- Množina, konstanta, proměnná
- Výrokový počet
- Zavádění pojmů v matematice, matematické věty
- Množinové operace
- Čísla

1. Připomenutí základních znalostí z matematiky

Cíl kapitoly

- Zopakovat si pojem množiny, konstanty a proměnné.
- Zopakovat si základy výrokového počtu s cílem seznámit se s pojmy axiom, definice a věta.
- Zopakovat si množinové operace $\cup$, $\cap$, $-$, komplement. Zopakovat si pojem kartézského součinu množin.
- Zopakovat si rozdělení čísel a pravidel pro počítání s nimi.
- Zopakovat si pojem absolutní hodnoty reálného i komplexního čísla.
- Zopakovat si pravidla pro práci s nerovnicemi reálných čísel.
- Seznámit se s problematikou aproximace čísel, s relativní a s absolutní chybou. Uvědomit si vliv zaokrouhlování čísel při výpočtech na počítači.
- Zopakovat pojem maxima a minima číselné množiny a zavedení pojmu suprema a infima číselné množiny.

Časová zátěž

Silně závisí na znalostech s nimiž přicházíte na školu. Při průměrných znalostech do 10 hodin.

Úvod. Tato kapitola je věnována opakování některých témat středoškolského studia. Kapitola je rozdělena do 6 podkapitol. Výrokový počet se opakuje s cílem abyste dovedli rozeznat definici od matematické věty. V každé matematické větě musíte umět rozlišit mezi předpoklady věty a tvrzením. Čas potřebný k prostudování této kapitoly závisí na znalostech, s kterými přicházíte na vysokou školu. Kdo má větší mezery, ať si příslušná témata zopakuje ze svých středoškolských učebnic.

1.1 Množina, konstanta, proměnná

V matematice se pracuje s různými objekty. Těmto objektům se vedle názvu přiřazuje také symbol.

Zavedení pojmu množina

Množina. Jedním ze základních objektů, s nimiž se v matematice pracuje, je *množina*.

Množinou rozumíme soubor nějakých přesně vymezených objektů, kterým říkáme *prvky*, nebo *elementy* množiny. Při tom o každém objektu se musí dát rozhodnout, zda patří nebo nepatří do tohoto souboru. Mezi množiny počítáme i soubor, který neobsahuje žádný prvek – této množině budeme říkat *prázdná množina* a budeme ji značit $\emptyset$. Jako příklad množiny je možno uvést množinu přirozených čísel. Do této množiny patří např. číslo 2. Nepatří do ní např. komplexní číslo i.

Všimněme si, že zde pojem množina nebyl plně vymezen. K jeho vysvětlení jsme použili příbuzný pojem soubor. O zavádění pojmů v matematice pojednáme podrobněji později.

Označíme-li uvažovanou množinu např. A, potom okolnost, že objekt x patří do množiny A, budeme značit $x \in A$ a okolnost, že objekt y nepatří do množiny A, budeme značit $y \notin A$.

Množiny můžeme zadávat různým způsobem. Je-li konečná, to jest má-li konečný počet prvků, lze ji zadat výčtem. Tak například, jestliže množina A obsahuje prvky a, b, c a žádné jiné, bývá zvykem ji zapisovat takto

$$A = \{a,\ b,\ c\}.$$

Žádné dva prvky množiny se sobě nerovnají.

Příklad 1.1. Nechť M je množina písmen obsažených ve slově *PRAHA*. Zřejmě

$$M = \{P,\ R,\ A,\ H\}.$$

Potom např. $R \in M,\ u \notin M$.

Zavedení pojmu podmnožina

Podmnožina. Nechť $M,\ N$ jsou dané množiny. Jestliže každý prvek množiny M je i prvkem množiny N, potom říkáme, že množina M je podmnožinou množiny N, nebo že množina N je nadmnožinou množiny M. Píšeme pak $M \subseteq N$, resp. $N \supseteq M$. Jestliže zároveň platí $M \subseteq N$ a $M \supseteq N$, potom říkáme, že množiny M, N se sobě rovnají a píšeme $M = N$. Jestliže $M \subseteq N$ a jestliže množina N obsahuje prvky, které do množiny M nepatří, říkáme, že množina M je vlastní podmnožinou množiny N a píšeme $M \subset N$, resp. N je vlastní nadmnožinou M a píšeme $N \supset M$. Je-li tedy $M \subset N$, je též $M \subseteq N$, avšak je-li $M \subseteq N$ nemusí být $M \subset N$.

Příklad 1.2. Nechť $M = \{1,\ 4,\ 3,\ 9\}$. Potom $\{1,\ 3\} \subset M$, avšak $\{3,\ 7\}$ není podmnožinou množiny M, neboť prvek 7 není prvkem M.

Všimněmě si dvou významově i formálně odlišných zápisů. Uveďme příklad. Nechť $M = \{1,\ 4,\ 3,\ 9\}$. Potom zápis $8 \in M$ znamená, že 8 je prvkem množiny M, a zápis $\{8\} \subset M$ znamená, že množina, obsahující jediný prvek 8, je vlastní podmnožinou množiny M.

Zavedení pojmu konstanta, proměnná

Konstanta, proměnná. Řekli jsme si, že objekty označujeme symboly. To jednak zjednodušuje vyjadřování, jednak umožňuje stručný zápis některých výpovědí o objektech množiny.

Jestliže symbol označuje jeden konkrétní prvek množiny, nazýváme jej konstantou. Příkladem je např. symbol π, kterým označujeme konkrétní reálné číslo – Ludolfovo číslo.

Označuje-li symbol kterýkoliv prvek z dané množiny, nazýváme jej proměnnou. Množinu konstant, kterých může tato proměnná nabývat, nazýváme *oborem proměnné.* Jestliže tedy označíme symbolem x proměnnou s oborem M, potom vše, co se řekne o x, vztahuje se na každý prvek množiny, která je jejím oborem.

Uveďme si tento příklad. Označme M množinu všech kladných reálných čísel menších než 8. Mohu vyslovit tvrzení: „Jestli $x \in M$, potom $x^2 < 64$“.

Kontrolní otázky

1. Co je to množina?

2. Napište množinu A, jejíž prvky jsou písmena obsažená ve slově „matematika“. a) Pro každé z písmen „a, b, c, i, j“ zapište, zda patří nebo nepatří do množiny A. b) Napište podmnožinu B množiny A, obsahující všechny samohlásky množiny A. c) Co znamenají zápisy $B \subset A$, $B \subseteq A$. [a) $A = \{m, a, t, e, i, k\}$, $a \in A$, $b \notin A$, $c \notin A$, $i \in A$, $j \notin A$; b) $B = \{a, e, i\}$; c) B je vlastní podmnožinou množiny A; B je podmnožinou množiny A.]

3. Vysvětlete rozdíl mezi konstantou a proměnnou. Uveďte příklady.

4. Co je to obor proměnné?

1.2 Výrokový počet

Zavedení pojmu výrok

Výrokem rozumíme každou výpověď, o níž má smysl říci, že je pravdivá nebo nepravdivá. Při tom není rozhodující, zda dovedeme o pravdivosti rozhodnout nebo ne. Uveďme si několik příkladů.

- „Číslo 4 je sudé.“ [Pravdivý výrok.]
- „Číslo π (Ludolfovo číslo) je iracionální.“ [Pravdivý výrok.]
- „Číslo 6 je liché.“ [Nepravdivý výrok.]
- „Každá přímka má s kruhovým čtvercem právě jeden společný bod.“ [Není výrok, kruhový čtverec není zavedený pojem.]

Abstrahujeme-li od obsahu jednotlivých výroků, zavádíme místo jednotlivých výroků symboly, např. p, q, ... Jsou to výrokové proměnné, krátce *výroky*. *Pravdivému výroku přiřazujeme číslo 1, nepravdivému výroku přiřazujeme číslo 0. Je-li tedy p výrok pravdivý a q výrok nepravdivý, píšeme $p \equiv 1$, $q \equiv 0$.*

Složené výroky. Z daných výroků můžeme vytvářet nové výroky *negací a spojováním.* K vytváření složených výroků se používají tzv. *logické spojky.* Logickým spojkám se přiřazují dále uvedené symboly.

Zavedení pojmu negace výroku

Negace výroku. Nechť p je výrok. Označme $\neg p$ výrok, který je pravdivý tehdy, jestliže výrok p je nepravdivý, a je nepravdivý tehdy, jestliže p je pravdivý. Pro zápis negace výroku užíváme symbol $\neg$. Výrok $\neg p$ čteme „není pravda, že (platí) p“, nebo analogicky.

