Dvoustupňová metoda nejmenších čtverců
2SLS (*2-stage least squares*)

<u>v soustavě simultánních regresních rovnic</u>

<u>autoři metody :</u> **R.L.Bassman [1957], H.Theil [1958]**

Dvoustupňová metoda nejmenších čtverců je nejrozšířenější užívaná metoda poskytující (přinejmenším) **konzistentní odhady strukturních parametrů regresních rovnic v interdependentních ekonometrických modelech.**
Základní myšlenkou metody je postup, který vhodným způsobem nahrazuje v jednotlivých regresních rovnicích strukturního tvaru modelu běžné endogenní proměnné vyskytující se na pravé straně (jako vysvětlující) **strukturních rovnic jinými veličinami, které by nebyly korelovány s náhodnými složkami rovnic. Právě tyto korelace** (mezi vysvětlujícími běžnými endogenními proměnnými a náhodnými složkami) **jsou příčinou, proč odhady parametrů takové rovnice pomocí prosté metody nejmenších čtverců OLS nejsou konzistentní.**
K nahrazení vysvětlujících běžných endogenních proměnných využívá metoda 2SLS substituci pomocí odhadnuté matice redukovaného tvaru modelu, která je odhadována metodou OLS. Ve druhém kroku se pak provádí - opět metodou OLS - regrese vysvětlované běžné endogenní proměnné na takto nahrazené vysvětlující běžné endogenní proměnné a na všechny v této rovnici přítomné predeterminované proměnné.

Formální popis metody (uvažujeme libovolnou i-tou regresní rovnic)**:**

V rovnici zapsané jako

$$y_i = Y_i.\beta_i + X_i.\gamma_i + \varepsilon_i \; ^{1} \qquad y_{.i[T,1]} = Y_{i[T,m_i]}\beta_{.i[m_i,1]} + X_{i[T,q_i]}\gamma_{i[q_i,1]} + \varepsilon_{.i[T,1]}$$

se nejdříve provede odhad matice parametrů redukované formy Π_i ze vztahu

$$\mathbf{Y_i = X\Pi_i + V_i} \; ^{2} \qquad Y_{i[T,m_i]} = X_{[T,q]}\Pi_{i[q,m_i]} + V_{i[T,m_i]}$$

---

[1] Uvažujeme zde ***omezený strukturní tvar***, do kterého jsou tedy už zahrnuta omezení o nepřítomnosti některých vysvětlujících proměnných (modelu) mezi vysvětlujícími proměnnými i-té rovnice – pro jsou zde dimenze matic Y_i , X_i pouze m_i resp. q_i (nikoliv m,q).

Odhad Π_i pořízený metodou OLS má zřejmě tvar

$$\hat{\Pi}_i = (X'X)^{-1}X'Y_i{}^{3} \quad \hat{\Pi}_i = (X'X)^{-1}_{[q,q]}X'_{[q,T]}Y_{i[T,m_i]}$$

Jestliže zavedeme - s označením $\hat{V}_i$ - matici reziduí při regresi vysvětlujících běžných endogenních proměnných Y_i na všechny predeterminované proměnné X, tj.

$$Y_i = X\hat{\Pi}_i + \hat{V}_i \qquad Y_{i[T,m_i]} = X_{[T,q]}.\hat{\Pi}_{i[q,m_i]} + \hat{V}_{i[T,m_i]}$$

lze snadno ukázat, že tato rezidua jsou nekorelovaná s predeterminovanými proměnnými obsaženými ve sloupcích matice X **, tj. platí $X'\hat{V}_i = 0$.**

Místo původní rovnice se tedy odhaduje modifikovaná rovnice

$$y_{.i} = (Y_i - \hat{V}_i)\beta_{.i} + X_i\gamma_{.i} + \varepsilon_{.i} + \hat{V}_i\beta_{.i}$$

V ní vystupují vysvětlující běžné endogenní proměnné již očištěné o své stochastické složky $\hat{V}_i$. [4]

2SLS-odhadovou funkci **vektoru parametrů $\beta_{.i}, \gamma_{.i}$ nyní získáme –** opět **provedením OLS regrese - vysvětlovaných běžných endogenních proměnných Y_i na takto modifikované vysvětlující běžné endogenní proměnné $Y_i - \hat{V}_i$ a predeterminované proměnné X_i. Dostaneme**

