

4.1 Výdajová funkce a její vlastnosti

Definice 13 Máme dānu spojitou užitkovou funkci $u(\mathbf{x})$, cenový vektor \mathbf{p} a mějme dāle urěenu konkrětní velikost užitku u^0 (skalární, v ordinálním pojetí). Potom funkci

$$(4.1) \quad E(u^0, \mathbf{p}) = \text{Min} \{ \mathbf{p}\mathbf{x}; u(\mathbf{x}) \geq u^0 \}$$

nazveme **výdajovou funkcí [expenditure function]** ve vztahu k užitkové funkci $u(\mathbf{x})$.

Argumenty výdajové funkce je cenový vektor a velikost užitku požadovaná spotřebitelem. Výdajová funkce představuje minimální možné náklady (spojené s nákupem nanejvýš n statků při exogenně stanovených cenách \mathbf{p}) vynaložené na komoditní kombinaci, která poskytuje užitok přinejmenším o velikosti u^0 . Spotřebitel přitom nemusí nakupovat všechny komodity a s ohledem na kriteriální funkci v (3.11) dá přednost těm, u kterých dosažení užitku na žádané výši docílí nejlevněji.

Definice 13A Výdajová funkce $E(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ příslušná užitkové funkci $u(\mathbf{x})$ s přijatými vlastnostmi (U1) - (U5) má tyto vlastnosti :

(V1) $E(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $E(u^0, \mathbf{p}) > 0$ pro libovolnou úroveň užitku $u^0 > 0$.

(V2) $E(\mathbf{u}, \mathbf{p}^0)$ je **rostoucí v \mathbf{u} pro jakýkoliv cenový vektor $\mathbf{p}^0 > 0$** . $E(u^0, \mathbf{p})$ je **neklesající v \mathbf{p} a rostoucí alespoň v jedné z cen p_i pro libovolnou úroveň užitku u^0** .

(V3) $E(\mathbf{u}, \mathbf{p}^0)$ je **spojitá v \mathbf{u} pro jakýkoliv cenový vektor $\mathbf{p}^0 > 0$** . $E(\mathbf{u}, \mathbf{p}^0)$ je **spojitá v \mathbf{p} pro libovolnou úroveň užitku u^0** .

(V4) $E(u^0, \mathbf{p})$ je **lineárně homogenní v \mathbf{p} pro libovolnou úroveň užitku u^0** . Znamená to, že platí $E(u^0, \lambda \mathbf{p}) = \lambda \cdot E(u^0, \mathbf{p})$ pro libovolné $\lambda \in (0, +\infty)$

(V5) $E(u^0, \mathbf{p})$ je **konkávnní v cenách \mathbf{p} pro libovolnou úroveň užitku u^0** .

Znamená to, že platí $E(u^0, \mu \mathbf{p} + (1-\mu) \mathbf{p}^*) \geq \mu \cdot E(u^0, \mathbf{p}) + (1-\mu) \cdot E(u^0, \mathbf{p}^*)$ pro libovolné dva cenové vektory $\mathbf{p}, \mathbf{p}^* > 0$ a libovolné $\mu \in \langle 0, 1 \rangle$.

Vlastnost (V2) konstatuje, že s růstem velikosti užitku požadovaného spotřebitelem (ostře) roste i výdaj na pořízení komodit. Tatāž vlastnost ve vztahu k \mathbf{p} připouští, že růst některých cen (zpravidla těch, které právě nejsou ve vybrané kombinaci statků pro poskytujících užitok u^0) nemusí nutně vést k růstu výdajů spotřebitele. Oěekávaný (=úměrný) vývoj nákladů na komoditní kombinaci při změně cenového měřítka všech komodit pak vyjadřuje (V4), zatímco vlastnost (V5) obrazně charakterizuje „ne vyšší než lineární“ tendenci vývoje výdajů při růstu kterékoli z cen $p_i, i = 1, 2, \dots, n$. Vlastnost (V1) zahrnuje matematická omezení funkce $n+1$ proměnných v kontextu ekonomického významu $E(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ a konstatuje, že kladnou hodnotu užitku nelze dosāhnout zdarma. Spojitost (V3) v užitku i cenách konstatuje, že náklady nemohou skokovitě růst (ani klesat) tehdy, jestliže se jen nepatrně změní některā z cen nebo úroveň užitku u^0 .

Jestliže máme definovanu výdajovou funkci $E(u, p)$ s výše uvedenými vlastnostmi (jmenovitě vlastností (V2)), máme tím zaručeno, že k této výdajové funkci existuje funkce inverzní, která bude vyjadřovat hladinu užitku v jako funkci výdajů a cen komodit.

Význam výdajové funkce spočívá mj. v tom, že pomocí ní lze generovat celý *systém poptávkových funkcí v tzv. Hicksově smyslu*. Uvedená možnost (pro diferencovatelnou výdajovou funkci) vychází z modifikace tzv. Shephardova lemmatu. Z uvedeného lemmatu vyplývá, že lze psát :

$$(4.2) \quad \frac{\partial E(u, p)}{\partial p_j} = h_j(u, p), \quad \text{kde}$$

funkce na pravé straně vyjadřuje *Hicksovskou poptávku* po komoditě x_j .

