

Teorie produkce

Teorie produkce je další z oblastí matematické ekonomie, v níž matematické nástroje slouží k formalizaci mikroekonomické teorie. Analyzuje se zde chování typického výrobního ekonomického subjektu (firmy), který usiluje o racionální fungování výrobního procesu v tržním prostředí, kde ceny výrobních faktorů, příp. výrobků jsou určeny mimo vůli výrobce, jsou tedy považovány za exogenní veličiny. Soubor *výrobních faktorů* v rámci uvažované technologie (*souborů výrobních postupů, zkušeností, informací, know-how*) vede k dosažení určité úrovně produkce (*výroby, výstupu, outputu*). Výrobce přitom primárně usiluje o maximalizaci ziskové stránky výroby tzn. o maximalizaci rozdílu mezi objemem tržeb z prodaných výrobků a mezi s výrobou souvisejícími výrobními náklady.

Zatím ponecháme stranou cenová hlediska a soustředíme se na "technologickou" stránku výrobního procesu. Popíšeme elementární vlastnosti, které charakterizují abstraktně chápaný výrobní vztah, pomocí něhož se výrobní faktory transformují v rámci dané technologie do celkové produkce. Tento vztah nazýváme *produkční funkcí*. Později k tomuto připojíme analýzu cenově-nákladové stránky výroby, abychom mohli zkoumat zákonitosti, které v daném prostředí platí mezi uvažovanými ekonomickými kategoriemi. V některých směrech zde spatříme obdobu ekonomických funkčních typů, se kterými jsme se dříve setkali v prostředí analýzy spotřebitelské poptávky.

1. Produkční množiny, produkční funkce

Nejprve zavedeme základní pojmový aparát umožňující na základě množinových kategorií (tzv. **produkčních množin vstupů**, popř. **výstupů**) zavést pojem **produkční funkce**. Omezíme se na výrobní vztahy v naturálním pojetí, zatím bez zavedení cenových vektorů (výrobních činitelů, resp. výrobků).

Produkční funkce však není výchozím, fundamentálním pojmem. Lze uplatnit složitější analytický aparát (tzv. **produkční korespondence**, či **relace**) který však překračuje rámec aktuální potřeby výkladu. Tyto pojmy poprvé důkladně vyšetřoval počátkem 50.let americký matematický ekonom prof. **Ronald W. Shephard**, který při teoretické analýze elementárních vlastností produkčních vztahů dospěl k možnosti popsat strukturu vlastností **produkčních množin** axiomaticky.

Definice 1

Uvažujeme-li konkrétní hodnotu velikosti produkce $y^0 > 0$, pak pro danou technologii je příslušná **produkční množina vstupů** [production input set] $L(y^0)$ definována jako množina kombinací všech výrobních faktorů, s nimiž lze v dané technologii dosáhnout produkce y^0 . Jestliže této technologii odpovídá konkrétní produkční funkce $F(x)$, lze $L(y^0)$ vyjádřit jako

$$L(y^0) = \{x; x \geq 0, F(x) \geq y^0\}$$

V produkční množině vstupů jsou - jak patrné z definice - obsaženy i **neefektivní kombinace výrobních faktorů** (faktory jsou přítomny ve větších množstvích, než je nutné k dosažení produkce y^0). Je proto účelné se v další analýze zaměřit jen na hraniční body množiny $L(y^0)$, případně na oblasti těchto bodů, vyznačující se úsporným nakládáním s výrobními faktory ve vztahu k požadované úrovni produkce.

Definice 2

Izokvanta [Isoquant] $Q(y^0)$ (na hladině produkce y^0) **produkční množiny vstupů** $L(y^0)$ je definována jako

$$Q(y^0) = \{x \in L(y^0); \Theta \cdot x \notin L(y^0)\} \quad \text{pro skalární } \Theta \in (0,1)$$

Jde tedy o množinu hraničních bodů produkční množiny vstupů, vymezující takové kombinace výrobních faktorů, které jsou v níže uvedeném smyslu postačující pro dosažení produkce na úrovni y^0 . Izokvantu ve vztahu k produkční funkci se chápat jako obdobu indifferenční křivky vůči užitkové funkci $u(x)$. Jinak ale produkční funkce vzhledem k objektivní možnosti měřit velikost produkce (peněžně i naturálně) se od užitkové funkce liší mj. právě svým kardinálním vymezením.

Definice 3

Účinná (efektivní) podmnožina [efficient subset] $E(y^0)$ produkční množiny vstupů je daná definicí

$$E(y^0) = \{x \in L(y^0), z \leq x \text{ (avšak } z \neq x) \Rightarrow z \notin L(y^0)\}$$

Účinná podmnožina $E(y^0)$ reprezentuje takové varianty nasazení výrobních faktorů, při kterých jsou tyto faktory vynakládány právě v minimálních nutných množstvích.

