sigma}^{23}W_2'X(X'X)^{-1}X'W_3 & \dots & \hat{\sigma}^{2m}W_2'X(X'X)^{-1}X'W_m \\ \hat{\sigma}^{31}W_3'X(X'X)^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{32}W_3'X(X'X)^{-1}X'W_2 & \hat{\sigma}^{33}W_3'X(X'X)^{-1}X'W_3 & \dots & \hat{\sigma}^{3m}W_3'X(X'X)^{-1}X'W_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\sigma}^{m1}W_m'X(X'X)^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{m2}W_m'X(X'X)^{-1}X'W_2 & \hat{\sigma}^{m3}W_m'X(X'X)^{-1}X'W_3 & \dots & \hat{\sigma}^{mm}W_m'X(X'X)^{-1}X'W_m \end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{1j}W_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.j} \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{2j}W_2'X(X'X)^{-1}X'y_{.j} \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{3j}W_3'X(X'X)^{-1}X'y_{.j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{mj}W_m'X(X'X)^{-1}X'y_{,j} \end{pmatrix}$$

Dimenze levé matice je $\left[\sum_{i=1}^{m} m_i + q_i\right] x \left[\sum_{i=1}^{m} m_i + q_i\right]$, **délka pravého vektoru je** $\left[\sum_{i=1}^{m} m_i + q_i\right]$.

$${}_{3SLS}\hat{\delta} = (Q'\Phi^{-1}Q)^{-1}Q'\Phi^{-1}w$$

$${}_{3SLS}\hat{\delta} = \left[\left(Z_i'XR^{-1\prime}\right)\left(\Sigma_m \otimes I_q\right)^{-1}\left(R^{-1}X'Z_i\right)\right]^{-1}\left[\left(Z_i'XR^{-1\prime}\right)\left(\Sigma_m \otimes I_q\right)^{-1}w\right]$$

$$Q_i = (R^{-1}X'Y_i, R^{-1}X'X_i) \qquad Q_i = (R^{-1}X'Z_i)$$

$$w_i = R^{-1}X'y_i$$

Ilustrace nasazení vzorce pro výpočet parametrů dvourovnicového interdependentního modelu

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11}W_1'X(X'X)^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{12}W_1'X(X'X)^{-1}X'W_2 \\ \hat{\sigma}^{21}W_2'X(X'X)^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{22}W_2'X(X'X)^{-1}X'W_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{1j}W_1'X(XX)^{-1}Xy_{.j} \\ \sum_{j=1}^{m} \hat{\sigma}^{2j}W_2'X(XX)^{-1}Xy_j \end{pmatrix}$$

Nalevo je matice rozměrů $[m_1 + q_1 + m_2 + q_2]x[m_1 + q_1 + m_2 + q_2]$

Napravo je vektor rozměru $[m_1 + q_1 + m_2 + q_2]x[1]$

Vyjádření invertované matice nalevo v pozorovaných proměnných:

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11}W_1'X(X'X)^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{12}W_1'X(X'X)^{-1}X'W_2 \\ \hat{\sigma}^{21}W_2'X(X'X)^{-1}X'W_1 & \hat{\sigma}^{22}W_2'X(X'X)^{-1}X'W_2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat{\sigma}^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'X_1 & \hat{o}^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat{o}^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'X_2 \\ \hat{\sigma}^{11}X_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat{\sigma}^{11}X_1'X(X'X)^{-1}X'X_1 & \hat{o}^{12}X_1'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat{o}^{12}X_1'X(X'X)^{-1}X'X_2 \\ \hat{o}^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat{o}^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'X_1 & \hat{o}^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat{o}^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'X_2 \\ \hat{o}^{21}X_2'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat{o}^{21}X_2'X(X'X)^{-1}X'X_1 & \hat{o}^{22}X_2'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat{o}^{22}X_2'X(X'X)^{-1}X'X_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Po zjednodušení
$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat{\sigma}^{11}Y_1'X_1 & \hat{o}^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat{o}^{12}Y_1'X_2 \\ \hat{\sigma}^{11}X_1'Y_1 & \hat{\sigma}^{11}X_1'X_1 & \hat{o}^{12}X_1'Y_2 & \hat{o}^{12}X_1'X_2 \\ \hat{o}^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat{o}^{21}Y_2'X_1 & \hat{o}^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat{o}^{22}Y_2'X_2 \\ \hat{o}^{21}X_2'Y_1 & \hat{o}^{21}X_2'X_1 & \hat{o}^{22}X_2'Y_2 & \hat{o}^{22}X_2'X_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Pravostranný vektor má tvar:
$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m}\hat{o}^{1j}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.j} \\ \sum_{j=1}^{m}\hat{o}^{1j}X_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.j} \\ \sum_{j=1}^{m}\hat{o}^{2j}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_{.j} \\ \sum_{j=1}^{m}\hat{o}^{2j}X_2'X(X'X)^{-1}X'y_{.j} \end{pmatrix}$$
neboli

V pozorovaných proměnných
$$\begin{pmatrix} \hat{o}^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.1}+\hat{o}^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.2} \\ \hat{o}^{11}X_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.1}+\hat{o}^{12}X_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.2} \\ \hat{o}^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_1+\hat{o}^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_2 \\ \hat{o}^{21}X_2'X(X'X)^{-1}X'y_1+\hat{o}^{22}X_2'X(X'X)^{-1}X'y_2 \end{pmatrix}$$

Po zjednodušení máme

$$\begin{pmatrix} \hat{o}^{11}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.1}+\hat{o}^{12}Y_1'X(X'X)^{-1}X'y_{.2} \\ \hat{o}^{11}X_1'y_{.1}+\hat{o}^{12}X_1'y_{.2} \\ \hat{o}^{21}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_1+\hat{o}^{22}Y_2'X(X'X)^{-1}X'y_2 \\ \hat{o}^{21}X_2'y_1+\hat{o}^{22}X_2'y_2 \end{pmatrix}.$$

Takže nejjednodušší výpočtový tvar 3SLS – estimátoru pro dvourovnicovou soustavu je

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11}Y_1{}'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat{\sigma}^{11}Y_1{}'X_1 & \hat{o}^{12}Y_1{}'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat{o}^{12}Y_1{}'X_2 \\ \hat{\sigma}^{11}X_1{}'Y_1 & \hat{\sigma}^{11}X_1{}'X_1 & \hat{o}^{12}X_1{}'Y_2 & \hat{o}^{12}X_1{}'X_2 \\ \hat{o}^{21}Y_2{}'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & \hat{o}^{21}Y_2{}'X_1 & \hat{o}^{22}Y_2{}'X(X'X)^{-1}X'Y_2 & \hat{o}^{22}Y_2{}'X_2 \\ \hat{o}^{21}X_2{}'Y_1 & \hat{o}^{21}X_2{}'X_1 & \hat{o}^{22}X_2{}'Y_2 & \hat{o}^{22}X_2{}'X_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{o}^{11}Y_1{}'X(X'X)^{-1}X'y_{.1} + \hat{o}^{12}Y_1{}'X(X'X)^{-1}X'y_{.2} \\ \hat{o}^{11}X_1{}'y_{.1} + \hat{o}^{12}X_1{}'y_{.2} \\ \hat{o}^{21}Y_2{}'X(X'X)^{-1}X'y_1 + \hat{o}^{22}Y_2{}'X(X'X)^{-1}X'y_2 \\ \hat{o}^{21}X_2{}'y_1 + \hat{o}^{22}X_2{}'y_2 \end{pmatrix}$$