4.2 Nepřímá užitková funkce a její vlastnosti

Definice 14 Máme dānu výdajovou funkci $M = E(u^0, p)$ s cenovým vektorem p a současně tím určenu konkrétní velikost výdajů M . Potom funkci

$$(4.3) \quad \psi(M, p) = \text{Max}[u(x); px = M]$$

nazveme **nepřímá užitková funkce [indirect utility function]** ve vztahu k výdajové funkci $E(u^0, p)$. Argumenty této funkce jsou tedy cenový vektor a velikost příjmu spotřebitele vynaloženého na nákup komodit v množstvích x .

Definice 14A Nepřímá užitková funkce $\psi(M, p)$ příslušná k výdajové funkci $E(p, u^0)$ s vlastnostmi (V1) - (V5) je charakterizována těmito vlastnostmi:

(W1) $\psi(M, p)$ je **reálná konečná a nezáporná funkce**, přičemž $\psi(0, p) = 0$.

(W2) $\psi(M, p^0)$ je **rostoucí v M pro jakýkoliv cenový vektor $p^0 > 0$** . Dále $\psi(M^0, p)$ je **nerostoucí v p (pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů M^0)**.

(W3) **spojitá v M pro jakýkoliv cenový vektor $p^0 > 0$ a spojitá v p pro libovolnou pevnou hodnotu výdajů M^0** .

(W4) $\psi(M, p)$ je **homogenní funkce stupně 0 současně v cenách p a výdajích M**.

Znamená to, že platí $\psi(\lambda M, \lambda p) = \psi(M, p)$ pro libovolné $\lambda \in (0, +\infty)$

(W5) $\psi(M^0, p)$ je **konkávní funkce v p pro jakoukoliv úroveň výdajů M^0** . Znamená to, že platí $\psi(M^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \geq \mu \cdot \psi(M^0, p) + (1-\mu) \cdot \psi(M^0, p^*)$ pro $\mu \in \langle 0, 1 \rangle$.

(W5*) $\psi(M^0, p)$ je **kvazikonvexní funkce v p pro jakoukoliv úroveň výdajů M^0** . Znamená to, že platí pro $\mu \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\psi(M^0, \mu p + (1-\mu)p^*) \leq \text{Max} [\psi(M^0, p); \psi(M^0, p^*)]$$

Prvá z vlastností (W1) konstatuje mj. že s nulovými peněžními prostředky žádný kladný užitek nezískáme: při kladných cenách statků nejsme bez peněz prostě žádné statky schopni zakoupit.

(W2) Ve vztahu k M se předpokládá, že zvýšený příjem je vynaložen účelně a není alokovan do neužitečných komodit. Dle téže (W2), se zvýšením kterékoliv z cen p_i (při neměnných výdajích) užitek nemůže nikdy vzrůst (nemusí však ani nutně klesnout, neboť ke zdražení může dojít u nenakupovaných statků).¹

Spojitosť (W3) v cenách i příjmu zřejmě odpovídá reálné situaci, že „nepatrná změna“ kterékoliv z cen p_i ani příjem M nemůže vyvolat skokovitou (nespojitou) změnu užítu plynoucího z nakupovaného spotřebního koše.

Vlastnost (W4) lze chápat tak, že pokud by došlo k tomu, že by se všechny ceny p_1, p_2, \dots, p_n i příjem M změnil v témže poměru (např. λ -násobně), nezmění se na situaci viděné očima spotřebitele vůbec nic: při nezměněných relativních cenových poměrech p_i / M není ze strany spotřebitele důvod ke změně poptávkového chování po potenciálně dostupných komoditách. (Spotřebitel se bude řídit stejnými preferenčními hledisky jako dříve.)

Konečně poslední z vlastností (W5) interpretována v první verzi (*konkávnost*) obrazně znamená, že při libovolné změně cen bude užitek z „lineární směsi“ obou cenových vektorů přinejmenším roven „lineární směsi“ dílčích užítků získaných s jedním, resp. druhým cenovým vektorem. Ve vlastnosti se nepřímo odráží „zisk v užítu“ plynoucí z toho, že při cenových změnách lze aspoň něco „ušetřit“ tím, že při substitučních možnostech lze kupovat méně z více zdražených statků a více z méně zdražených (či zlevněných nebo těch, u kterých se cena nezměnila). Druhá interpretace (*kvazikonvexnost*) pak určuje horní mez, kterou užitek ze směsi nemůže přesáhnout (ta je dána velikostí užítu z „užitkově příznivější“ cenové situace).

¹ Již jsme zmínili, že výdaj v ztotožňujeme s příjmem spotřebitele M

Doplňěk Konvexnost, konkávnost, kvazikonvexnost a kvazikonkávnost

Řekneme, že spojitá funkce $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n proměnných x_1, x_2, \dots, x_n (definovaná na konvexní množině X) je pro dva body $x, z \in X$ (aniž víme, zda $G(x) < G(z)$ nebo naopak)

(A1) ryze konvexní, jestliže platí ostrá nerovnost

$$G(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z) < \lambda \cdot G(x) + (1 - \lambda) \cdot G(z)$$

(B1) ryze konkávní, jestliže platí ostrá nerovnost

$$G(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z) > \lambda \cdot G(x) + (1 - \lambda) \cdot G(z)$$

(C1) ryze kvazikonvexní, jestliže platí ostrá nerovnost

$$G(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z) < \text{Max}[G(x), G(z)]$$

(D1) ryze kvazikonkávvní, jestliže platí ostrá nerovnost

$$G(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z) > \text{Min}[G(x), G(z)]$$

ve všech případech pro libovolné skalární $\lambda \in (0, 1)$.