Abychom si lépe uvědomili rozdíl mezi *izokvantou* a *účinnou podmnožinou* (téže *produkční množiny vstupů* $L(y^0)$), všimněme si, že bod x leží na izokvantě $Q(y^0)$ právě tehdy, neexistuje-li žádný jiný bod z , který by byl jeho proporčním zmenšením (ležel by tedy na polopřímce spojující počátek souřadnic s bodem x nacházejícím se na izokvantě) a který by rovněž na této izokvantě ležel. Naproti tomu bod (tzn. kombinace výrobních faktorů) x účinné podmnožiny produkční množiny vstupů $E(y^0)$ nemůže být "zmenšen" v žádném směru rovnoběžném s osami souřadnic (aby tímto zmenšením vzniklý jiný bod z ještě ležel na účinné podmnožině). Bod účinné podmnožiny musí být bodem izokvanty, zatímco opačně tomu tak být nemusí.

Poznámka 1

Jednou z typických vlastností množiny $L(y^0)$ je její konvexnost, která připouští technologie dělitelné v čase. Jestliže x, z náleží do $L(y^0)$, pak lze produkce y^0 dosáhnout tak, že po dobu λ používáme faktory v kombinaci x a po zbývajícím časový úsek $(1-\lambda)$ v kombinaci z .

Stejně jako vymezuje produkční funkce $F(x)$ soustavu produkčních množin vstupů, lze také obráceně pomocí posloupnosti produkčních množin vstupů $L(y)$ s vhodnými vlastnostmi definovat produkční funkci $F(x)$ vztahem

$$F(x) = \text{Max}\{y; x \in L(y)\}$$

Produkční funkce je definována - při vhodných vlastnostech produkčních množin vstupů jako je jejich uzavřenost a konvexnost pro každou úroveň produkce, prázdný průnik těchto množin při $\lim y \rightarrow \infty$, tj. při neomezeně rostoucí produkci - **jako maximální dosažitelný výstup, disponujeme-li danou množinou výrobních faktorů x .**

2 Vlastnosti obecné produkční funkce

Na základě podrobné teoretické analýzy provedené v 50. letech **Ronald W. Shephardem**, lze pro obecnou produkční funkci $F(\mathbf{x})$ přijmout tuto (axiomatickou) soustavu vlastností:

(P1) $F(\mathbf{0}) = 0$; tj. hodnototvorný výrobní proces může být realizován pouze s kladnými hodnotami (aspoň některých) výrobních faktorů.

(P2) $F(\mathbf{x})$ je konečná reálná a nezáporná funkce proměnných x_1, x_2, \dots, x_n při jakýchkoliv konečných hodnotách výrobních faktorů vzatých z nezáporných definičních oborů $X_j = \langle 0, +\infty \rangle$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$.

(P3) $F(\mathbf{x})$ je neklesající funkce v každé proměnné. Přidáním množství kteréhokoliv výrobního faktoru nemůže dojít k poklesu produkce. Připouští se však, že mezní produktivita určitého faktoru v některé výrobní situaci může být nulová, tzn. že ne vždy vede zvýšení množství použitého výrobního faktoru k růstu produkce.

(P4) Existuje-li taková kombinace výrobních faktorů $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, že $F(\lambda\mathbf{x}) > 0$ pro nějaké skalární $\lambda > 0$, pak

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda\mathbf{x}) = +\infty$$

Předpoklad charakterizuje vlastnost neomezeného růstu produkce, jestliže proporcionálně zvětšujeme množství faktorů v kombinaci, která poskytuje nenulový výnos. To např. vylučuje uplatnění (jako produkčních) funkcí, které se blíží k "asymptotě" rovnoběžné s některou ze souřadnicových os.

(P5) $F(\mathbf{x})$ je shora polospojité funkce v celém definičním oboru.

Vzhledem k předpokladu (P3) lze ekvivalentně mluvit o polospojítosti zprava. Vlastnost přiblížíme definicí z matematické analýzy:

Funkce $F(\mathbf{x})$ je polospojité shora (tj. je-li neklesající, zprava) v bodě $\mathbf{x}^0 \in E_n$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $S\delta(\mathbf{x}^0)$ takové, že pro všechna $\mathbf{x} \in S\delta(\mathbf{x}^0)$ platí $F(\mathbf{x}) < F(\mathbf{x}^0) + \varepsilon$.

Pro uvažované výrobní situace to znamená, že za určitých okolností může dojít ke skokům v růstu produkce (při přidání "nepatrně malého" množství některého z výrobních činitelů). Vlastnost koresponduje s připuštěním "kvalitativních změn v technologii" majících příčinu např. v technických inovacích (spíše půjde o změny na straně "kapitálu" či "technického pokroku" než v práci či surovinách).

(P6) $F(\mathbf{x})$ je kvazikonkávní funkce v celém definičním oboru. Formálně vyjádřeno platí nerovnost

$$F(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{z}) \geq \text{Min}[F(\mathbf{x}), F(\mathbf{z})]$$

pro libovolnou dvojici bodů \mathbf{x} , \mathbf{z} z definičního oboru produkční funkce a libovolné λ z intervalu $(0,1)$. Vlastnost je přímým důsledkem konvexnosti produkčních množin vstupů a garantuje udržení produkce $F(\mathbf{x})$ při přechodu mezi dvěma faktorovými kombinacemi aspoň v té výši, která odpovídá méně produktivní faktorové kombinaci.