(1)
$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{.i} \\ \hat{\gamma}_{.i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Y_i - \hat{V}_i)'(Y_i - \hat{V}_i) & (Y_i - \hat{V}_i)'X_i \\ X_i'(Y_i - \hat{V}_i) & X_i'X_i \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} (Y_i - \hat{V}_i)'y_i \\ X_i'y_{.i} \end{pmatrix}$$

což lze vzhledem k platnosti vztahů

---

[2] V tomto případě musí být napravo celá matice X (nestačí jen X_i), protože některé z levostranných proměnných obsažené v Y_i budou zpravidla závislé i na těch predeterminovaných proměnných (z X), které nejsou obsaženy (jako vysvětlující) v i-té rovnici tj. v X_i .

[3] Nalevo není *celá* matice parametrů redukovaného tvaru, ale jen ta její část, která se váže k vyjádření závisle proměnných v Y_i pomocí (obecně všech) predeterminovaných proměnných. Ostatními běžnými endogenními veličinami modelu (těmi, co jsou v Y, ale ne v Y_i) se nezabýváme.

[4] Odečtením V_i od Y_i zbavíme vysvětlující běžné endogenní proměnné těch jejich stochastických částí, které jsou korelované s náhodnými složkami ε_i a v důsledku toho bude následný odhad parametrů na pravé straně již konzistentní.

$$(Y_i - \hat{V}_i)'(Y_i - \hat{V}_i) = Y_i'Y_i - \hat{V}_i'\hat{V}_i \qquad \text{a} \qquad \hat{V}_i'\hat{V}_i = Y_i'\hat{V}_i$$

zapsat jako

(2)
$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{.i} \\ \hat{\gamma}_{.i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_i'Y_i - \hat{V}_i'\hat{V}_i & Y_i'X_i \\ X_i'Y_i & X_i'X_i \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} (Y_i - \hat{V}_i)'y_i \\ X_i'y_{.i} \end{pmatrix}$$

Vlastnosti 2SLS -odhadové funkce

Lze ukázat, že **2SLS-odhadová funkce má tyto vlastnosti:**

1) Odhady parametrů $\beta_i, \gamma_{.i}$ ***jsou konzistentní***, tj. platí

$$\text{plim } T\to\infty \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{.i} \\ \hat{\gamma}_{.i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{.i} \\ \gamma_{.i} \end{pmatrix}$$

2) Odhady parametrů $\beta_i, \gamma_{.i}$ ***nejsou nestranné***, protože

$$E\begin{pmatrix} \hat{\beta}_{.i} \\ \hat{\gamma}_{.i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{.i} \\ \gamma_{.i} \end{pmatrix} + E(Z_i'Z_i)^{-1}Z_i'\varepsilon_{.i}$$ [5] , **kde** $Z_i = (Y_i - \hat{V}_i, X_i)$

3) Odhady parametrů $\beta_i, \gamma_{.i}$ ***jsou vydatné v rámci okruhu metod s omezenou informací*** (metody s úplnou informací však poskytují vydatnější odhady)

Poznámka

Podmínkou existence *2SLS-estimátoru* je, aby byly definovány všechny veličiny v předchozích výrazech (kromě toho stejně jako u OLS předpokládáme, že matice X má hodnost q = počet všech predeterminovaných proměnných modelu, takže X'X není

[5] Proměnné v Zi nejsou nestochastické, takže nelze psát

$$E(Z_i'Z_i)^{-1}Z_i'\varepsilon_{.i} = E(Z_i'Z_i)^{-1}E(Z_i'\varepsilon_{.i})$$

singulární). Dále musí platit (k zajištění existence inverze v (1), resp. (2) aby byla splněna podmínka

$$m_i + q_i \leq q$$

neboli, aby **počet predeterminovaných proměnných přítomných v celé soustavě (modelu) byl přinejmenším rovný počtu vysvětlujících proměnných (predeterminovaných i běžných endogenních) i-té rovnice.**

Jiný způsob odvození dvoustupňové metody nejmenších čtverců

Odvození dvoustupňové metody nejmenších čtverců lze provést ještě jiným způsobem, při kterém je obyčejná metoda nejmenších čtverců nasazena pouze jednou, avšak nikoliv na původní ale na určitým způsobem transformovanou původní modelovou rovnici. Postup lze vyložit následovně:

Jedním z vyslovených předpokladů modelu je, že momentová matice $X'X$ je pozitivně definitní a regulární. Existuje k ní tedy regulární matice R rozměrů $[q,q]$, tak, že platí $X'X = RR'$ (připomeňme, že X má rozměry $[T,q]$ a nemůže být tedy – až na výjimku, kdy $T = q$ – regulární).