(A2) konvexní, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z) \leq \lambda \cdot G(x) + (1 - \lambda) \cdot G(z)$$

(B2) konkávní, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z) \geq \lambda \cdot G(x) + (1 - \lambda) \cdot G(z)$$

(C2) kvazikonvexní, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z) \leq \text{Max}[G(x), G(z)]$$

(D2) kvazikonkávvní, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot z) \geq \text{Min}[G(x), G(z)]$$

ve všech případech pro libovolné skalární $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$.

Je-li známo, ve kterém z obou bodů je hodnota funkce $G(\cdot)$ větší, např. platí-li $G(x) < G(z)$, pak lze předchozí definice modifikovat např. takto:

(A3) konvexní, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(x/2 + z/2) \leq 0,5 \cdot G(x) + 0,5 \cdot G(z)$$

(B3) konkávní, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(x/2 + z/2) \geq 0,5 \cdot G(x) + 0,5 \cdot G(z)$$

(C3) kvazikonvexní, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(x/2 + z/2) \leq G(z)$$

(D3) kvazikonkávvní, jestliže platí neostrá nerovnost

$$G(x/2 + z/2) \geq G(x)$$

4.3 Marshallovské poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.1A) s podmínkou (3.1B) pro neznámé $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, případně i veličinu λ obdržíme pro každou komoditu

Definice 15 Poptávkovou funkci po i -té komoditě [*commodity demand function*] v *Marshallovském tvaru* [*in the Marshallian form*], zapsatelnou ve tvaru

$$(4.4) \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) ,$$

která je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru \mathbf{p} a příjmu spotřebitele \mathbf{M} .

Definice 15A Máme-li poptávku po komoditě \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vyjádřenu zápisem (4.4) s nějakou poptávkovou funkcí $\mathbf{x}_i = \mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ $n+1$ proměnných \mathbf{M} a \mathbf{p} , pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$ má následující vlastnosti :

(D1M) $\mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ je **reálná konečná nezáporná funkce** a platí pro ni $\mathbf{g}_i(0, \mathbf{p}) = 0$.

(D2M) $\mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ je **nerostoucí v ceně i -té komodity \mathbf{p}_i a neklesající v příjmu \mathbf{M}** .

(D3M) $\mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ je **spojitá v příjmu \mathbf{M} a spojitá v \mathbf{p}_i** ($i = 1, 2, \dots, n$).

(D4M) Marshallovské poptávkové funkce $\mathbf{x}_i = \mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ jsou **homogenní stupně 0 současně v cenách a příjmu**. Platí tedy $\mathbf{g}_i(\lambda \mathbf{M}, \lambda \mathbf{p}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$.

(D5M) Úplná **soustava marshallovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná**. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p}) = \mathbf{M}$.

(D6M) "Křížové" derivace marshallovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou **symetrické**, tzn. platí

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j} + \mathbf{x}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{x}_j(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_i} + \mathbf{x}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_j(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{M}} \quad \text{pro všechna } i, j$$

(D7M) Matice **S** rozměru $[n \times n]$ sestávající z prvků $\mathbf{s}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j} + \mathbf{x}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{M}}$ je

negativně semidefinitní, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí **S** podmínku

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}_j} + \mathbf{x}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{M}} \right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$$

takže lze psát $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{s}_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$. Přímým důsledkem negativní semidefinitnosti

S jsou podmínky $\mathbf{s}_{ii} \leq 0, i = 1, 2, \dots, n$). Vlastní cenové pružnosti jsou nekladné.

4.4 Hicksové poptávkové funkce a jejich vlastnosti

Řešením rovnic (3.6A) s podmínkou (3.6B) pro neznámé $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, případně i veličinu μ obdržíme pro každou komoditu

Definice 16 Poptávkovou funkci po i -té komoditě (*commodity demand function*) v *Hicksovském tvaru [in the Hicksian form]*, zapsatelnou ve tvaru

$$(4.5) \quad \mathbf{x}_i = h_i(\mathbf{u}, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

kteřá je základní charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na cenovém vektoru \mathbf{p} a na spotřebitelem žádané hladině užitku \mathbf{u} .

Definice 16A Máme-li poptávku po komoditě \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vyjádřenu zápisem (4.5) s nějakou poptávkovou funkcí $h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ $n+1$ proměnných \mathbf{u} a \mathbf{p} , pak každá taková poptávková funkce ze soustavy n poptávkových funkcí h_1, \dots, h_n má následující vlastnosti :

(D1H) $h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ je **reálná konečná a nezáporná funkce** a platí pro ni $h_i(0, \mathbf{p}) = 0$.

