

Řešený systém lineárních rovnic:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} * \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Gaussova eliminace s pivotováním ve sloupcích pod diagonálou:

krok 1:

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ \boxed{4} & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \boxed{4} & 2 & 2 & 1 & 20 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

krok 2:

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & 3 & 5/2 & 18 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 15/4 & 8 \\ 0 & \boxed{5/2} & 9/2 & 11/4 & 21 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & \boxed{5/2} & 9/2 & 11/4 & 21 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 15/4 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 5/2 & 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

krok 3:

$$\mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & 11/4 & 21 \\ 0 & 0 & -11/5 & 21/10 & -23/5 \\ 0 & 0 & \boxed{24/5} & 18/5 & 132/5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 \mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & 11/4 & 21 \\ 0 & 0 & \boxed{24/5} & 18/5 & 132/5 \\ 0 & 0 & -11/5 & 21/10 & -23/5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} -11/24 \end{bmatrix}$$

krok 4:

$$\mathbf{U}_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & 11/4 & 21 \\ 0 & 0 & 24/5 & 18/5 & 132/5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{15/4} & 15/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Výsledek:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{ll} m(2,1) = 1/2 & \text{patří k 2. řádku v } A \longrightarrow \text{3. řádek v } P * A \\ m(3,1) = 1/4 & \text{patří k 1. řádku v } A \longrightarrow \text{4. řádek v } P * A \\ m(4,1) = -3/4 & \text{patří k 4. řádku v } A \longrightarrow \text{2. řádek v } P * A \\ m(3,2) = 3/5 & \text{patří k 1. řádku v } A \longrightarrow \text{4. řádek v } P * A \\ m(4,2) = -2/5 & \text{patří k 2. řádku v } A \longrightarrow \text{3. řádek v } P * A \\ m(4,3) = -11/24 & \text{patří k 1. řádku v } A \longrightarrow \text{4. řádek v } P * A \end{array}$$

Získaný LU -rozklad:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2/5 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/5 & -11/24 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5/2 & 9/2 & 11/4 \\ 0 & 0 & 24/5 & 18/5 \\ 0 & 0 & 0 & 15/4 \end{bmatrix}$$