Tvary některých dvoukomoditních indiferentních křivek

V následujícím oddíle uvedeme tvary indiferentních křivek pro 12 užitkových funkcí vyjádřitelných jednoduchým analytickým zápisem:

1. LINEÁRNÍ UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.1) $$u(\mathrm{x}) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

2. KVADRATICKÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.2) $$u(\mathrm{x}) = \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

2A. ROZŠÍŘENÁ KVADRATICKÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.3) $$u(\mathrm{x}) = 0{,}5(\beta_1 x_1^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

3. ODMOCNINNÁ UŽITKOVÁ FUNKCE¨

(4.4) $$u(\mathrm{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

4. LOGARITMICKÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.5) $$u(x_1, x_2) = \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2, \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

5. ADDILOG UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.6) $$u(\mathrm{x}) = \alpha_1 x_1^{\beta_1} + \alpha_2 x_2^{\beta_2} \qquad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$$

6 LEONTIEFOVA UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.7) $$u(\mathrm{x}) = Min[\beta_1 x_1 ; \beta_2 x_2]$$

7 ZOBECNÉNÁ LEONTIEFOVA UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.8) $$u(\mathrm{x}) = \beta_1 x_1 + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2} + \beta_2 x_2 \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

8 TRANSLOGaritmická UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.9) $$\log\,(u(\mathrm{x}) = \beta_1 \log x_1 + \beta_{12} \log x_1 . \log x_2 + \beta_2 \log x_2 \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

9 MOCNINNÁ (COBB-DOUGLASOVA) UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.10) $$u(\mathrm{x}) = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \qquad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$$

10 STONE-GEARYHO UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.11) $$u(\mathrm{x}) = \beta_0 (x_1 - \alpha_1)^{\beta_1} . (x_2 - \alpha_2)^{\beta_1}$$
$$\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0 \quad x_1 \geq \alpha_1 \geq 0,\ x_2 \geq \alpha_2 \geq 0$$

11 ARKUSTANGENS UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.12) $$u(\mathrm{x}) = arctg\left(\beta_1 \sqrt{x_1 - \alpha_1} + \beta_2 \sqrt{x_1 - \alpha}\right)$$
$$\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0 \quad x_1 \geq \alpha_1 \geq 0,\ x_2 \geq \alpha_2 \geq 0$$

1. LINEÁRNÍ UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.1) $$u(\mathrm{x}) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA $$x_2 = \frac{u^0 - \beta_1 x_1}{\beta_2}$$

2. KVADRATICKÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.10) $$u(\mathrm{x}) = \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA $$x_2 = \sqrt{\frac{u^0 - \beta_1 {x_1}^2}{\beta_2}}$$

2A. ROZŠÍŘENÁ KVADRATICKÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

$$u(\mathrm{x}) = 0{,}5(\beta_1 x_1^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_2 x_2^2) \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

$$2.u^0 = \beta_1 x_1^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_2 x_2^2$$

$$\beta_{12} x_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 = 2.u^0 - \beta_1 x_1^2$$

$$x_2 = \frac{-\beta_{12} x_1 \pm \sqrt{{\beta_{12}}^2 {x_1}^2 + 4\beta_2 \left(2u^0 - \beta_1 x_1^2\right)}}{2\beta_2}$$

$$x_2 = \frac{-\beta_{12} x_1 \pm \sqrt{\left({\beta_{12}}^2 - 4\beta_1\beta_2\right).{x_1}^2 + 8\beta_2 u^0}}{2\beta_2}$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA

3. ODMOCNINNÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.25) $$u(\mathrm{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} \qquad \beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA $$x_2 = \left(\frac{u^0 - \beta_1 \sqrt{x_1}}{\beta_2}\right)^2$$

4. LOGARITMICKÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

$$u(x_1, x_2) = \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \mathbf{x_1 > 1, x_2 > 1} \quad .$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA $$x_2 = exp\left(\frac{u^0 - \beta_1 \log x_1}{\beta_2}\right)$$

5. ADDILOG UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.10) $$u(\mathrm{x}) = \alpha_1 x_1^{\beta_1} + \alpha_2 x_2^{\beta_2} \qquad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0,\ \alpha_2 > 0$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA $$x_2 = \left(\frac{u^0 - \alpha_1 x_1^{\beta_1}}{\alpha_2} \right)^{1/\beta_2}$$

6. LEONTIEFOVA UŽITKOVÁ FUNKCE

(4.17) $$u(\mathrm{x}) = Min[\beta_1 x_1; \beta_2 x_2]$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA: $x_1 = \beta_2$ pro $x_2 \geq \beta_1$ $\qquad$ $x_2 = \beta_1$ pro $x_1 \geq \beta_2$

Eficientní podmnožina PMV je vždy jednobodová v bodech, kde platí $x_2 = \dfrac{\beta_1 x_1}{\beta_2}$