(D2H) $h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ je **nerostoucí v ceně i -té komodity p_i a neklesající v užitku \mathbf{u} .**

(D3H) $h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ je **spojitá v užitku \mathbf{u} a spojitá v p_i ($i = 1, 2, \dots, n$).**

(D4H) Hicksové poptávkové funkce $\mathbf{x}_i = h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ jsou **homogenní stupně 0 v cenách \mathbf{p}^2** . Znamená to, že platí $h_i(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{p}) = h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})$

(D5H) Úplná **soustava Hicksovských poptávkových funkcí je aditivní a součtovatelná**. Znamená to platnost rovnosti $\sum_{i=1}^n p_i h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = M$

(D6H) "Křížové" derivace hicksovských poptávek (podle jednotlivých cen) jsou **symetrické**, tzn. platí $\frac{\partial h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial p_i}$ pro všechna i, j

(D7H) Matice \mathbf{S}^* rozměrů $[n \times n]$ sestávající z prvků $s_{ij}^* = \frac{\partial h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial p_j}$ je **negativně**

semidefinitní, tzn. pro libovolný vektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, ne však identicky nulový, splňuje kvadratická forma určená maticí \mathbf{S}^* podmínku

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial p_j} \right] \cdot \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$$

\mathbf{S}^* je tvořena prvky s_{ij}^* , kde $s_{ij}^* = \frac{\partial h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial p_j}$, takže lze psát $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij}^* \cdot \xi_i \cdot \xi_j \leq 0$.

Důsledkem negativní semidefinitnosti \mathbf{S}^* jsou podmínky $s_{ii}^* \leq 0$.

² Je-li výchozí (výdajová) funkce homogenní stupně 1, je její derivace (poptávková funkce) homogenní stupně 0.

Poslední výrok tvrzení ad (D1) vyjadřuje skutečnost, že s nulovým příjmem nelze pořídit ani nejmenší množství žádného užitečného statku. Dvě vlastnosti obsažené v (D2) charakterizují závisle proměnnou (poptávku) jako monotónní funkce ceny p_i a příjmu M , přičemž zvýšení ceny neznamená nutně snížení poptávky (zájem spotřebitele může být upřen na jiné komodity) a zvýšení příjmu nemusí nutně vést (ze stejného důvodu) ke zvýšení poptávky po i -tém statku. Spojitost (D3) ve všech argumentech vylučuje skokovitý přírůstek poptávky při nepatrné změně ceny či příjmu. Vlastnosti uvedené v (D5) vyjadřují úplné rozložení disponibilního příjmu M na nákup (ne však nutně všech) n komodit bez ohledu na to, jakou formulaci poptávkových funkcí přijmeme. V podmínkách (D4) je obsažena zásada, že proporční změna důchodu a cen neovlivní nijak chování poptávky po žádné z komodit.

Součtovatelnost (D5M) a homogenita nultého stupně (D4M) jsou důležitým nástrojem v teoretické analýze poptávkových vztahů, nicméně častěji se vyjadřují zprostředkovaně v zápisech s derivacemi poptávkových funkcí (místo původních poptávkových funkcí). Z **podmínky součtovatelnosti (D5M)** takto vyplývají vztahy (platné pro $i = 1, 2, \dots, n$) :

$$(4.6A,B) \quad \sum_{k=1}^n p_k \cdot \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial M} = 1 \quad \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial p_i} + g_i(M, p) = 0$$

takže změna v příjmu M a cenách p způsobí přeskupení v nákupech, které neporuší výdajové omezení. Získáme je derivováním rozpočtového omezení

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = M \quad \text{podle příjmu, resp. podle ceny } p_i.$$

Identity (4.6A) a (4.6B) se nazývají **Engelova** resp. **Cournotova agregační podmínka**. Z podmínky homogenity nultého stupně (D4M) Marshallovských poptávek obdobně vyplývá, že pro $i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$(4.7) \quad \sum_{k=1}^n p_k \cdot \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial p_k} + M \cdot \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial M} = 0$$

Ověření Z podmínky homogenity 0-stupně vyplývá $g_k(\lambda M, \lambda p) = g_k(M, p)$ a tedy též

$$\frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial \lambda} = 0.$$

$$\frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial(\lambda M)} \cdot \frac{\partial(\lambda M)}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial(\lambda p)} \cdot \frac{\partial(\lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial(\lambda M)} \cdot M + \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial(\lambda p)} \cdot p$$

Speciální volbou pro $\lambda = 1$ dostaneme

$$0 = \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(\lambda M, \lambda p)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial M} \cdot M + \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial p} \cdot p = \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial M} \cdot M + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_k(M, p)}{\partial p_k} \cdot p_k$$

Chování poptávky spotřebitele vůči každé komoditě $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ jen v závislosti na jeho příjmu (tzn. při pevném cenovém vektoru p) pak udávají

4.5 Engelovy křivky

Určíme-li ceny $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ v Marshallovské poptávkové funkci (4.4) pevně, získáme

Definice 17 Engelovu křivku pro i -tou komoditu [*Engel curve*] zapsatelnou ve tvaru

$$(4.8) \quad x_i = f_i(\mathbf{M}),$$

která je charakteristikou informující o tvaru závislosti spotřebitelovy poptávky na jeho příjmu \mathbf{M} a odvoditelné z poptávkových funkcí $\mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ poté, co do nich dosadíme jako pevné hodnoty ceny jednotlivých komodit p_1, p_2, \dots, p_n .

Definice 17A Máme-li poptávku po i -té komoditě x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vyjádřenou zápisem (4.8) s nějakou *Engelovou křivkou* $f_i(\mathbf{M})$ jedné proměnné, pak každá tato Engelova křivka má následující vlastnosti :

(E1) Engelova křivka $f_i(\mathbf{M})$ je reálná, konečná nezáporná funkce a platí $f_i(0) = 0$.

