

Obecná metoda instrumentálních proměnných (G)IV (General Instrumental Variables method)

v soustavě simultánních regresních rovnic

autor metody: J.D. Sargan [1958]

Metoda instrumentálních proměnných je jistým zobecněním dvoustupňové metody nejmenších čtverců 2SLS. Poskytuje, stejně jako 2SLS, vždy (přinejmenším) konzistentní odhady strukturních parametrů regresních rovnic v interdependentních ekonometrických modelech.

Základní motivací metody je nalézt určité pomocné proměnné - tzv. **instrumentální proměnné** - které sehrají stejnou úlohu, jako má transformace $R^{-1}x'$ při odvození odhadové funkce 2SLS (viz druhý postup odvození 2SLS)

Hledají se tedy takové proměnné - jejich matici ve vztahu k i -té rovnici označme jako P_i - které budou vyhovovat vztahu

$$P_i' y_i = P_i' W_i \delta_i + P_i' \varepsilon_i$$

kde

$$W_i = (Y_i, X_i); \quad \delta_i = (\beta_i', \gamma_i')'$$

a přitom takové, že

- a) budou nekorelované s náhodnými složkami i -té strukturní rovnice
- b) budou co nejvíce korelované s vysvětlujícími proměnnými i -té rovnice

Podmínka a) je nutná k tomu, aby byl odhad takto pořízený konzistentní.

Podmínka b) je potřebná k tomu, aby proměnné-instrumenty zastupující

vysvětlující veličiny v rovnici je nahrazovaly co nejvýstižněji

Z podmínek je zřejmé, že instrumentální proměnné lze vybírat (pouze) z predeterminovaných proměnných modelu (běžné endogenní jsou korelované s náhodnými složkami). **Problém nespočívá v tom, čím nahradit v i -té rovnici přítomné predeterminované proměnné, ale čím nahradit přítomné běžné endogenní veličiny.**

Zbývá tedy provést co nejvhodnější výběr z predeterminovaných proměnných modelu. Je tedy zřejmé, že instrumentální proměnné budou definované pomocí maticového vztahu

$$P_i = X.A_i \quad \text{kde}$$

A_i je určující matice definující instrumentální proměnné (matice tzv. instrumentů)

P_i je matice instrumentálních proměnných pro i -tou rovnici (X je matice všech predeterminovaných proměnných modelu).

Volba instrumentálních proměnných (matice P_i) je tedy rovnocenná určení matice instrumentů A_i . Index příslušnosti k rovnici lze vynechat, pokud pro odhad každé rovnice modelu použijeme tutéž skupinu instrumentálních proměnných (je to obvyklé, nikoliv nutností).

V tomto případě bychom psali

$$P = X.A$$

kde

A je matice instrumentů definujících instrumentální proměnné pro odhad parametrů všech rovnic.

Z požadavků, které byly na instrumenty položeny, plyne, že IV-odhadová funkce strukturních parametrů modelu má tvar

$${}_{IV}\hat{\delta}_i = (P_i' W_i)^{-1} \cdot P_i' y_i = (P_i' W_i)^{-1} \cdot P_i' (W_i \cdot \delta_i + \varepsilon_i) = \delta_i + (P_i' W_i)^{-1} \cdot P_i' \varepsilon_i$$

Poznámka podmínkou existence IV-estimátoru je, aby byly existovala inverzní matice k matici $P_i'_{[q,T]} \cdot W_{[T;m+q]}$. K tomu je opět přinejmenším nutné, aby byla splněna podmínka $m_i + q_i = q$: jinak by matice $P_i'_{[q,T]} \cdot W_{[T;m+q]}$ nemohla být ani čtvercová (tím méně ne regulární).¹ (obvykle předpokládáme $q \leq T$)

Vlastnosti IV-odhadové funkce

Lze ukázat, že IV-estimátor strukturních parametrů modelu má tyto vlastnosti:

1) Odhady parametrů δ_i (tj. β_i, γ_i) jsou konzistentní, neboť platí

¹ Počet instrumentů potřebných k odhadu i -té rovnice musí být tedy roven počtu vysvětlujících proměnných této rovnice. Podrobněji v části pojednávající o identifikačním problému.