Příklad 1.3.

- Výrok p ... „Číslo 3 je sudé.“ [Nepravdivý výrok]
- Výrok $\neg p$ ... „Číslo 3 není sudé.“ [Pravdivý výrok]
- Tedy $p \equiv 0$, $\neg p \equiv 1$.

Zavedení pojmu konjukce výroků

Konjukce výroků. Nechť p, q jsou výroky. Označme $p \wedge q$ složený výrok, který je pravdivý tehdy, jsou-li oba výroky pravdivé, a nepravdivý, je-li alespoň jeden z nich nepravdivý. Složený výrok $p \wedge q$ čteme „p a q“. Závislost pravdivosti výroku $p \wedge q$ na pravdivosti výroků p, q je uvedena v tabulce 1.1.

Jako příklad uveďme

- Výrok p ... „Číslo 4 je sudé.“ [Pravdivý výrok]
- Výrok q ... „Číslo 4 je menší než 10.“ [Pravdivý výrok]
- Výrok $p \wedge q$ ... „Číslo 4 je sudé a je menší než 10.“ [Pravdivý výrok]

Zavedení pojmu disjunkce výroků

Disjunkce výroků. Nechť p, q jsou výroky. Označme $p \vee q$ složený výrok, který je pravdivý, je-li alespoň jeden z výroků p, q pravdivý, a je nepravdivý, jsou-li oba výroky p, q nepravdivé. Výrok $p \vee q$ čteme „p nebo q“. *Slovo „nebo“, které zde používáme, nemá vylučovací význam; místo něho bychom mohli říci „nebo též“.* Pro disjunkci výroků používáme spojku $\vee$. Závislost pravdivosti výroku $p \vee q$ na pravdivosti výroků p, q je dána v tabulce 1.1.

Příklad 1.4. Jako příklad uveďme

- Výrok p ... „Grafem funkce $y = x + 2$ je přímka.“ [Pravdivý výrok]
- Výrok q ... „Grafem funkce $y = x + 2$ je parabola.“ [Nepravdivý výrok]
- Výrok $p \vee q$ ... „Grafem funkce $y = x + 2$ je přímka nebo jejím grafem je parabola.“ [Pravdivý výrok]

Zavedení pojmu implikace

Implikace. Nechť p, q jsou výroky. Složený výrok $p \Rightarrow q$ je výrok, který je nepravdivý tehdy, jestliže je výrok p pravdivý a výrok q je nepravdivý, jinak je pravdivý. Výrok $p \Rightarrow q$ čteme „z p vyplývá q“, nebo „p implikuje q“, nebo „jestliže p, potom q“ a podobně. Pro implikace používáme symbol $\Rightarrow$. Pravdivost výroku $p \Rightarrow q$ v závislosti na pravdivosti výroků p, q je uvedena v tabulce 1.1.

Příklad 1.5.

- Výrok p ... „Přímka $y = 0$ je tečnou ke kružnici $x^2 + (y-1)^2 = 1$“ [Pravdivý výrok]
- Výrok q ... „Přímka $y = 0$ má s kružnicí $x^2 + (y-1)^2 = 1$ společný právě jeden bod.“ [Pravdivý výrok]
- Výrok ... „Jestliže přímka $y = 0$ je tečnou ke kružnici $x^2 + (y-1)^2 = 1$, potom má s ní společný právě jeden bod.“ [Pravdivý výrok]

Zavedení pojmu ekvivalence

Ekvivalence. Nechť p, q jsou výroky. Potom složený výrok $p \Leftrightarrow q$ je pravdivým výrokem právě tehdy, jsou-li současně oba výroky $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ pravdivé. Složený výrok $p \Leftrightarrow q$ čteme „p platí, když a jenom když platí q“, nebo čteme „p (platí) tehdy a jenom tehdy, když (platí) q“, nebo „p je ekvivalentní s q“ a podobně. Pro ekvivalenci užíváme symbol $\Leftrightarrow$. Pravdivost výroku $p \Leftrightarrow q$ v závislosti na pravdivosti výroků p, q je uvedena v tabulce 1.1.

Příklad 1.6.

- Výrok p ... „Přímka $y = 0$ je tečnou ke kružnici $x^2 + (y-1)^2 = 1$.“ [Pravdivý výrok]
- Výrok q ... „Přímka $y = 0$ má s kružnicí $x^2 + (y-1)^2 = 1$ společný právě jeden bod.“ [Pravdivý výrok]
- Výrok $p \Leftrightarrow q$ ... „Přímka $y = 0$ má s kružnicí $x^2 + (y-1)^2 = 1$ společný právě jeden bod, když a jenom když přímka $y = 0$ je tečnou kružnice $x^2 + (y-1)^2 = 1$.“ [Pravdivý výrok]

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabulka 1.1: Základní výroky

Výroky, vytvořené z konečného počtu výrokových proměnných, logických spojek a případně závorek, se nazývají *výrokové formule*. Příkladem je (1.1), resp. (1.2). Rozhodněme o jejich pravdivosti.

Příklad 1.7. Nechť p, q jsou dva výroky. Dokažme, že platí

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q. \tag{1.1}$$

Abychom dokázali toto tvrzení, utvořme následující tabulku 1.2.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg\, q$	$p \wedge \neg\, q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0

Tabulka 1.2: Důkaz vztahu (1.1)

Z tabulky je patrno, že výroky $\neg(p \Rightarrow q)$, $p \wedge \neg\, q$ jsou současně pravdivé nebo nepravdivé pro všechny možné kombinace pravdivosti výroků p, q. Platí tedy

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg\, q.$$

Příklad 1.8. Nechť p, q jsou výroky. Potom platí

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p). \tag{1.2}$$

Abychom tuto ekvivalenci dokázali, utvořme následující tabulku 1.3.

p	q	$\neg p$	$\neg\, q$	$p \Rightarrow q$	$\neg\, q \Rightarrow \neg p$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Tabulka 1.3: Důkaz vztahu (1.2)

Z této tabulky je patrno, že výroky $p \Rightarrow q$ a $\neg\, q \Rightarrow \neg p$ jsou současně pravdivé, resp. nepravdivé pro všechny možné kombinace pravdivosti a nepravdivosti výroků p, q. Je tedy výrok (1.2) pravdivým výrokem.

Výrokové formy. Sdělení, které obsahuje jednu nebo více proměnných, se nazývá *výrokovou formou*, jestliže z ní dostaneme výrok

– dosazením přípustných konstant z oboru proměnných za tyto proměnné
– kvantifikací, to jest doplněním o údaj o počtu, resp. o odhad počtu konstant, jejichž dosazením za proměnné vznikne výrok.

Zavední pojmu výroková forma

Z výrokových forem vytvářet složené výrokové formy.

Příklad 1.9. Sdělení „reálné číslo $x > 2$“ není výrokem. Nelze rozhodnout, zda je pravdou nebo není pravdou že $x > 2$. Řekneme-li, že x je proměnná s oborem hodnot reálných čísel $\mathbb{R}$, a dosadíme-li za x konstantu, to jest jakékoliv reálné číslo, dostáváme výrok. Např. pro číslo 3 dostáváme $3 > 2$, což je pravdivý výrok. Zde se sdělení stává výrokem dosazením libovolné konstanty (tj. reálného čísla) za proměnnou x z jejího oboru. Je tedy „reálné číslo $x > 2$“ výrokovou formou.

Výrokovou formu závislou na proměnné x lze zapsat obecně např. jako $V(x)$. Podobně pro více proměnných.

Kvantifikátory. Nechť výroková forma $V(x)$ závisí na proměnné x a nechť množina M je jejím oborem. Okolnost, že výroková forma $V(x)$ je pravdivá pro všechna $x \in M$, zapíšeme takto

Zavedení pojmu kvantifikátor

$$\forall x \in M : V(x) \tag{1.3}$$

a čteme *pro všechna $x \in M$ platí V(x).*

Výrokovou formu jsme v (1.3) doplnili údajem o počtu konstant (pro všechny konstanty z oboru proměnné x), pro něž je $V(x)$ pravdivým výrokem. Je tedy (1.3) výrokem.

Označení. Symbol „$\forall$ “ nazýváme *obecným kvantifikátorem.*

Příklad 1.10. Nechť $M = \{2, 3, 4, 8\}$, x je proměnná s oborem M. Označme $V(x)$ výrokovou formu „$x \geq 2$“. Potom

$$\forall x \in M : x \geq 2$$

je pravdivý výrok.