(E2) Engelova křivka $f_i(\mathbf{M})$ je neklesající v příjmu \mathbf{M} .

(E3) Engelova křivka $f_i(\mathbf{M})$ je spojitá v \mathbf{M} .

(E4) Engelova křivka $f_i(\mathbf{M})$ je konkávní v \mathbf{M} .

(E5) Úplná soustava Engelových křivek $f_i(\mathbf{M})$ je součtovatelná, tzn. platí

$$\sum_{i=1}^n p_i f_i(\mathbf{M}) = \mathbf{M}.$$

(E6) Platí Engelova agregační podmínka $\sum_{k=1}^n p_k \cdot \frac{\partial f_k(\mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}} = 1$

Vlastnosti Engelovy křivky $f_i(\mathbf{M}), i = 1, 2, \dots, n$ jsou vesměs konformní s vlastnostmi Marshallovské poptávkové funkce $\mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$, pokud při pevném \mathbf{p} omezíme pozornost na chování poptávky ve vztahu k příjmu. Navíc se předpokládá konkávnost **(E4)** $f_i(\mathbf{M})$ jako funkce jedné proměnné \mathbf{M} a úplné vynaložení spotřebitelova příjmu na pořízení komodit (ne nutně všech) při jakékoliv úrovni \mathbf{M} . *Engelova křivka* je (jen) slabě monotónní, neboť zvýšení příjmu nemusí nutně vést ke zvýšení poptávky právě po i -té komoditě.

Tečna k *Engelově křivce* vyjadřuje hodnotu mezního sklonu ke spotřebě dané komodity, tzn. poměr mezi (limitně chápanou) změnou spotřeby (realizované poptávky) x_i a změnou důchodu M tj. $\frac{\partial x_i}{\partial M}$. Připomeňme, že výraz

$$s_{iM} = \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{M}{x_i} = \frac{\partial x_i}{x_i} \bigg/ \frac{\partial M}{M} \text{ nazýváme příjmová pružnost poptávky.}$$

Na její hodnotě závisí klasifikace ekonomických statků: V rámci nich

- a) je-li příjmová pružnost poptávky větší než 1, pak jde o *luxusní statek*.
- b) je-li příjmová pružnost poptávky v intervalu (0,1), jde o *normální statek*.
- c) je-li příjmová pružnost poptávky rovna 0, jde o *příjmově inertní statek*.
- d) je-li příjmová pružnost poptávky menší než 0, jde o *inferiorní statek*.

4.6 Shephardovo lemma a Royova identita

Nejdůležitějším tvrzením, které platí mezi výdajovou funkcí a soustavou Hicksovských poptávkových funkcemi v rovnovážné situaci, je **Shephardovo lemma**. Ronald W. Shephard je formuloval původně pro vztah mezi nákladovou funkcí (jako obdobou výdajové funkce) a poptávkovými funkcemi (po výrobních faktorech) v teorii produkce.

Tvrzení 6 Shephardovo lemma [Shephard lemma]

Máme dānu výdajovou funkci $E(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ příslušnou k užitkové funkci $u(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5). Potom jednotlivé ze soustavy poptávkových funkcí po komoditách získáme tímto způsobem

$$(4.9) \quad x_i = \frac{\partial E(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial p_i}$$

což znamená, že tvar poptávkové funkce po komoditě ζ_i je určen jako parciální derivace výdajové funkce podle ceny této komodity. Toto fundamentální tvrzení je základním východiskem při konstrukci soustavy poptávkových funkcí po užitek přinášejících statech z výdajové funkce.

Důkaz tvrzení 6

Zvolme pevně, ale jinak libovolně cenový vektor \mathbf{p}^0 , hladinu užitku u^0 a příslušný vektor optimálních (ve vztahu \mathbf{p}^0) n komoditních množství \mathbf{x}^0 . Dále pro jakýkoliv jiný cenový vektor \mathbf{p} definujme funkci $\chi(\mathbf{p})$ vztahem

$$(4.10) \quad \chi(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n p_k x_k^0 - E(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})$$

Protože \mathbf{x}^0 není nutně optimální ve vztahu k \mathbf{p} , výdaje na pořízení množství \mathbf{x}^0 při cenách \mathbf{p} musí vždy být přinejmenším tak velké, jako jsou analogické výdaje na pořízení těch množství, která jsou optimální vzhledem k \mathbf{p}^0 - tyto minimální výdaje udává výdajová funkce $E(\mathbf{u}, \mathbf{p})$. Tedy $\chi(\cdot)$ je vždy větší nebo nejméně rovna 0. Dále víme, že $\chi(\mathbf{p}^0)$ je rovna 0, tj. χ nabývá svého minima, pokud \mathbf{p} je rovno \mathbf{p}^0 . Proto všude tam, kde existují derivace $\frac{\partial \chi(\cdot)}{\partial p_i}$ musí platit

v komoditní kombinaci \mathbf{p}^0 :

$$(4.10) \quad \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0)}{\partial p_i} = \mathbf{x}_i^0 - \frac{\partial E(\mathbf{u}^0, \mathbf{p}^0)}{\partial p_i} = \mathbf{0}$$

Protože jsme pevnou hodnotu \mathbf{p}^0 volili libovolně, je vztah (4.10) dokázán. \square .