Nyní vynásobíme původní rovnici

$$y_{.i} = Y_i\beta_{.i} + X_{.i}\gamma_{.i} + \varepsilon_{.i}$$

zleva maticí $R^{-1}X'$. Dostaneme vztah

$$R^{-1}X'y_{.i} = R^{-1}X'Y_i\beta_{.i} + R^{-1}X'X_i\gamma_{.i} + R^{-1}X'\varepsilon_{.i}$$

který lze zapsat jednodušeji jako

$$w_{.i} = Q_{.i}\delta_{.i} + r_{.i} \qquad \text{, kde}$$

$$w_{.i} = R^{-1}X'y_{.i} \ , \quad Q_i = (R^{-1}X'Y_i; R^{-1}X'X_i) \ , \quad r_{.i} = R^{-1}X'\varepsilon_{.i}$$

V dimenzích máme

$$w_{.i[q,1]} = R^{-1}{}_{[q,q]}X'_{[q,T]}y_{.i[T,1]} \ ,$$

$$Q_i[q, m_i + q_i] = (R^{-1}[q,q]X'[q,T]Y_i[T,m_i]; R^{-1}[q,q]X'[q,T]X_i[T,q_i]) \ ,$$

$$r_{.i[q,1]} = R^{-1}{}_{[q,q]}X'_{[q,T]}\varepsilon_{.i[T,1]} \ ,$$

$$\delta_{.i} = \begin{pmatrix}\beta_{.i}\\ \gamma_{.i}\end{pmatrix} = (\beta_{.i}', \gamma_{.i}')'$$

Parametry takto transformované rovnice[6] (transformace se týká jen proměnných, nikoliv parametrů) **nyní odhadneme pomocí metody OLS. Dostaneme :**

---

[6] **Všimněme si, že transformací pozorování původní rovnice jistým způsobem "zkracujeme", protože násobením zleva maticí $R^{-1}X'$ přecházíme z původních T řádků jen na q řádků.**

$$\hat{\delta}_{.i} = (Q_i'.Q_i)^{-1}.Q_i'.w_{.i} \ ,$$

což rozepsáno znamená

$$\hat{\delta}_{.i} = \left[\begin{pmatrix} Y_i'XR'^{-1} \\ X_i'XR'^{-1} \end{pmatrix}.(R^{-1}X'Y_i;R^{-1}X'X_i)\right]^{-1}.\begin{pmatrix} Y_i'XR'^{-1} \\ X_i'XR'^{-1} \end{pmatrix}.(R^{-1}X'y_{.i})$$

(3) $$\hat{\delta}_{.i} = \begin{pmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & Y_i'X(X'X)^{-1}X'X_i \\ X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & X_i'X(X'X)^{-1}X'X_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \\ X_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že platí $X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i = X_i'Y_i$, **podobně**

$$X_i'X(X'X)^{-1}X'X_i = X_i'X_i \quad \text{a} \quad X_i'X(X'X)^{-1}X'y_i = X_i'y_i \ ,$$

dostaneme zjednodušení
(4)

$$\hat{\delta}_{.i} = \begin{pmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & Y_i'X_i \\ X_i'Y_i & X_i'X_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_i'y_i \\ X_i'y_i \end{pmatrix}$$

Přitom platí dále, že

$$X(X'X)^{-1}X'Y_i = X\hat{\Pi}_i = Y_i - \hat{V}_i$$

a tedy také, že

$$Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i = Y_i'(Y_i - \hat{V}_i) = \hat{V}_i'\hat{V}_i$$

Odtud je patrné, že výsledek dosažený oběma postupy je shodný.