Podobně

$$\forall x \in M : x < 4$$

je nepravdivý výrok, neboť pro $x = 8$ je výrok $x < 4$ nepravdivý.

Kvantifikací jsme dostali v obou případech z $V(x)$ výrok.

Označení. Nechť výroková forma $V(x)$ závisí na proměnné x a nechť množina M je jejím oborem. Okolnost, že výroková forma $V(x)$ je pravdivá alespoň pro jednu konstantu $x \in M$, zapíšeme takto

$$\exists x \in M : V(x) \tag{1.4}$$

a čteme „existuje $x \in M$, pro něž platí $V(x)$“.

Označení. Symbol „∃“ se nazývá *existenčním kvantifikátorem.*

Negace výroků (1.3), (1.4). Negací výroků (1.3), (1.4) dostáváme tyto ekvivalentní výroky:

$$\neg(\forall\, x \in M : V(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in M : \neg V(x), \tag{1.5}$$

$$\neg(\exists\, x \in M : V(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in M : \neg V(x). \tag{1.6}$$

Příklad 1.11. Nechť $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. Potom

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : \, x^2 = -1 \tag{1.7}$$

je výrok. Čteme jej: „Existuje alespoň jedno reálné číslo x, pro které platí $x^2 = -1$“. Tento výrok je nepravdivý. Negací tohoto výroku podle vztahu (1.6) dostáváme

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \, \neg\,(x^2 = -1), \tag{1.8}$$

to jest

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \, x^2 \neq -1. \tag{1.9}$$

Zřejmě (1.9) je pravdivý výrok.

Kontrolní otázky

1. Co je to výrok a co je to výroková forma?

2. Přímka $2x + 3y = 1$ rozděluje rovinu (x, y) na dvě poloroviny. Vyznačte, který z následujících výroků je pravdivý a který je nepravdivý.

a) Body $[1, 3]$, $[5, -2]$ leží v téže polorovině.
b) Body $[0, 2]$, $[3, -5]$ leží v téže polorovině.

[a) pravdivý, b) nepravdivý]

3. Označme p, q tyto výroky
výrok p ... „číslo π je reálné“
výrok q ... „číslo 2 je přirozené číslo“.
Vyslovte výroky : a) $\neg\, p$, b) $\neg\, q$, c) $p \vee q$, d) $p \wedge q$ a uveďte jejich pravdivost.
[a) „Číslo π není reálné“ ($\equiv 0$), b) „Číslo 2 není přirozené“ ($\equiv 0$), c) „Číslo π je reálné nebo číslo 2 je přirozené“ ($\equiv 1$), d) „Číslo π je reálné a číslo 2 je přirozené“ ($\equiv 1$)]

4. Nechť n je proměnná s oborem přirozených čísel. Je výpověď „$n^2 > 4$“ výrokem? [Není, jde o výrokovou formu.]

5. Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel. Vyslovte následující výroky a uveďte jejich pravdivost.
a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \, n^2 > 1$
b) $\exists\, n \in \mathbb{N} : \, n^2 > 1$
[Výrok a) je nepravdivý – pro $n = 1$ neplatí $n^2 > 1$. Výrok b) je pravdivý – pro $n = 2$ platí $n^2 > 1$.]

6. Nechť p, q jsou výroky. Dokažte, že platí
a) $\neg\,(\neg\, p) \;\equiv\; p$

b) $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
c) $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
d) $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.
(Návod: vytvořte tabulku pravdivosti pro výroky na obou stranách.)

7. Nechť x je proměnná s oborem všech reálných čísel $\mathbb{R}$ a $V(x)$ je výroková forma „$x^2 = -1$“. Negujte výrok

$$\exists\, x \in \mathbb{R} : \; x^2 \neq -1.$$

[$\forall\, x \in \mathbb{R} : \; x^2 = -1$.]

1.3 Zavádění pojmů v matematice, matematické věty

Nejdříve si připomeňme, že množinu M nazýváme *lineárně uspořádanou*, jestliže je na ní zavedena relace „$\leq$“ (čti menší nebo rovno) s těmito vlastnostmi

- jestliže $x, y \in M$, potom je buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$,
- jestliže $x \in M$, potom $x \leq x$,
- jestliže $x \leq y$, $y \leq z$, potom $x \leq z$,
- jestliže $x \leq y$ a $y \leq x$, potom $x = y$.

Při budování jednotlivých matematických disciplin se vychází z *postulátů (axiomů)*. Jsou to výchozí matematické výroky, které obsahují základní pojmy, které se již dále nedefinují a považují se danou soustavou axiomů za zavedené. Každé tvrzení v dané disciplině je dáno soustavou axiomů. Tvrzení se odvozují logickými úvahami právě z těchto axiomů. Axiomy musí mít tyto vlastnosti:

- Musí být bezesporné. To znamená, že z nich nelze odvodit žádná tvrzení, která by nemohla současně platit.
- Musí být na sobě navzájem nezávislé, to znamená, že žádný axiom nelze odvodit z ostatních.
- Každé tvrzení v uvažované disciplině se musí dát odvodit z dané soustavy axiomů.

Pouze pro informaci si uveďme **soustavu axiomů pro zavedení přirozených čísel**.

axiomy pro zavedení přirozených čísel – rozšiřující informace

Buď $\mathbb{N}_0$ množina, která má tyto vlastnosti:
(i) Existuje prvek 0 tak, že $0 \in \mathbb{N}_0$.
(ii) Ke každému prvku $a \in \mathbb{N}_0$ existuje prvek $a^+ \in \mathbb{N}_0$, zvaný následník prvku a.
(iii) Pro každé a je $a^+ \neq 0$.
(iv) Je-li $a^+ = b^+$ je $a = b$.
(v) Je-li $M \subseteq \mathbb{N}_0$ a M je taková množina, že $0 \in M$ a že z podmínky $a \in M$ plyne $a^+ \in M$, pak $M = \mathbb{N}_0$.

Potom $\mathbb{N}_0$ nazýváme množinou přirozených čísel.

Pomocí operace následovníka definujeme číslo 1 rovnicí $1 = 0^+$. Sečítání a násobení přirozených čísel si zavedeme následovně.

Pro každé $a \in \mathbb{N}_0$ je $a + 0 = a$. Je-li definováno $a + b$ pro $a \in \mathbb{N}_0,\ b \in \mathbb{N}_0$, potom $a + b^+$ definujeme rovnicí $a + b^+ = (a + b)^+$.

Pro každé $a \in \mathbb{N}_0$ je $a \cdot 0 = 0$. Je-li definováno $a \cdot b$ pro $a \in \mathbb{N}_0,\ b \in \mathbb{N}_0$, pak $a \cdot b^+$ definujeme rovnicí $a \cdot b^+ = a \cdot b + a$.

Doplníme ještě definici *umocňování*. Buď $a \in \mathbb{N}_0, a \neq 0$. Definujme $a^0 = 1$. Je-li definováno a^b pro $b \in \mathbb{N}_0$, pak a^{b^+} definujeme rovnicí $a^{b^+} = a^b \cdot a$.

Lze ukázat, že těmito podmínkami jsou operace sčítání, násobení i umocňování definovány, a to jednoznačně.

Pro $a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}_0$ klademe $a \leq b$, když existuje $c \in \mathbb{N}_0$ tak, že $a + c = b$.

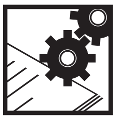
Všechny operace i relace $\leq$ mají známé vlastnosti.

Tímto způsobem zavedená množina přirozených čísel je množina čísel 0, 1, 2, 3, ... V tomto učebním textu ji budeme značit $\mathbb{N}_0$. Někdy se pod množinou přirozených čísel rozumí jen množina čísel 1, 2, ... V tomto učebním textu ji budeme značit $\mathbb{N}$.

Se zaváděním pojmů pomocí axiomů se v tomto materiálu nesetkáme. To by přesahovalo studijní cíle. Jste zvyklí pracovat s řadou základních pojmů jako s reálnými čísly, s bodem v prostoru, s přímkami atd., aniž byste měli tyto pojmy přesně zavedeny. My budeme rovněž používat nadále tyto základní pojmy, aniž bychom je přesně zaváděli. Přesné axiomatické zavádění pojmů by přesáhlo sledované cíle a časové možnosti ke studiu. Upouštíme proto od axiomatické výstavby. V tomto učebním textu, bude-li to účelné, si některé z těchto pojmů pouze osvětlíme, a to do té míry, abychom mohli s nimi pracovat. Každému pojmu, máme-li s ním pracovat, musíme dobře porozumět. Jiné pojmy si budeme zavádět definicemi.