Poznámka 1 I když výdajová funkce splňuje všechny vlastnosti (V1),..., (V5), nelze obecně zaručit, že pomocí *Shephardova lemmatu* odvozený systém poptávkových funkcí splňuje všechny vlastnosti předpokládané u funkcí deklarovaných jako (*Hicksovské*) poptávkové, tj. (D1H), ..., (D6H).

Poznámka 2 Opačný postup - tzn. sestavení výdajové funkce integrací systému poptávkových funkcí (aniž trváme na splnění vlastností (D1M),..., (D6M) - není obecně uskutečnitelný, a to ani tehdy ne, jestliže s jistotou víme, že taková výdajová funkce $E(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0)$ existuje a že ji lze vyjádřit v explicitním tvaru. **Pokud lze takovou výdajovou funkci zkonstruovat ze soustavy poptávkových funkcí, říkáme, že tato soustava splňuje tzv. "podmínku integrability".**

Dalším užitečným tvrzením je věta, která charakterizuje určitou „příbuznost“ struktury mezi funkčními tvary u jednotlivých poptávkových funkcí.

Tvrzení 7 Symetrie poptávkových funkcí [symmetry of the demand functions]

Mějme dánu výdajovou funkci $E(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})$ příslušnou k užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (V1), (V2), (V3), (V4), (V5), která má navíc spojitě všechny parciální derivace aspoň do 2. řádu včetně. Potom pro systém poptávkových funkcí vyvozených pomocí *Shephardova lemmatu* (4.10) platí:

$$(4.11) \quad \frac{\partial x_j(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial p_j}$$

Důkaz tvrzení 7

Okamžitě vyplývá z tzv. *Youngovy věty* známé z matematické analýzy deklarující nezávislost druhých parciálních derivací na pořadí derivování, jestliže jsou tyto druhé parciální derivace spojitě. Pak platí:

$$(4.12) \quad \frac{\partial x_j(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial p_k} = \frac{\partial E(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial E(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial p_k \partial p_j} = \frac{\partial x_k(\mathbf{u}^0, \mathbf{p})}{\partial p_j}$$

čímž je důkaz tvrzení proveden. \square .

V tomto smyslu lze tedy mluvit o podmínce symetrie každé funkce ze soustavy poptávkových funkcí. Je tedy zřejmé, že všechny poptávkové funkce musí mít formálně příbuznou funkční podobu, která se může u jednotlivých funkcí systému lišit různými hodnotami parametrů těchto funkcí, nemůže jít však o

principiálně odlišný funkční typ. (např. jedna poptávková funkce nemůže být logaritmem součtu kvadrátů svých argumentů, zatímco druhá by byla arkustangentou součinu odmocnin těchže argumentů). Uvedená podmínka tedy výrazně snižuje „pestrost“ v možných vzájemných odlišnostech jednotlivých poptávkových funkcí.

Shephardovo lemma umožňuje generovat Hicksovy poptávkové funkce z výdajové funkce. Pokud bychom chtěli odvodit **Marshallovy poptávkové funkce**, stačí k tomu substituovat za argument u ve výdajové funkci hodnoty nepřímé užitkové funkce $\psi(\cdot)$, která má argumenty \mathbf{p} a \mathbf{M} . Dostaneme

$$(4.13) \quad x_i = h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = h_i(\psi(\mathbf{M}, \mathbf{p}), \mathbf{p}) = g_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$$

tzn. **soustavu poptávkových funkcí (pro $i = 1, 2, \dots, n$) v Marshallově tvaru**.

Pokud bychom byli postaveni před opačný problém, tj. vyvodit Hicksovy poptávkové funkce z Marshallových, potom lze postupovat v inverzním směru. Máme-li dány $g_i(\mathbf{M}, \mathbf{p}), i = 1, 2, \dots, n$, dosadíme za argument \mathbf{M} -výdaj je plně vynaložen na nákup x - hodnotu výdajové funkce $E(u, \mathbf{p})$.

$$(4.14) \quad x_i = g_i(\mathbf{M}, \mathbf{p}) = h_i(E(\mathbf{u}, \mathbf{p}), \mathbf{p}) = h_i(\mathbf{u}, \mathbf{p})$$

Vztah mezi nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí, jež jsou vzájemně inverzní, lze zapsat identitou

$$(4.15) \quad \psi(\mathbf{M}, \mathbf{p}) = \psi(E(\mathbf{u}, \mathbf{p}), \mathbf{p}) \equiv \mathbf{u}$$

Obdobou *Shephardova lemmatu* formulovaného ve vztahu k výdajové funkci pro vyvození poptávkových funkcí (tentokrát v Marshallově tvaru) z nepřímé užitkové funkce $\psi(\mathbf{p}, M)$ je vztah známý jako **Royova identita**. Je pojmenována po svém objeviteli, francouzském ekonomu a matematikovi **René Royovi [1943]**. Nezávisle na něm ji formuloval jiný francouzský matematik **Jean Villé [1941]**.

Tvrzení 8 Royova identita [Roy-Villé identity]

Máme danu nepřímou užitkovou funkci $\psi(\mathbf{p}, M)$ příslušnou užitkové funkci $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ s vlastnostmi (W1), (W2), (W3), (W4), (W5). Potom **soustavu Marshallových poptávkových funkcí po komoditách** získáme tímto způsobem

$$(4.16) \quad x_i(\mathbf{M}, \mathbf{p}) = \frac{\frac{\partial \psi(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial p_i}}{\frac{\partial \psi(\mathbf{M}, \mathbf{p})}{\partial M}}$$

To znamená, že poptávkovou funkci po i -té komoditě obdržíme jako (záporně vzatý) podíl dvou parciálních derivací nepřímé užitkové funkce $\psi(M, p)$, a to jednak podle ceny i -té komodity, jednak podle spotřebitelova příjmu M .