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\delta}_i - \delta_i = p \lim_{T \rightarrow \infty} (P_i' W_i / T)^{-1} \cdot p \lim_{T \rightarrow \infty} (P_i' \varepsilon_i / T) = 0$$

v důsledku (asymptotické) nekorelovanosti proměnných P_i a náhodných složek ε_i

2) Odhady parametrů δ_i (neboli β_i, γ_i) nejsou nestranné, protože

$$E\hat{\delta}_i = E[\delta_i + (P_i' W_i)^{-1} P_i' \varepsilon_i] = \delta_i + E(P_i' W_i)^{-1} P_i' \varepsilon_i$$

ale výraz $E(P_i' W_i)^{-1} P_i' \varepsilon_i \neq E(P_i' W_i)^{-1} E(P_i' \varepsilon_i)$ vzhledem k možné závislosti běžných endogenních proměnných přítomných ve W_i a náhodných složek ε_i .

3) Odhady parametrů δ_i (tj. β_i, γ_i) nejsou, až na výjimku, kdy metoda IV přechází v 2SLS, obecně vydatné (ani v rámci metod s omezenou informací).

4) Odhady parametrů δ_i (tj. β_i, γ_i) jsou (za stejných předpokladů (e), (f), (g), (h) jako u 2SLS) vždy asymptoticky normální, tedy platí

$$\sqrt{T} \cdot (\hat{\delta}_i - \delta_i) \approx N(0, \sigma_{ii} \cdot p \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{P_i' W_i}{T} \right)^{-1} \left(\frac{P_i' P_i}{T} \right) \left(\frac{W_i' P_i}{T} \right)^{-1} \right]$$

Konzistentní odhad prvků σ_{ij} pro jednotlivé rovnice získáme obvyklým způsobem:

$${}_{IV}\hat{\sigma}_{ij} = \frac{{}_{iv}e_i \cdot {}_{iv}e_j}{T}$$

kde za rezidua e_i, e_j vezmeme odhady náhodných složek $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ získané metodou IV.

Je tedy zřejmé, že otázka nejlepšího výběru (poskytujícího nejvydatnější IV-odhad) mezi různými IV-estimátory spočívá v optimální definici matice A . Jinými slovy, vyšetřujeme, pro jakou volbu matice A nastává maximální možná korelace mezi instrumenty v A (resp. mezi instrumentálními proměnnými v P) a vysvětlujícími proměnnými i -té rovnice W_i ?

Pro měření korelace mezi dvěma skupinami náhodných veličin (majících stejný počet pozorování) se užívá **vektorový korelační koeficient** definovaný jako:

$$r_C(W_i; P_i) = (-1)^{m+q} \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0 & W_i' P_i \\ P_i' W_i & P_i' P_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} W_i' W_i & P_i' P_i \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} (W_i' P_i)(P_i' P_i)^{-1}(P_i' W_i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} W_i' W_i \end{vmatrix}}$$

Hodnota tohoto koeficientu se pohybuje mezi 0 (nezávislost) a 1 (přesná závislost).

Výraz, který v kovarianční matici IV-estimátoru $(P_i' W_i / T)^{-1} (P_i' P_i / T) (W_i' P_i / T)^{-1}$ v sobě obsahuje fragment výrazu pro tzv. **zobecněný rozptyl**. Ten je definován jako

$$|G\text{Va}\hat{\delta}_i| = \sigma_{ii}^{m+q} \cdot \begin{vmatrix} (P_i' W_i)^{-1} \cdot (P_i' P_i) \cdot (W_i' P_i)^{-1} \end{vmatrix}$$

Mezi vektorovým korelačním koeficientem a zobecněným rozptylem platí tedy vztah

$$|G\text{Va}\hat{\delta}_i| = \frac{\sigma_{ii}^{m+q}}{\begin{vmatrix} W_i' W_i \end{vmatrix}} \cdot (r_C(W_i; P_i))^{-1}$$

z čehož je patrné, že pro taková P_i , pro která je minimalizována hodnota $|G\text{Va}\hat{\delta}_i|$ je právě maximalizována korelace mezi W_i a P_i .

Vyšetříme, kdy taková korelace nabude maximální možné hodnoty; v tomto případě poskytne IV-odhadová funkce δ_i nejvydatnější odhad. Lze přitom ukázat, že platí:

$$r_C(W_i, P) = r_C(W_i, X)$$

Znamená to tedy, že nemůže být překročena horní hranice daná (vektorovou) korelací mezi množinou instrumentálních proměnných a množinou všech predeterminovaných proměnných.