Zavedení pojmu definice

Pojem „definice“. Definicí se uvádí jednak *název zaváděného pojmu*, jednak se zaváděný *pojem blíže specifikuje* pomocí již zavedených pojmů.



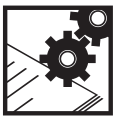
Příklad 1.12. Jako ukázku definice si zaveďme pojem *rovnostranný trojúhelník*.

Definice. Řekneme, že trojúhelník je rovnostranný, jestliže všechny jeho strany jsou stejně velké.

Zde je zaveden nový pojem – rovnostranný trojúhelník, a to pomocí dvou pojmů: trojúhelník a velikost stran. Aby toto byla definice, musí být oba tyto pojmy již dříve zavedeny.

Zavedení pojmu matematická věta

Pojem matematická věta. Stručně budeme říkat pouze věta. Matematická věta je *pravdivý výrok*, který se dá odvodit pomocí logiky užitím axiomů, definic a již dokázaných vět.



Příklad 1.13. Každý vnitřní úhel rovnostranného trojúhelníka je roven 60°.

Jde skutečně o větu. Je to pravdivý výrok, který lze dokázat[1]. Pojmy, které se zde vyskytují musely být již dříve zavedeny.

Bylo by možno definovat rovnosranný trojúhelník takto: „Trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou rovny 60°, se nazývá rovnostranným.“ Potom bychom mohli vyslovit větu : „Všechny strany rovnostranného trojúhelníka jsou stejně velké.“

[1] Je zde tichá domluva, že pracujeme v tak zvané euklidovské geometrii.

> *Tedy definicí se zavádí nový pojem, kdežto matematická věta vypovídá o vzájemných vztazích mezi již zavedenými pojmy.*

Ukázky typů vět

Ukažme si několik často se vyskytujících tvarů matematických vět. Začneme s větou ve tvaru, kterou označme jako věta $\mathcal{A}$.

Věta $\mathcal{A}$

Nechť $V(x)$ je výroková forma proměnné x s oborem D. Potom platí

$$\forall x \in D : V(x), \tag{1.10}$$

Slovy: „Pro všechna $x \in D$ platí $V(x)$“.

Příklad 1.14. Jako příklad uveďme větu

Věta. Pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ platí

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}. \tag{1.11}$$

Zapišme tuto větu ve tvaru (1.10), tedy jako větu $\mathcal{A}$.

Věta. (Přepis na tvar Věta $\mathcal{A}$).

Nechť

$$V(n) \equiv \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \tag{1.12}$$

je výroková forma proměnné n s oborem $\mathbb{N}$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n).$$

Abychom mohli tento výrok prohlásit za větu, je nutno ještě dokázat, že je pravdivým výrokem. K důkazu pravdivosti použijeme metodu, zvanou *matematická indukce*. Dříve než přikročíme k vlastnímu důkazu, popišme tuto metodu obecně.

Matematická indukce

Matematická indukce. Matematická indukce se používá na důkaz pravdivosti výroku tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n), \tag{1.13}$$

kde $V(n)$ je výroková forma a n je proměnná s oborem $\mathbb{N}$ přirozených čísel. Důkaz (1.13) lze rozdělit do tří kroků.

1. Dokážeme, že výrok $V(1)$ je pravdivý.

2. Předpokládáme, že výrok $V(n)$ je pravdivý pro nějaké k, tedy že výrok $V(k)$ je pravdivý.
3. Dokážeme, že potom výrok $V(n)$ je pravdivý pro $n = k+1$, tedy že $V(k+1)$ je pravdivý.

Potom $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Skutečně. $V(1)$ je pravdivý. Podle bodu **3** platí tedy i pro $n = 2$. Poněvadž platí $V(2)$, platí $V(n)$ podle bodu **3** i pro $n = 3$, atd.

Proveďme nyní důkaz tvrzení (1.11) užitím matematické indukce.
1. Dokažme, že výrok $V(1)$ je pravdivý. To je zřejmé, neboť

$$V(1) \quad \text{znamená} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}.$$

2. Předpokládejme , že $V(n)$ platí pro nějaké $n = k$, to jest, že pro nějaké k platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}. \tag{1.14}$$

3. Dokažme, že z pravdivosti (1.14) vyplývá pravdivost $V(k+1)$. To jest, že platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}. \tag{1.15}$$

Dokažme to. Levou stranu (1.15) lze užitím (1.14) přepsat takto

$$1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)},$$

což po úpravě dává pravou stranu (1.15), to jest

$$1 - \frac{1}{k+2}.$$

Platí tedy $V(k+1)$.

Odtud vyplývá platnost (1.11) pro všechna n. □

Zabývejme se nyní větami $\mathcal{A}$ (1.10) v nichž výroková forma $V(x)$ má speciální tvar

$$A(x) \Rightarrow B(x), \tag{1.16}$$

kde $A(x)$, $B(x)$ jsou výrokové formy proměnné x s oborem D. Budeme tedy uvažovat o větách, jejichž obecný tvar označíme jako Věta $\mathcal{B}$.

Věta $\mathcal{B}$

Nechť $A(x)$, $B(x)$ jsou výrokové formy proměnné x s oborem D. Potom platí

$$\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x). \tag{1.17}$$

V této větě se $A(x)$ nazývá **předpokladem věty** a $B(x)$ se nazývá **tvrzením věty**.

Věta vypovídá o tom, že platí-li $A(x)$ pro všechna $x \in D$, potom platí i $B(x)$ pro všechna $x \in D$.

$A(x) \Rightarrow B(x)$ čteme např. jedním z těchto způsobů :
„Jestliže $A(x)$, potom $B(x)$.“ „Když $A(x)$, potom $B(x)$.“ „Z $A(x)$ vyplývá $B(x)$.“ „$A(x)$ implikuje $B(x)$.“ „Nechť platí $A(x)$, potom platí $B(x)$ “.

Z (1.2) vyplývá, že ekvivalentem (1.17) je věta, kterou označíme jako Věta $\mathcal{C}$ a nazveme **obměnou věty $\mathcal{B}$.**

Věta $\mathcal{C}$ (Obměna Věty $\mathcal{B}$)

Nechť $A(x)$, $B(x)$ jsou výrokové formy proměnné x s oborem D. Potom platí

$$\forall x \in D : \neg B(x) \Rightarrow \neg A(x). \tag{1.18}$$

Struktura Věty C je stejná jako struktura Věty $\mathcal{B}$, avšak tyto věty mají odlišné výrokové formy.

K důkazu Věty $\mathcal{B}$ (1.17) a její obměny Věty $\mathcal{C}$ (1.18) popišme dvě metody – metodu *přímou* a metodu *nepřímou.*

a) **Přímá metoda důkazu Věty $\mathcal{B}$** (1.17). Vychází se z předpokladu pravdivosti výroku $A(x)$ pro každé $x \in D$ a použitím již dříve dokázaných vět, axiomů a zavedených pojmů se logickými úvahami dospěje k závěru, že $B(x)$ je pro tato x rovněž pravdivé. Přímá metoda důkazu

b) **Přímá metoda důkazu Věty $\mathcal{C}$** (1.18). Tuto větu tedy dokazujeme tak, že předpokládáme pravdivost výroku $\neg B(x)$ pro $\forall\, x \in D$ a použitím již dříve dokázaných vět, axiomů a zavedených pojmů dospějeme logickými úvahami k závěru, že i $\neg A(x)$ platí pro $\forall\, x \in D$.

α) **Nepřímá metoda důkazu (důkaz sporem) Věty $\mathcal{B}$** (1.17) vychází z předpokladu, že věta neplatí a užitím dříve dokázaných vět, axiomů a s použitím již zavedených pojmů dospějeme k rozporu. Tento rozpor však vznikl z nesprávného předpokladu, že věta neplatí. Věta tedy platí. Nepřímá metoda důkazu

Vyjádřeme předpoklad, že věta tvaru $\mathcal{B}$ neplatí. Negací (1.17) dostáváme

$$\exists x \in D : \neg (A(x) \Rightarrow B(x)). \tag{1.19}$$

Odtud dostáváme (viz (1.1))

$$\exists\, x \in D : A(x) \wedge \neg B(x). \tag{1.20}$$

Větu $\mathcal{B}$ tedy dokazujeme tak, že předpokládáme, že existuje $x \in D$ pro něž současně platí $A(x)$ a $\neg B(x)$. Jestliže užitím tohoto předpokladu, axiomů a již dokázaných vět dojdeme logickými úvahami ke sporu, znamená to, že předpoklad o nesprávnosti Věty $\mathcal{A}$ byl chybný, takže tato věta je správná.