Důkaz tvrzení 8

Vztahem (4.7) jsme zapsali, že výdajová funkce a nepřímá užitková funkce jsou vzájemně v inverzním vztahu. Ten můžeme vyjádřit zápisem identity:

$$(4.17) \quad \psi[E(u,p),p] = u.$$

Jestliže tuto identitu (platící pro libovolnou dvojici pevných hodnot \mathbf{p} a \mathbf{u}) derivujeme podle pevně zvolené ceny p_i , dostaneme při uplatnění *řetězového pravidla pro derivaci složené funkce* vztah

$$(4.18) \quad \frac{\partial \psi[E(u,p),p]}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi(E(u,p),p)}{\partial E(u,p)} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_i} + \frac{\partial \psi(E(u,p),p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_i} = 0, \text{ neboť}$$

při pevném \mathbf{u} je $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_i} = \mathbf{0}$ a dále $\frac{\partial p}{\partial p_i} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)'$, neboť $\frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \delta_{ij}$ (*Kroneckerovo* δ), $i, j = 1, 2, \dots, n$ a dále $E(u,p) = M$, neboť příjem M je rozdělen beze zbytku.

Vztah (4.18) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$(4.19) \quad \frac{\partial \psi(M,p)}{\partial M} \cdot \frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i} + \frac{\partial \psi(M,p)}{\partial p_i} = 0$$

Z *Shephardova lemmatu* víme, že $\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i} = x_i$ (tj. Hicksova poptávka po i -tém statku). Odtud tedy již snadno odvodíme

$$(4.16) \quad x_i = g_i(M,p) = - \frac{\frac{\partial \psi(M,p)}{\partial p_i}}{\frac{\partial \psi(M,p)}{\partial M}} \quad \square.$$

Poznámka 3 Jestliže nepřímou užitkovou funkci vyjádříme v normalizovaném tvaru, tzn. s argumenty představujícími jednotkové ceny statků (dělené příjmem) $\psi\left(\frac{p_1}{M}, \frac{p_2}{M}, \dots, \frac{p_n}{M}, 1\right) = \psi^*(r_1, r_2, \dots, r_n)$, kde pracujeme s n -členným vektorem normovaných cen (r_1, r_2, \dots, r_n) , pak lze *Royovu identitu* zapsat jako

$$(4.20) \quad \frac{p_i x_i}{M} = \frac{\frac{\partial \psi^*(r)}{\partial \log r_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi^*(r)}{\partial \log r_j}}$$

tedy ve tvaru vyjadřujícím rozpočtovou účast i -té komodity na celkovém příjmu M jako podíl parciální derivace nepřímé užitkové funkce podle logaritmované ceny této komodity a součtu analogicky vyjádřených parciálních derivací $\psi^*(r)$ podle všech logaritmovaných cen.

4.7 Schématické vyjádření vztahů

mezi přímou užitkovou, nepřímou užitkovou a výdajovou funkcí a soustavami poptávkových funkcí v Marshallovském a Hicksovském tvaru

K vyjádření vztahů mezi ekonomickými funkčními typy může sloužit schéma

rozpočtové omezení

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M$$

Minimalizační úloha

$$\begin{array}{l} \text{Min } \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \text{za podmínky} \\ u(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq u^0 \end{array}$$

substituce

$$x_i = h_i(u^0, p)$$

VÝDAJOVÁ FUNKCE

$$E(u^0, p)$$

Shephardovo lemma

$$x_i = \frac{\partial E(u^0, p)}{\partial p_i}$$

derivace E podle p_i

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ

**PO KOMODITÁCH
V HICKSOVĚ TVARU**

$$x_i = h_i(u^0, p)$$

spotřebitel

užitková funkce

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Maximalizační úloha

$$\begin{array}{l} \text{Max } u(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{za podmínky} \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M, x_i \geq 0 \end{array}$$

substituce

$$x_i = g_i(M, p)$$

NEPŘÍMÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

$$\psi(M, p)$$

Royova identita

$$x_i = - \frac{\frac{\partial \psi(M, p)}{\partial p_i}}{\frac{\partial \psi(M, p)}{\partial M}}$$

záporný podíl derivací ψ podle p_i, M

SOUSTAVA POPTÁVKOVÝCH FUNKCÍ

**PO KOMODITÁCH
V MARSHALLOVĚ TVARU**

$$x_i = g_i(M, p)$$

*/ Podrobněji R.W. Shephard: Cost and Production Functions (1953) nebo tentýž autor: Theory of Cost and Production Functions. Princeton U.P. 1970.

4.8 Problém „integrability“

Poznámka 4

Poptávkové funkce v Marshallovském tvaru lze získat v podstatě třemi způsoby:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením maximalizačního problému (1A) při rozpočtovém omezení (1B).