Rozdělení 2SLS-odhadové funkce pro konečný rozsah výběru je sice **(*díky Peteru C.B. Phillipsovi*) známo** (*cca od roku 1982*), **ale je natolik komplikované, že se prakticky nedá použít** (není nejspíše ani tabelováno). **Proto se v úlohách, které jsou spojeny s konstrukcí intervalů spolehlivosti a postupy testování hypotéz *omezujeme na rozdělení asymptotické* (tj. rozdělení, které má 2SLS-odhadová funkce při neomezeně rostoucím rozsahu výběru T** $\rightarrow \infty$ **).**

Podmínky pro odvození asymptotického rozdělení 2SLS estimátoru

Lze ukázat, že za poměrně obecných předpokladů je *asymptotické rozdělení 2SLS-odhadové funkce normální*. Těmito předpoklady jsou všechny dosud vyslovené předpoklady a **dále tyto dodatečné:**

(e) Soustava m strukturních rovnic neobsahuje mezi predeterminovanými žádné zpožděné endogenní proměnné[7].

(f) Náhodné složky $\varepsilon_{t.} = (\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}, \ldots, \varepsilon_{tm})$ jsou vzájemně nezávislé (tj. *nejen nekorelované*) **pro všechna t.[8]**

(g) Limitní matice

$$\mathbf{M} = \underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}\, T^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{Y'Y} & \mathbf{Y'X} \\ \mathbf{X'Y} & \mathbf{X'X} \end{pmatrix}$$

existuje jako nestochastická regulární matice s konečnými prvky; jde o konvergenci v pravděpodobnosti, kdy limitou je matice konstant (*nikoliv náhodných veličin*)[9].

(h) Náhodné složky $\varepsilon_{t.}$ splňují pro libovolné $\varepsilon > 0$ podmínku

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{plim}}\, T^{-1}\Big[\sum_{t=1}^{T} \int_{\xi \geq \varepsilon.\sqrt{T}} |\xi|^2 \, dF_t(\xi)\Big] = 0 \;,$$

kde $F_t(.)$ je sdružená distribuční funkce složek vektoru ε_t.[10]

---

[7] Podmínka (e) není ultimativní, ale usnadňuje odvození asymptotického rozdělní 2SLS-estimátoru

[8] Je zřejmé, že předpokladu normality náhodných složek je tato podmínka automaticky splněna.

[9] Smyslem podmínky (f) je zajistit, aby prvky příslušných matic nevykazovaly „směrem do nekonečna" explozivní chování, a aby bylo možno operovat s rostoucím T se submaticemi matic $\mathbf{Y'Y}$, $\mathbf{Y'X}$, $\mathbf{X'X}$ a jejich inverzemi.

Za uvedených podmínek platí, že ***asymptotické rozdělení 2SLS-estimátoru je normální se střední hodnotou*** $\boldsymbol{\delta}_{.i}$ **a kovarianční maticí**

$$\sigma_{ii}.\operatorname*{plim}_{T \to \infty}(Q_i'Q_i)^{-1} \quad ,$$

kde

σ_{ii} **je rozptyl náhodných složek i-té rovnice. Obvyklý zápis tohoto rozdělení je**

$$\sqrt{T}(\hat{\delta}_{.i} - \delta_{.i}) \approx N[0, \sigma_{ii}.\operatorname*{plim}_{T \to \infty}\left(\frac{Q_i'Q_i}{T}\right)^{-1}]$$

Tento výsledek je významem srovnatelný s platností *Gaus-Markovovy věty* v prostředí *normálního lineárního regresního modelu*.

Poznámka 2 **Pokud je rozdělení vektoru** ε_t **sdružené normální N(0Σ), pak je podmínka (h) automaticky splněna.**

Konzistentní odhad prvků σ_{ij} **pro jednotlivé rovnice získáme obvyklým způsobem**

$$s_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} = \frac{{}_{2SLS}e_{.i} \cdot {}_{2SLS}e_{.j}}{T} = \frac{\sum_{t=1}^{T} {}_{2SLS}e_{ti} \cdot {}_{2SLS}e_{tj}}{T} \quad ,$$ **kde za**

rezidua $e_{.i}, e_{.j}$ **vezmeme odhady náhodných složek** $\varepsilon_{.i}, \varepsilon_{.j}$ **získané dvoustupňovou metodou nejmenších čtverců *2SLS*. Testy**

---

[10] Smyslem podmínky (h) je zajistit aplikovatelnost centrálních limitních vět na asymptotické (normální) rozdělení a vyloučit z okruhu uvažovatelných rozdělení ta, která mají tzv.„heavy tails“. Sdružené normální rozdělení (náhodných složek) této podmínce vyhovuje

statistických rozdělení budou tedy založeny na normálním $N(0,1)$ - rozdělení.