Této maximální korelovanosti je dosaženo pro volbu

$$A = (X' X)^{-1} X' W_i$$

Při této volbě matice A dostaneme :

$$P = XA = X(X'X)^{-1}X'W = [X(X'X)^{-1}X'Y_i; X(X'X)^{-1}X'X_i] = [X\hat{\Pi}_i; X_i]$$

Pak je IV- odhadová funkce rovna

$${}_{IV}\hat{\delta}_i = (P_i'W_i)^{-1}P_i'y_i = \begin{pmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & Y_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i \\ X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \\ X_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \end{pmatrix} = {}_{2SLS}\hat{\delta}_i$$

Znamená to tedy, že :

1) 2SLS-odhadová funkce je speciálním případem IV-odhadové funkce při volbě

$$\text{matice instrumentů jako } A = (X'X)^{-1}X'W$$

2) 2SLS-odhadová funkce poskytuje ve srovnání s jakoukoliv jinou volbou matice A nejvydatnější odhad. tj. ve smyslu asymptotické vydatnosti je 2SLS-odhadová funkce dominantní vůči všem ostatním IV-estimátorům.

Skutečnost, že aplikací techniky IV nelze překonat metodu 2SLS může být jistým zklamáním. V nelineárních modelech tomu tak není, zde můžeme za instrumenty vzít též nelineární kombinace z predeterminovaných proměnných. Ani *NL2S* estimátor (nelineární dvoustupňová metoda nejmenších čtverců) není zde definován jednoznačně : existují např. *BNL2S* (best) a *MNLS* (minimal) estimátor .

Počet instrumentálních proměnných n musí být v rozmezí mezi $m_i + q_i$ a q , tedy

$$m_i + q_i \leq n \leq q$$

Pokud uplatníme **instrumentální proměnné v maximálním možném počtu** q tj. jako všechny predeterminované proměnné, pak

- využijeme maximum informace obsažené v modelových proměnných, což povede k vydatnému odhadu , ale
- budeme pracovat s obsažnějšími maticemi a případně nižší spolehlivostí výsledku

Pokud uplatníme **instrumentální proměnné v minimálním přípustném počtu** $m_i + q_i$ tj. jako výběr $m_i + q_i$ predeterminovaných proměnných, pak

- nevyužijeme všechnu potřebnou informaci obsaženou v modelových proměnných, což bude mít za následek méně kvalitní (byť konzistentní) odhadu , ale
- výpočet bude úspornější a počet stupňů volnosti modelu vyšší.

Kompromisem může být vzetí instrumentálních proměnných v podobě lineární kombinace sestávající z prvních $m_i + q_i$ hlavních komponent momentové matice $X'X$.

Při řešení konkrétních úloh se uplatňují tyto přístupy k volbě instrumentálních proměnných (definujících matici A):

a) prostý výběr počtu $m_1 + q_1$ z celkem q predeterminovaných proměnných. Matice instrumentů bude zde mít tvar $A[q, m_1 + q_1]$, přičemž v této obdélníkové matici budou jedničkové prvky pouze v hlavní "pseudodiagonále" $a_{ii}, i = 1, 2, \dots, m_1 + q_1$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

U predeterminovaných proměnných, které jsou vzaty jako instrumentální, je v příslušném sloupci A_1 jednička – vynecháváním odpovídají nulové sloupce.

b) $m_1 + q_1$ -členná lineární kombinace složená z predeterminovaných proměnných

V tomto případě má příslušná matice tvar

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1, m_1 + q_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2, m_1 + q_1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3, m_1 + q_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q,1} & a_{q,2} & a_{q,3} & \dots & a_{q, m_1 + q_1} \end{pmatrix}$$

Koeficienty lineární kombinace jsou obsaženy ve sloupcích této matice.

c) prvních $m_1 + q_1$ hlavních komponent sestavených z matice predeterminovaných proměnných

$$A_3 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1,m+q} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2,m+q} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{3,m+q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{q,1} & m_{q,2} & m_{q,3} & \dots & m_{q,m+q} \end{pmatrix}$$

Koeficienty této lineární kombinace (opět obsažené ve sloupcích matice A_3) představují prvky vlastních vektorů příslušných momentové matici $X'X$. Z celkem q hlavních komponent se omezujeme na „největších“ $m_i + q_i$ z nich.