β) **Nepřímá metoda důkazu (důkaz sporem) Věty** $\mathcal{C}$ (1.18) vychází z předpokladu, že věta neplatí a užitím dříve dokázaných vět, axiomů a s použitím již zavedených pojmů dospějeme k rozporu. Tento rozpor však vznikl z nesprávného předpokladu, že věta neplatí. Věta tedy platí.

Vyjádřeme předpoklad, že Věta $\mathcal{C}$ neplatí. Negací (1.18) dostáváme

$$\exists x \in D : \neg(\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)). \tag{1.21}$$

Odtud dostáváme

$$\exists\, x \in D : \neg B(x) \wedge A(x). \tag{1.22}$$

Nepřímý důkaz Věty $\mathcal{C}$ provedeme tedy tak, že předpokládáme, že existuje takové $x \in D$, pro něž současně platí $\neg B(x)$ a $A(x)$. Jestliže užitím tohoto předpokladu, axiomů a již dokázaných vět dojdeme logickými úvahami ke sporu, znamená to, že předpoklad o nesprávnosti Věty $\mathcal{B}$ byl chybný, takže Věta $\mathcal{B}$ je správná.

Příklad 1.15. Uveďme si důkazy následující věty.

Věta 1.1.

Jestliže kvadrát přirozeného čísla n je sudé číslo, je i číslo n sudé.

Jde o větu, kterou jsme označili jako Věta $\mathcal{B}$, v níž $D, A(x), B(x)$ mají následující význam :

- D ... $\mathbb{N}$
- $A(n)$ ... „n^2 je sudé číslo.“
- $B(n)$ ... „n je sudé číslo.“

Tuto větu lze tedy při zavedeném označení zapsat jako

Věta. (Přepis (1.1) do tvaru věty $\mathcal{B}$)

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow B(n). \tag{1.23}$$

Slovy vyjádřeno: „Pro každé přirozené číslo n platí: Jestliže n^2 je sudé číslo, potom i n je sudé číslo.“

Obměnou této věty při nahoře uvedeném významu $D, A(x), B(x)$ je věta

Obměna věty (1.1)

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \neg B(n) \Rightarrow \neg A(n). \tag{1.24}$$

Slovy vyjádřeno : „Pro každé přirození číslo n platí: Jestliže n není sudé číslo, potom ani n^2 není sudé číslo.“

Abychom ukázali, že se jedná skutečně o větu, je nutno dokázat, že (1.23), resp. (1.24) je pravdivý výrok. Dokažme to. Důkaz provedeme metodou přímou i metodou nepřímou.

Důkaz – metoda přímá.

Použijeme důkaz přímý na obměnu věty (1.24), to jest na větu: „Jestliže n není sudé číslo, potom ani n^2 není sudé číslo.“

Předpokládejme tedy, že n není sudé číslo, jinými slovy řečeno, že n je liché. Dokažme, že je-li n liché, je i n^2 liché. Liché číslo n se dá napsat ve tvaru

$$n = 2k - 1, \text{ kde } k \in \mathbb{N}.$$

Potom $n^2 = (2k-1)^2$. Úpravou dostáváme $n^2 = 4k^2 - 4k + 1$, což je číslo liché, tedy není sudé. Tedy věta platí.

Proveďme nyní důkaz uvedené věty nepřímou metodou (metodou sporu).

Důkaz – metoda nepřímá. Negací dokazované věty (1.23) dostáváme

$$\exists\, n \in \mathbb{N} :\ A(n) \wedge \neg B(n). \tag{1.25}$$

Tuto negaci lze slovně vyjádřit takto. *Existuje takové přirozené číslo n, že n^2 je sudé a zároveň n je liché.*

Věta bude dokázána, dokážeme-li, že výrok (1.25) je nepravdivý. Skutečně, předpokládejme, že takové číslo n existuje. Toto liché číslo n můžeme vyjádřit ve tvaru $n = 2k-1$, kde k je přirozené číslo. Jeho kvadrát je $n^2 = 4k^2-4k+1$, takže n^2 je liché číslo. To je spor s předpokladem, že n je liché a n^2 je sudé. Dospěli jsme tedy ke sporu. Ten vznikl nesprávným předpokladem (1.25), že dokazovaná věta neplatí. Tedy věta platí.

Zabývejme se nyní Větami $\mathcal{A}$ (1.10), v nichž výroková forma $V(x)$ má speciální tvar

$$A(x) \Leftrightarrow B(x), \tag{1.26}$$

kde $A(x)$, $B(x)$ jsou výrokové formy proměnné x s oborem D. Budeme tedy uvažovat o větách, které označíme jako věty tvaru $\mathcal{D}$. Jde tedy o větu

Věta $\mathcal{D}$

Nechť $A(x)$, $B(x)$ jsou výrokové formy proměnné x s oborem D. Potom platí

$$\forall x \in D : A(x) \Leftrightarrow B(x). \tag{1.27}$$

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$ můžeme číst např. jedním z těchto způsobů:
Pro všechna $x \in D : A(x)$ platí, když a jenom když platí $B(x)$.
Pro všechna $x \in D : A(x)$ platí tehdy a jenom tehdy, když platí $B(x)$.
Pro všechna $x \in D : A(x)$ platí právě tehdy, když platí $B(x)$.

Věta tohoto typu je vlastně složení dvou vět a to:
a) věty $\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$.
V této větě je $A(x)$ předpokladem a $B(x)$ je tvrzením.
b) a věty $\forall x \in D : B(x) \Rightarrow A(x)$.
V této větě je $B(x)$ předpokladem a $A(x)$ je tvrzením. O větách tohoto tvaru jsme již pojednali.

Jako příklad uveďme následující známou větu.

Věta. Kvadratická rovnice má dvojnásobný kořen právě tehdy, jestliže její diskriminant je roven 0.

Tuto větu zapišme ve výše zavedené symbolice.

Budeme uvažovat kvadratickou rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou čísla, $a \neq 0$. Připomeňme, že diskriminantem této rovnice je číslo $\Delta = b^2 - 4ac$.

Označme
D … množina uspořádanách trojic čísel $(a,\ b,\ c)$, $a \neq 0$
$A(a, b, c)$ … výroková forma „rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má dvojnásobný kořen“
$B(a,\ b,\ c)$ … výroková forma „$b^2 - 4ac = 0$“

Potom uvedenou větu lze zapsat takto

Veta.

$$\forall (a,\ b,\ c) \in D : A(a, b, c) \Leftrightarrow\ B(a, b, c).$$

Jako další typ vět si uveďme věty, které označíme jako Věty $\mathcal{E}$ následujícího tvaru

Věta $\mathcal{E}$

$$\exists\, x \in D : A(x), \tag{1.28}$$

kde $A(x)$ je výroková forma s proměnnou x s oborem D.

Tuto větu můžeme číst takto: „existuje $x \in D$, pro něž platí $A(x)$.“

Příklad 1.16.

Věta. Existuje prvočíslo větší než 15.

Napišme tuto větu ve tvaru (1.28). Platí

Věta. Nechť D je množinu všech přirozených čísel $>$ 15 a $V(n)$ je výrokovou formu „n je prvočíslo“. Potom platí

$$\exists\, n \in D : V(n).$$

Tato věta je pravdivá. Hledaným číslem je např. $n = 17$.

Jiným příkladem je věta

Příklad 1.17.

Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_n,\ a_{n-1}, \ldots, a_0$ jsou komplexní čísla, $a_n \neq 0$. Potom rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots, a_1 x + a_0 = 0$$

má v oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.

Přepišme tuto rovnici do tvaru (1.28). Dostáváme

Věta. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_n,\ a_{n-1}, \ldots, a_0$ jsou komplexní čísla, $a_n \neq 0$. Potom

$$\exists x \in \mathbb{C} : a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots, a_1 x + a_0 = 0.$$

> *Věty tvaru $\mathcal{E}$ se nazývají v literatuře jako věty* existenční. *Jejich důkaz bývá většinou obtížný. Věta (1.28) nevypovídá nic o tom, jak se nalezne toto x . Pouze říká, že existuje takové x, pro něž je $A(x)$ pravdivým výrokem.*

Kontrolní otázky

1. Vysvětlete pojmy : axiom, definice, matematická věta.

2. Uveďte typy vět, které znáte, a vysvětlete je na příkladě.

3. Definujte sudé a liché přirozené číslo.
[Přirozené číslo n nazveme sudým (lichým), jestliže existuje takové přirozené číslo k, že $n = 2k$ $(n = 2k - 1)$].