7. ZOBECNĚNÁ LEONTIEFOVA UŽITKOVÁ FUNKCE

$$u(\mathrm{x}) = \beta_1 \sqrt{x_1} + \beta_2 \sqrt{x_2} + \beta_{11} x_1 + \beta_{12} \sqrt{x_1 x_2} + \beta_{22} x_2$$

$$u^0 - \beta_1 \sqrt{x_1} - \beta_{11} x_1 = (\beta_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1}) \sqrt{x_2} + \beta_{22} x_2$$

$$\beta_{22} x_2 + (\beta_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1}) \sqrt{x_2} - \left(u^0 - \beta_1 \sqrt{x_1} - \beta_{11} x_1\right) = 0$$

$$\beta_{22} z_2{}^2 + (\beta_2 + \beta_{12} \sqrt{x_1}) z_2 - \left(u^0 - \beta_1 \sqrt{x_1} - \beta_{11} x_1\right) = 0$$

$$z_2 = \frac{-(\beta_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}) \pm \sqrt{(\beta_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1})^2 + 4\beta_{22}(u^0 - \beta_1\sqrt{x_1} - \beta_{11}x_1)}}{2\beta_{22}}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{-(\beta_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1}) \pm \sqrt{(\beta_2 + \beta_{12}\sqrt{x_1})^2 + 4\beta_{22}(u^0 - \beta_1\sqrt{x_1} - \beta_{11}x_1)}}{2\beta_{22}}}$$

8. TRANSLOGaritmická UŽITKOVÁ FUNKCE

$$log\, u(\mathrm{x}) = \beta_1 \, log\, x_1 + \beta_{12} \, log\, x_1 . log\, x_2 + \beta_2 \, log\, x_2$$

$$\frac{log\, u^0 - \beta_1 \, log\, x_1}{\beta_{12} \, log\, x_1 + \beta_2} = log\, x_2$$

$$x_2 = exp\left(\frac{log\, u^0 - \beta_1 \, log\, x_1}{\beta_{12} \, log\, x_1 + \beta_2} \right)$$

9. MOCNINNÁ (COBB-DOUGLASOVA) UŽITKOVÁ FUNKCE

$$u(\mathrm{x}) = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \qquad \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA $$x_2 = \left(\frac{u^0}{\beta_0 . x_1^{\beta_1}} \right)^{1/\beta_2}$$

10. STONE-GEARYHO UŽITKOVÁ FUNKCE

$$u(\mathrm{x}) = \beta_0 (x_1 - \alpha_1)^{\beta_1} . (x_2 - \alpha_2)^{\beta_1}$$

$$\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0 \quad x_1 \geq \alpha_1 \geq 0,\ x_2 \geq \alpha_2 \geq 0$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA $$x_2 = \left(\frac{u^0}{\beta_0 . (x_1 - \alpha_1)^{\beta_1}} \right)^{1/\beta_2} + \alpha_2$$

11. ARKUSTANGENS/ODMOCNINNÁ UŽITKOVÁ FUNKCE

$$u(\mathrm{x}) = arctg\left(\beta_1 \sqrt{x_1 - \alpha_1} + \beta_2 \sqrt{x_2 - \alpha_2}\right)$$

$$x_1 \geq \alpha_1 \geq 0 \quad x_2 \geq \alpha_2 \geq 0 \quad \beta_1 > 0 \quad \beta_2 > 0$$

$$\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0 \quad x_1 \geq \alpha_1 \geq 0,\ x_2 \geq \alpha_2 \geq 0$$

$$tg(u^0) = \beta_1 \sqrt{x_1 - \alpha_1} + \beta_2 \sqrt{x_2 - \alpha_2}$$

$$\frac{tg(u^0) - \beta_1 \sqrt{x_1 - \alpha_1}}{\beta_2} = \sqrt{x_2 - \alpha_2}$$

INDIFERENČNÍ KŘIVKA $$x_2 = \left(\frac{tg(u^0) - \beta_1 \sqrt{x_1 - \alpha_1}}{\beta_2} \right)^2 + \alpha_2$$

12. ARKUSTANGENS UŽITKOVÁ FUNKCE

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}) = \beta_1 . \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{x}_1 - \alpha_1} + \beta_2 . \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{x}_2 - \alpha_2}$$

$$x_1 \geq \alpha_1 \geq 0 \quad x_2 \geq \alpha_2 \geq 0 \quad \beta_1 > 0 \quad \beta_2 > 0$$

$$\mathrm{u}^0 - \beta_1 . \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{x}_1 - \alpha_1} = \beta_2 . \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{x}_2 - \alpha_2}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{u}^0 - \beta_1 . \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{x}_1 - \alpha_1}}{\beta_2} \right) = \sqrt{\mathrm{x}_2 - \alpha_2}$$

$$\mathrm{tg}^2\left(\frac{\mathrm{u}^0 - \beta_1 . \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{x}_1 - \alpha_1}}{\beta_2} \right) + \alpha_2 = \mathrm{x}_2$$