Konečně poslední vlastností, která se váže nikoliv k produkční funkci, nýbrž k účinné podmnožině, je Shephardem formulovaný, tzv. "asymetrický" axiom:

(P7*) Účinná podmnožina $E(y^0)$ produkční množiny vstupů $L(y^0)$ je ohraničená pro jakoukoliv hodnotu produkce y^0 .

Znamená to, že množiny $E(y)$ jako účinné části izokvant $[E(y^0) \subset Q(y^0)]$ jsou ohraničené křivky.

Uvedený axiom se nazývá asymetrický mj. proto, že jeho platnost není vyžadována pro analogicky k $L(y^0)$ zkonstruované produkční množiny výstupů $P(x^0)$.

Většina funkčních tvarů užívaných k popisu produkčních vztahů jako analytické vyjádření produkční funkce, však tento asymetrický axiom nespĺňuje.

Poznámka 2

V obecném schématu *produkčních korespondencí*/produkčních relací se pracuje s n výrobními faktory a m výrobky.

Produkční množina vstupů $L(y^0)$ obsahuje všechny možné vstupy (kombinace výrobních faktorů x), s nimiž je dosažitelný výstup (hodnota produkce) y^0 .

$$L(y^0) = \{x; (x, y^0) \in Z(x, y)\}^1$$

Vlastnosti produkční množiny vstupů $L(y^0)$

(L7) $0 \notin L(y)$ pro žádné $y > 0$.

S nulovou kombinací výrobních faktorů nelze dosáhnout kladnou velikost produkce.

(L2) $L(y^0)$ je uzavřená, ohraničená množina.

Izokvanta je vždy součástí produkční množiny vstupů

(L3) $L(y^0)$ je konvexní množina.

Úsečka spojující dvě faktorové kombinace je součástí produkční množiny vstupů.

(L4) Jestliže $\lim y^t = +\infty$, pak $\bigcap_{t=1}^{\infty} L(y^t) = O$

Průnik produkčních množin vstupů je prázdná množina Neexistuje žádná konečná kombinace výrobních faktorů poskytujících nekonečně velkou hodnotu produkce.

(L5) Pro $y^2 \geq y^1 \geq 0$ platí $L(y^2) \subseteq L(y^1)$ vnořování

Dosáhneme-li s určitou kombinací výrobních faktorů určité úrovně produkce, dosáhneme s ní vždy i jakoukoli nižší hodnotu produkce.

(L6) Jestliže $x \in L(y)$ a $x^* \geq x$, pak platí $x^* \in L(y)$

(L7) Jestliže (a) $x > 0$ nebo (b) $x \geq 0$ a $\bar{\lambda} \cdot x \in L(\bar{y})$ pro nějaké $\bar{\lambda} > 0$, pak paprsek

$\{\lambda \cdot x; \lambda \geq 0\}$ protíná množiny $L(y)$ pro všechna $y \in (0, +\infty)$.

¹ Zápísem $Z(x, y)$ rozumíme množinu výrobních možností, tj. množinu dvojic (vektorů) x, y , kde výstupy x jsou dosažitelné s vstupy y .

Produkční množina výstupů $P(\mathbf{x}^0)$ obsahuje všechny možné výstupy (kombinace výrobků \mathbf{y}), které jsou dosažitelné (vyrobitelné) pomocí vektoru výrobních faktorů \mathbf{x}^0 .

$$P(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{y}; (\mathbf{x}^0, \mathbf{y}) \in Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$$

Vybrané vlastnosti produkční množiny výstupů $P(\mathbf{x}^0)$

(L1) $P(\mathbf{x}^0)$ je uzavřená množina.

Izokvanta je vždy součástí produkční množiny výstupů.

(L2) $P(\mathbf{x}^0)$ je konvexní množina.

Úsečka spojující dvě faktorové kombinace je součástí produkční množiny výstupů.

(L3) Jestliže $\lim \mathbf{x}^t = +\infty$, potom $\bigcup_{t=1}^{\infty} P(\mathbf{x}^t) = E_n^+$. Sjednocením všech produkčních množin vstupů je celý nezáporný orthant. Zvětšujeme-li bez omezení množství všech výrobních faktorů, není velikost produkce shora limitována žádnou hranicí.

(L4) Pro $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{x}^1$ platí $P(\mathbf{x}^1) \subseteq P(\mathbf{x}^2)$ vnořování

Dosáhneme-li s určitou kombinací výrobních faktorů určité úrovně produkce, dosáhneme s většími hodnotami faktorů vždy aspoň stejnou hodnotu produkce.

(L5) $0 \in P(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Triviální konstatování, že nulová produkce je součástí produkční množiny výstupů: K výrobě „ničeho“ mohou být uplatněny výrobní faktory v jakýchkoliv množstvích (i nulových)..