4. Vyslovte formou věty vztah mezi dvěma výpověďmi:
a) „Trojúhelník $\triangle(ABC)$ je pravoúhlý.“

b) „Je-li v trojúhelníku $\triangle(ABC)$ délka strany AB největší, potom $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.“

1.4 Množinové operace

V části 1.1 jsme si zavedli pojem množina. Ukázali jsme si zápis množiny s konečným počtem prvků – definovali jsme množinu výčtem. Nyní si ukažme definování podmnožiny K množiny M pomocí výrokové formy.

Způsob zavedení množiny

Nechť $V(x)$ je výroková forma proměnné x s oborem M. Potom zápisem

$$K = \{x \in M : V(x)\} \tag{1.29}$$

definujeme množinu K jako množinu všech těch prvků $x \in M$, pro něž je výrok $V(x)$ pravdivý.

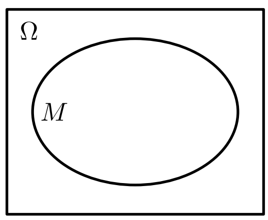
Příklad 1.18. Nechť M je je množina přirozených čísel větších než 2 a menších než 40. Označme $V(x)$ výrokovou formu: „x je dělitelné 5“, kde x je proměnná s oborem hodnot M. Potom

$$K = \{x \in M : V(x)\}$$

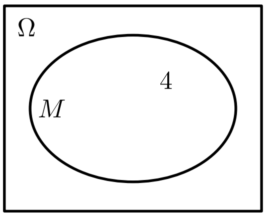
je množina všech přirozených čísel z intervalu $\langle 3, 39\rangle$, která jsou dělitelná 5, to jest $K = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$.

Pracuje-li se jen s prvky množiny Ω a s jejími podmnožinami, nazveme Ω základním prostorem. K usnadnění výkladu bývá zvykem používat grafického znázornění množin. Základní prostor budeme označovat obdélníkem. Podmnožiny množiny Ω budeme znázorňovat rovinnými obrazci, např. kruhy, ovály, obdélníky ležícími v obdélníku Ω, znázorňujícího základní prostor. Rovinným obrazcem můžeme znázornit i množinu, která obsahuje jenom konečný počet prvků. Každý bod obrazce nemusí být prvkem množiny, kterou rovinný obrazec reprezentuje. Elementy množiny můžeme v případě potřeby znázornit nějakým symbolem, např. symbolem „+“. Do obrazce, znázorňujícího nějakou množinu můžeme zapsat i nějaké údaje, např. číslo, udávající počet prvků množiny. Pro zjednodušení můžeme vynechat základní prostor, pokud není nebezpečí omylu.

Příklad 1.19. Uvažujme základní prostor Ω a jeho podmnožinu $M = \{a, b, c, d\}$. Na obr.1.1 je znázorněn základní prostor Ω a množina M bez údajů.



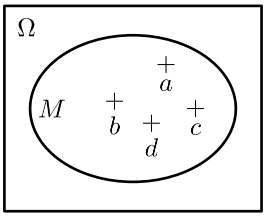
Obrázek 1.1: Znázornění množiny M



Obrázek 1.2: Znázornění množiny M s počtem jejích prvků

Na obr.1.2 je znázorněn základní prostor Ω a množina M s údajem, že tato množina obsahuje 4 prvky.

Na obr.1.3 je znázorněn základní prostor Ω a množina M s vyznačením jejích čtyř prvků a, b, c, d.



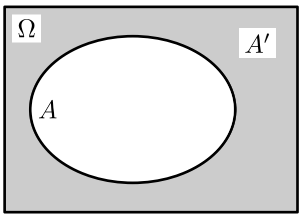
Obrázek 1.3: Znázornění množiny M a jejích prvků

Komplement množiny. Nechť Ω je základní prostor a $A \subseteq \Omega$. Potom množinu

$$A' = \{x \in \Omega : x \notin A\}$$

nazýváme komplementem množiny A. Je to množina těch prvků základního prostoru, které nepatří do množiny A. Na obrázku obr.1.4 je vyznačena jak množina A, tak i množina A'. Množina A' je šedá.

Zavedení pojmu komplement množiny



Obrázek 1.4: Znázornění komplementu množiny A

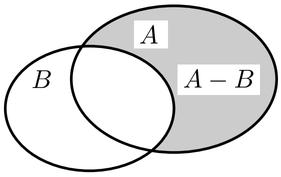
Příklad 1.20. Nechť základním prostorem je množina přirozených čísel a nechť A je její podmnožina – množina sudých čísel. Potom komplementem množiny A je množina A' lichých čísel.

Rozdíl dvou množin Nechť A, B jsou dané množiny. Potom množina

$$C = \{x \in A : x \notin B\}$$

se nazývá rozdílem množin A, B a píšeme $A - B$. Slovně vyjádřeno : Množina $A - B$ je množina těch prvků z množiny A, které nepatří do množiny B. Na obr.1.5 je znázorněn rozdíl $A - B$. Tato množina je šedá.

Zavedení pojmu rodíl množin



Obrázek 1.5: Znázornění množiny $A - B$

Zavedení pojmu sjednocení množin

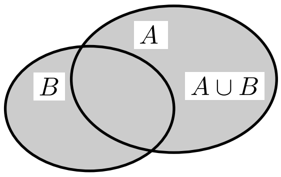
Sjednocení dvou množin Nechť A, B jsou dvě množiny. Potom množinu C těch prvků, které patří do množiny A nebo do množiny B, nazýváme sjednocením množin A, B. Je tedy

$$C = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Píšeme pak

$$C = A \cup B.$$

Na obr.1.6 je množina $A \cup B$ šedá.



Obrázek 1.6: Znázornění sjednocení $A \cup B$

Zavedení pojmu průnik dvou množin

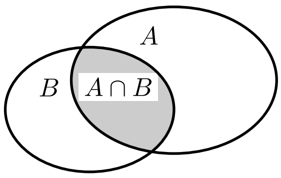
Průnik dvou množin Nechť A, B jsou dvě množiny. Potom množinu C těch prvků, které patří jak do množiny A, tak i do množiny B, nazýváme průnikem množin A, B. Je tedy

$$C = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Píšeme pak

$$C = A \cap B.$$

Na obr.1.7 je množina $A \cap B$ šedá.



Obrázek 1.7: Znázornění průniku $A \cap B$

Příklad 1.21. Nechť $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, e, f, g\}$. Potom

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}, \quad A \cap B = \{a, c\}.$$

Kartézský součin dvou množin Nechť A, B jsou dvě množiny. Kartézským součinem $A \times B$ (v tomto pořadí) rozumíme množinu C vytvořenou všemi uspořádanými dvojicemi $[x, y]$, kde $x \in A \wedge y \in B$. Tedy

Zavedení pojmu kartézský součin

$$A \times B = \{[x, y] : x \in A \wedge y \in B\}. \tag{1.30}$$

Označení. Nechť A je množina. Potom $A^2 = A \times A$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x, y \in A$.

Kartézský součin dvou množin lze zobecnit na kartézský součin n množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zapisujeme jej jako

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \tag{1.31}$$

a definujeme jej jako množinu všech uspořádaných skupin n prvků

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n], \text{ kde } a_i \in A_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Označení. Nechť A je množina. Potom

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n} \tag{1.32}$$

označíme množinu všech uspořádaných skupin o n prvcích z množiny A.

Kontrolní otázky

1. Nechť $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel a A je interval $\langle 1, 2\rangle$.

a) Vyjádřete množinu $A = \mathbb{R} - \langle 1, 2\rangle$ jako sjednocení dvou intervalů a graficky ji znázorněte na číselné ose.

b) Nechť $\mathbb{R}$ je základní prostor, určete A'.

c) Nechť $\mathbb{R}$ je základní prostor, určete $\mathbb{R}'$.

2. Nechť $A = \{a, b, c\}, B = \{a, e\}$. Určete následující množiny a graficky je znázorněte.
a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A - B$.

[a) $\{a, b, c, e\}$, b) $\{a\}$, c) $\{b, c\}$].