POMOCNÁ TVRZENÍ VZTAHUJÍCÍ SE K METODĚ 2SLS

Tvrzení 1 $\quad \mathbf{X'\hat{V}_i = 0}$, *protože* $\mathbf{X'[Y_i - X\hat{\Pi}_i] = X'[Y_i - X(X'X]^{-1}X'Y_i] =}$

$$\mathbf{= X'Y_i - X'X(X'X)^{-1}X'Y_i = X'Y_i - X'Y_i = 0}$$

dimenze matic $\quad \mathbf{X'_{[q,T]}\,\hat{V}_{i[T,m_i]}}$

Tvrzení 2 $\quad \mathbf{Y_i - \hat{V}_i = X\hat{\Pi}_i = X(X'X)^{-1}X'Y_i}$

Tvrzení 3 $\mathbf{Y_i'Y_i - Y_i'\hat{V}_i = Y_i'(Y_i - \hat{V}_i) = Y_i'X\hat{\Pi}_i = Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i}$

dimenze matic $\mathbf{Y_{i[T,m_i]}}$ $\mathbf{Y_i'}_{[m_i,T]}$ $\mathbf{\hat{V}_{i[T,m_i]}}$

Tvrzení 4 $\mathbf{Y_i'\hat{V}_i = (X\hat{\Pi}_i + \hat{V}_i)'\hat{V}_i = \hat{\Pi}_i'X'\hat{V}_i + \hat{V}_i'\hat{V}_i = \hat{V}_i'\hat{V}_i}$ ***(v důsledku T1)***

Tvrzení 5 $\mathbf{X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i = X_i'Y_i}$ ***, protože lze psát :***

$$\mathbf{X_{i[T,q]} = X_{[T,q]} \cdot \begin{pmatrix} I_{q_i} \\ 0_{q-q_i} \end{pmatrix}}$$

„vytahujeme“ $\mathbf{q_i}$ sloupců matice $\mathbf{X_i}$ z celkem q sloupců matice $\mathbf{X}$.[11] *Pro snadnost zápisu předpokládáme, že jde o prvních $\mathbf{q_i}$ sloupců.*

Pak lze psát

$$\mathbf{X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i = \left[X\begin{pmatrix} I_{q_i} \\ 0_{q-q_i} \end{pmatrix}\right]'X(X'X)^{-1}X'Y_i =}$$

$$\mathbf{= \left[(I_{q_i}, 0_{q-q_i})X'\right]X(X'X)^{-1}X'Y_i = (I_{q_i}, 0_{q-q_i})X'X(X'X)^{-1}X'Y_i =}$$

$$\mathbf{(I_{q_i}, 0_{q-q_i})I_qX'Y_i = (I_{q_i}, 0_{q-q_i})X'Y_i = X_i'Y_i}$$

Poznámka 3 ***Všimněme si však, že nelze psát*** $\mathbf{Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i = Y_i'Y_i}$,

protože srovnatelným způsobem nelze „vytáhnout“ q_i běžných endogenních proměnných obsažených v matici $\mathbf{Y_i}$ z matice všech predeterminovaných proměnných soustavy $\mathbf{X}$ (obě tyto matice jsou „disjunktní“, protože obsahují (ve sloupcích) zcela rozdílné proměnné.

Levý horní prvek v invertované matici 2SLS-estimátoru nelze tedy zjednodušit.

Totéž platí pro výraz $\mathbf{Y_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \neq Y_i'y_i}$

Ani tady nemůžeme „vytáhnout“ vysvětlovanou proměnnou $\mathbf{y_i}$ z matice $\mathbf{X}$.

---

[11] **Zbývajících q-q_i predeterminovaných proměnných** (těch, které jsou přítomny v modelu, ale nikoliv v jeho i-té rovnici) „odřezáváme“ násobením nulovou maticí.