

Zapocetova pisemka pro predmet PMZMI. Celkova doba na reseni 30 min.

1. Matematickou indukci dokazte, ze

$$2^{n-1} \leq n!$$

2. Necht  $I$  je neprazdna indexova mnozina a necht  $A, B_i$  jsou mnoziny, pro kazde  $i \in I$ . Dokazte, ze plati:

$$A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

3. Necht  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Rozhodnete, zda nasledujici tvrzeni plati, ci neplati a svoje rozhodnuti zduvodnete:

$$a|c \wedge b|c \Rightarrow a \cdot b | c^2$$

4. Necht  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  jsou zobrazeni. Dokazte, ze plati:

$$g \circ f \text{ je injektivni} \Rightarrow f \text{ je injektivni.}$$

5. Nakreslete hasseovsky diagram usporadane mnoziny  $(2^A, \subseteq)$ .

$$A = \{a, b, c\}$$

6. Na mnozine  $M = \{a, b, c, d\}$  je definovana relace  $\rho$ . Rozhodnete, zda  $\rho$  je relace ekvivalence na mnozine  $M$ , a pokud ano, pak sestrojte rozklad  $M/\rho$  (tj. rozklad na  $M$ , prislusny ekvivalenci  $\rho$ ).

$$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, d), (d, a), (b, d), (d, b)\}.$$

7. Je dana mnozina  $G$  a predpis  $\circ$ . Rozhodnete, zda tento predpis definuje operaci na  $G$ . Pritom:

$$G = \mathbb{Z}; x \circ y = \begin{cases} y & \text{je-li } x = 3 \\ x + 1 & \text{je-li } y = 3 \\ 3 & \text{je-li } x \neq 3 \wedge y \neq 3. \end{cases}$$