(B) Z nepřímé užitkové funkce pomocí Royovy identity (4.16)

(C) Z Hicksovských poptávkových funkcí (4.5) substitucí (4.14)

Jen u druhého způsobu je však zajištěn úspěch. *Cesta řešením maximalizačního problému nemusí vést k vyjádření marshallovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru* a pokud je toto možné, bude zpravidla zejména v obecných n-komoditních případech výsledný výraz poptávek velmi komplikovaný (obecně se všemi parametry výchozí přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). Ani v případě (C) nemusíme vždy získat explicitní tvar poptávek (Problém je ale méně vážný než v případě (A).

Poznámka 5

Poptávkové funkce v Hicksovském tvaru lze získat rovněž třemi způsoby:

(A) Z přímé užitkové funkce přímým řešením minimalizačního problému (6A) při užitkovém omezení (6B).

(B) Z výdajové funkce pomocí Shephardova lemmatu (4.9)

(C) Z Marshallovských poptávkových funkcí (4.4) substitucí (4.13)

I zde je úspěch zajištěn jen ve druhém případě. *Cesta řešením minimalizačního problému nemusí vést k vyjádření hicksovských poptávkových funkcí v explicitním tvaru* a i když by toto bylo možné, bude zpravidla v obecných n-komoditních případech výsledný výraz poptávek velmi komplikovaný (obecně se všemi parametry přímé užitkové funkce, všemi cenami a příjmem). Ani zde v případě (C) nemusíme obecně získat explicitní tvar poptávek (byť problém je méně vážný než v (A)

Vztah (11) $\mathbf{x}_i(\mathbf{E}(u^0, \mathbf{p})) = \mathbf{h}_i(u^0, \mathbf{p})$ a *Shephardovo lemma* (4.9) dovolují psát obě soustavy (hicksovských i marshallovských) poptávkových funkcí vyjádřeními v parciálních diferenciálních rovnicích

$$(4.21A,B) \quad \mathbf{x}_i(\mathbf{E}(u^0, \mathbf{p})) = \frac{\partial \mathbf{E}(u^0, \mathbf{p})}{\partial p_i} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{x}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p}) = \frac{\partial \mathbf{E}(\Psi(\mathbf{M}, \mathbf{p}), \mathbf{p})}{\partial p_i} .$$

Řešením jedné či druhé soustavy (4.21) pro $\mathbf{E}(u, \mathbf{p})$, resp. $\Psi(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ bychom tedy mohli – *aspoň v principu* – získat výdajovou, resp. přímou užitkovou funkci.

Sestavení/vytvoření výdajové funkce $\mathbf{E}(u, \mathbf{p})$ z úplné soustavy hicksovských poptávkových funkcí $\mathbf{h}_i(u, \mathbf{p})$ z (4.5) je však možné jen za předpokladů (D6H) a (D7H), tzn., že matice \mathbf{S}^* musí být symetrická a pozitivně semidefinitní.

Podobně, **zpětné vytvoření/rekonstrukce nepřímé užitkové funkce $\psi(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ z úplné soustavy marshallovských poptávkových funkcí $\mathbf{g}_i(\mathbf{M}, \mathbf{p})$ z (4.4) je možné jen (mj.) za předpokladů (D6M), (D7M), tzn. že Sluckého substituční matice \mathbf{S} bude symetrická a pozitivně semidefinitní.**

4.9 Alternativní vyvození Sluckého rovnice

Sluckého rovnici (6.18) odvozenou v části 6 přímo můžeme vyvodit také jiným způsobem, ve kterém využijeme *Shephardova lemmatu*.

Vyjdeme přitom z identity

$$h_i(u, p) = x_i(E(u, p), p),$$

kterou derivujeme podle ceny j -tého statku p_j . Dostaneme tak

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial E(u, p)} \cdot \frac{\partial E(u, p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p_j},$$

Protože však zřejmě $E(u, p) = M$, $\frac{\partial p}{\partial p_j} = \delta_{ij}$ (Kroneckerovo δ) a protože dle

Shephardova lemmatu (4.9) platí $\frac{\partial E(u, p)}{\partial p_j} = x_j$, dostáváme z předchozího

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial M} \cdot x_j + \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial p_j}, \text{ neboli}$$

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M} \cdot x_j + \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j},$$

Poznámka 1 Povšimněme si, že výraz vlevo reprezentuje Hicksovské, zatímco oba výrazy vpravo Marshallovské pojetí. Po přeskupení členů již dostáváme *Sluckého rovnici* v obvyklém zápisu

$$\frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial p_j} = -x_j \cdot \frac{\partial x_i(E(u, p), p)}{\partial M} + \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j}, \text{ resp.}$$

$$\frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j} = -\frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M} \cdot x_j + \frac{\partial x_i(u, p)}{\partial p_j},$$

Zznamenejme, že důchodový člen je reprezentován Marshallovským zápisem, zatímco

substituční člen (obecně definovaný jako $X_{ij} = \lambda \cdot \frac{|U_{ij}|}{|U|} = \frac{u_j}{p_j} \cdot \frac{|U_{ij}|}{|U|}$) je vyjádřen v Hicksovské

notaci (s nepřítomností M).

Poznámka 2 Vzhledem k symetrii Hicksovských poptávkových funkcí

$$\frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(u, p)}{\partial p_i}$$

platí pro Marshallovské poptávkové funkce tato symetrie

$$\frac{\partial x_i(M, p)}{\partial M} \cdot x_j + \frac{\partial x_i(M, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(M, p)}{\partial M} \cdot x_i + \frac{\partial x_j(M, p)}{\partial p_i}$$