3. Nechť $\mathbb{R}$ je množina všech reálných čísel a A je interval $\langle 1, 2\rangle$. V kartézské souřadnicové soustavě vyznačte množinu
a) $A \times A$, b) $\mathbb{R}^2 - A \times A$.

1.5 Čísla

Každý čtenář tohoto textu pracuje s čísly. Práce s čísly je mu samozřejmostí, avšak málokdo si uvědomuje, jak je pojem čísla obtížný. Přesné zavedení pojmu čísla se vymyká našim možnostem. Tuto kapitolu je proto možné chápat jen jako připomenutí vlastností čísel a jako pokus o vytvoření náhledu na jeden způsob zavedení pojmu čísla. V této kapitole uvedeme též několik připomínek k numerickým výpočtům a zopakujeme si některé úkony s reálnými čísly. Zopakujeme si též zavedení komplexních čísel. Součástí výkladu je několik příkladů. Pokud někdo bude mít potíže s jejich řešením, doporučuji sbírky příkladů ze středoškolské matematiky.

1.5.1 Reálná čísla

Reálná čísla je možno zavést axiomaticky. O axiomatickém zavedení pojmu reálného čísla se sice zmíníme, ale tento způsob zevedení nebudeme hlouběji rozebírat. V textu jsou axiomy uvedeny, ale budeme se na ně odvolávat jen jako na základní vlastnosti reálných čísel. Půjde zde tedy v podstatě jen o několik poznámek k reálným číslům a o zopakování několika pravidel pro počítání s nimi.

Historicky začali lidé používat napřed *přirozená čísla*. Vyjadřuje se jimi počet prvků konečné množiny i pořadí odpočítávaných objektů. V matematické literatuře není pojem „množina přirozených čísel“ chápán jednotně. Někteří autoři zařazují do množiny přirozených čísel i nulu. V dalším budeme pod množinou přirozených čísel rozumět jen množinu čísel $1, 2, 3, \ldots$; budeme ji značit $\mathbb{N}$.

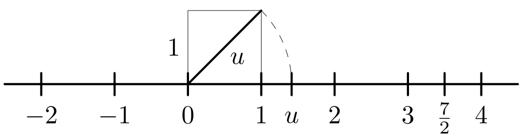
Na množině $\mathbb{N}$ je zavedena relace „$\leq$“ (menší nebo rovno) a jsou zavedeny operace sečítání, označená „$+$“, a násobení, označená „$\cdot$“. Jestliže $a, b \in \mathbb{N}$ a existuje takové číslo $c \in \mathbb{N}$, pro něž platí $a = b+c$, označíme $c = a-b$. Je tedy mezi některými prvky z $\mathbb{N}$ definována operace „$-$“, nazveme ji odečítáním. Požadavek proveditelnosti této operace pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ vede k zavedení 0 a celých záporných čísel $-1, -2, -3, \ldots$. Množina $\mathbb{N}$ sjednocená s množinou $\{0\}$ a množinou celých záporných čísel se značí $\mathbb{Z}$ a nazývá *množinou celých čísel*. Operace „$+, -$“ a uspořádání „$<$“ definované na množině přirozených čísel se rozšiřují na celou množinu $\mathbb{Z}$. Na množině $\mathbb{Z}$ je pak definována operace „$-$“. (Zavedení celých čísel umožňuje pracovat nejenom s hotovostí, ale i s dluhy.)

Nechť $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Jestliže existuje $x \in \mathbb{Z}$ tak, že $p = q \cdot x$, píšeme $x = \frac{p}{q}$, resp. $x = p : q$. Operaci „:“ nazýváme dělením. Aby dělení čísla p číslem q, $q \neq 0$, bylo vždy proveditelné, rozšiřuje se množina $\mathbb{Z}$ na množinu $\mathbb{Q}$, zvanou množina racionálních čísel. Operace „$+, -, \cdot$“ a uspořádání, definované na množině $\mathbb{Z}$, rozšiřujeme na celou množinu $\mathbb{Q}$. Na množině $\mathbb{Q}$ je pak definováno i dělení čísla p číslem q pro všechna $p, q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$. Množinu $\mathbb{Q}$ nazýváme *množinou racionálních čísel* a operace „$+, -, \cdot, :$“ nazýváme *racionálními operacemi*. Racionálním číslem je tedy každé číslo tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

Jestliže $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, potom $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, jestliže $ps = rq$. Např. $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Každé celé číslo $a \in \mathbb{Z}$ lze zapsat ve tvaru $\frac{a}{1}$. (Zavedení racionálních čísel umožňuje počítat i s částmi celku.)

Zaveďme si nyní číselnou osu.

Číselná osa. Uvažujme přímku s daným bodem 0, nazveme jej počátkem. Jistý smysl přímky zvolíme jako kladný. Zvolme dále úsečku, její délku označíme jako jednotku. V textu budeme tuto přímku kreslit ve vodorovné poloze a za její kladný smysl volíme směr zleva doprava. Ke každému racionálnímu číslu přiřadíme na této přímce bod takto: ke každému přirozenému číslu n přiřadíme bod, označme jej n, a to tak, že zvolenou jednotku naneseme od počátku n-krát v kladném smyslu, to jest doprava. Ke každému celému zápornému číslu m přiřadíme bod, označme jej m, a to tak, že zvolenou jednotku naneseme od počátku $(-m)$-krát v záporném smyslu, to jest doleva. Číslu 0 přiřadíme počátek. Nechť $\frac{p}{q}$ je racionální číslo, které není celým číslem. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Úsečku, jejíž délku jsme zvolili za jednotku, rozdělme na q stejných dílků. Je-li $p > 0$, naneseme p těchto dílků doprava, je-li $p < 0$, naneseme $(-p)$ těchto dílků doleva. Obdržený bod označíme $\frac{p}{q}$. Jsou-li $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ taková racionální čísla, že $ps = rq$, potom je jim přiřazen tentýž bod. Čísla $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ jsou zápisy téhož racionálního čísla, např. zápisy $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ představují totéž racionální číslo. Označme $\tilde{\mathbb{Q}}$ množinu všech bodů přiřazených naznačeným způsobem k racionálním číslům. Uvedenou přímku nazveme číselnou osou. Není podstatný rozdíl mezi bodem z množiny $\tilde{\mathbb{Q}}$ a racionálním číslem, k němuž byl bod přiřazen. Budeme tedy používat pojem bod $\frac{p}{q}$ a racionální číslo $\frac{p}{q}$ ve stejném významu. Na obr. 1.8 jsou vyznačena čísla $-2, -1, 0, 1, 2$ a číslo $\frac{7}{2}$.



Obrázek 1.8: Číselná osa.

Jestliže k číslu p je přiřazen bod na číselné ose nalevo od bodu přiřazenému k číslu q, je $p < q$, resp. $q > p$. Budeme pak říkat, že číslo p je menší než číslo q, resp. že číslo q je větší než číslo p. Řekneme, že $p \leq q$, je-li $p < q$ nebo $p = q$. Množina $\mathbb{Q}$ je vzhledem k operaci $\leq$ lineárně uspořádanou.

Lze ukázat, že operace „+“, „·“ a ralace „≤“ definované na množině $\mathbb{Q}$ mají tyto vlastnosti:

(Q1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pro $x, y, z \in \mathbb{Q}$.
(Q2) $x + y = y + x$ pro $x, y \in \mathbb{Q}$.
(Q3) Existuje prvek $0 \in \mathbb{Q}$ tak, že pro $x \in \mathbb{Q}$ platí $x + 0 = x$.
(Q4) Ke každému $x \in \mathbb{Q}$ existuje prvek $-x \in \mathbb{Q}$ tak, že $x + (-x) = 0$.
(Q5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ pro každé $x, y, z \in \mathbb{Q}$.
(Q6) $x \cdot y = y \cdot x$ pro $x, y \in \mathbb{Q}$.
(Q7) Existuje prvek $1 \in \mathbb{Q}$ tak, že pro $x \in \mathbb{Q}$ platí $x \cdot 1 = x$.
(Q8) Ke každému $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ existuje prvek $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tak, že $x \cdot x^{-1} = 1$.
(Q9) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ pro $x, y, z \in \mathbb{Q}$.
(Q10) Uspořádání $\leq$ je lineární.
(Q11) Je-li $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $x < y$, pak $x + z < y + z$.
(Q12) Je-li $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $x < y$, $z > 0$, pak $x \cdot z < y \cdot z$.

Z uvedených vlastností vyplývá, že mezi každými dvěma racionálními čísly leží racionální číslo. Jsou-li totiž r, s racionální čísla, je $(r+s)/2$ racionální číslo, které leží mezi těmito čísly r, s. Odtud vyplývá, že *mezi každými dvěma racionálními čísly leží nekonečně mnoho racionálních čísel.*

V oboru racionálních čísel nelze řešit řadu důležitých úloh. Příkladem je výpočet délky kružnice o poloměru 1, výpočet délky uhlopříčky čtverce o straně 1, atd. Ukažme to na následujícím příkladě.

Příklad 1.22. Ukažme, že délka uhlopříčky čtverce o straně rovné 1 se nedá vyjádřit jako racionální číslo.

Řešení. Označme u hledanou délku uvedeného čtverce. Zřejmě $u^2 = 2$. Kdyby bylo možno vyjádřit délku u jako racionální číslo, bylo by možno zapsat u ve tvaru
$$u = \frac{p}{q}, \tag{1.33}$$
kde $p, q \in \mathbb{N}$ a p, q jsou nesoudělná. Z (1.33) dostáváme $u^2 = \frac{p^2}{q^2}$. Poněvadž $u^2 = 2$, dostáváme
$$p^2 = 2q^2. \tag{1.34}$$
Je tedy p^2 číslo sudé a tedy i p je sudé. Tedy p lze zapsat ve tvaru $p = 2r$, kde $r \in \mathbb{N}$. Dosazením do (1.34) dostáváme
$$4r^2 = 2q^2. \tag{1.35}$$
Odtud
$$q^2 = 2r^2, \tag{1.36}$$
takže q^2 je sudé. Je tedy i q sudé číslo. Jsou tedy čísla p, q čísla sudá, a tedy nejsou nesoudělná. To je spor s předpokladem. Tedy u není racionální číslo a tedy k u dosud není na číselné ose přiřazen bod z $\tilde{\mathbb{Q}}$.

Délku u úhlopříčky čtverce o straně 1 naneseme na číselnou osu s racionálními body a dostaneme tak bod, který označíme u.

Ke každém bodu na číselné ose, který není přiřazen racionálnímu číslu, přiřadíme podobně objekt, který nazveme *iracionálním číslem*. Potom je ke každému bodu na číselné ose přiřazeno číslo. Na tuto množinu čísel se rozšiřují operace sečítání a násobení a relace lineárního uspořádání, definované na její podmnožině $\mathbb{Q}$. *Množinu všech racionálních a iracionálních čísel nazveme společným názvem* čísla reálná *a budeme ji značit* $\mathbb{R}$. *Konstrukce iracionálních čísel pomocí čísel racionálních a rozšíření lineárního uspořádaní množiny* $\mathbb{Q}$ *a operací „+ “ a „· “ na množinu* $\mathbb{R}$ *je poměrně náročná.* Jednu z takovýchto konstrukcí v dalším textu nastíníme pro vytvoření náhledu na uvedenou problematiku.

Uveďme však napřed základní vlastnosti takto zavedených reálných čísel. Dále uvedené vlastnosti je možno použít k axiomatickému zavedení reálných čísel takto. Množinu $\mathbb{R}$, na níž jsou zavedeny operace „$+, \cdot$“ a uspořádání $\leq$ s následujícími vlastnostmi, nazýváme množinou reálných čísel.

Základní vlastnosti reálných čísel

(R1) *$(x+y)+z = x+(y+z)$ pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

(R2) *$x+y = y+x$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.*

(R3) *Existuje prvek $0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x+0 = x$.*

(R4) *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje prvek $-x \in \mathbb{R}$ tak, že $x+(-x) = 0$.*

(R5) *$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

(R6) *$x \cdot y = y \cdot x$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$.*

(R7) *Existuje prvek $1 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x \cdot 1 = x$.*

(R8) *Ke každému $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existuje prvek $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tak, že $x \cdot x^{-1} = 1$.*

(R9) *$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

(R10) *Uspořádání $\leq$ je lineární.*

(R11) *Je-li $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$, pak $x+z < y+z$.*

(R12) *Je-li $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$, $z > 0$, pak $x \cdot z < y \cdot z$.*

(R13) *Jsou-li $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ neprázdné množiny a platí-li $x \leq y$ pro každé $x \in X$ a každé $y \in Y$, pak existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $x \leq a \leq y$ pro každé $x \in X$ a každé $y \in Y$.*

Vlastnosti reálných čísel

Vraťme se k číslu u, které reprezentuje délku úhlopříčky čtverce o straně rovné zvolené jednotkové délky, k němu přiřaďme bod u na číselné ose tak, že jeho vzdálenost od bodu 0 je rovna u. Označme X množinu *všech* těch racionálních čísel, k nímž jsou na číselné ose přiřazeny body ležící vlevo od bodu u, to jest racionálních čísel x, pro něž je $x^2 < 2$ nebo $x < 0$, a Y množinu těch racionálních čísel, k nímž jsou na číselné ose přiřazeny body ležící vpravo od bodu u, to jest racionálních čísel y, pro něž je $y > 0$ a $y^2 > 2$. Pro každé $x \in X$ a každé $y \in Y$ platí tedy vztah $x < y$. Dále platí $X \cup Y = \mathbb{Q}$. Například čísla 1; 1,4; 1,41; 1,414 $\in X$ a čísla 1,5; 1,42; 1,425 $\in Y$. Číslo u je určeno množinami X, Y. Číslo u není racionální. Nazveme jej číslem iracionálním. Budeme pak psát $u = (X, Y)$.

Podobně označme $\tilde{R}$ množinu všech těch uspořádaných dvojic množin $A_1, A_2 \subset \mathbb{Q}$, že

- pro každé $x \in A_1$ a každé $y \in A_2$ platí $x < y$,
- $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$.

Nechť $(A_1, A_2) \in \tilde{R}$. Jestliže existuje takové $h \in A_1$, že pro všechna $x \in A_1$ je $x \leq h$ položíme $h = (A_1, A_2)$. Uspořádaná dvojice (A_1, A_2) reprezentuje pak racionální číslo h. Podobně, jestliže existuje takové $d \in A_2$, že pro všechna $y \in A_2$ je $y \geq d$ položíme $d = (A_1, A_2)$. Uspořádaná dvojice (A_1, A_2) reprezentuje pak racionální číslo d. V případě, že neexistuje takové $h \in A_1$, že pro všechna $x \in A_1$ je $x \leq h$ a že neexistuje ani takové $d \in A_2$, že pro všechna $y \in A_2$ je $y \geq d$, nazveme uspořádanou dvojici (A_1, A_2) iracionálním číslem. Pomocí operací „+“ a „·“ a relace „≤“ na množině $\mathbb{Q}$ se definují operace sečítání a násobení a lineární uspořádání na $\tilde{R}$. Např. Jestliže $a = (A_1, A_2), b = (B_1, B_2) \in \tilde{R}, a \neq b$, řekneme, že $a < b$ právě když existuje $y \in A_2$ tak, že $y \in B_1$. Jestliže $a = (A_1, A_2), b = (B_1, B_2) \in \tilde{R}, a \neq b$, položíme $c = a + b$, kde $c = (C_1, C_2)$, jestliže

- $C_1 = \{x + y : x \in A_1 \wedge y \in B_1\}$,
- $C_2 = \{x + y : x \in A_2 \wedge y \in B_2\}$.

Všimněte si, že jestliže A_1, A_2 jsou takové podmnožiny množiny $\mathbb{Q}$ racionálních čísel, že $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$ a pro $x \in A_1$ a $y \in A_2$ je $x < y$, potom podle (R13) existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ platí $a_1 \leq a \leq a_2$.

Vlastnosti lineárního uspořádání reálných čísel. Ze „základních vlastností reálných čísel“ dostáváme tuto větu.

Věta 1.2. (Nerovnice)

Pro libovolná čísla x, y, z, u platí

(1.37) *Je-li $x \leq y, z \leq u$, potom $x + z \leq y + u$.*
Slovy: Levé i pravé strany souhlasných nerovnic můžeme sečíst.

(1.38) *Je-li $x \leq y, z > 0$, pak $x \cdot z \leq y \cdot z$.*
Slovy: Násobíme-li obě strany nerovnice týmž kladným číslem, smysl nerovnice se nezmění.

(1.39) *Je-li $0 < x \leq y, 0 < z \leq u$, platí $0 < x \cdot z \leq y \cdot u$.*

(1.40) *Je-li $x \leq y, z < 0$, potom $x \cdot z \geq y \cdot z$.*
Slovy: Násobíme-li obě strany nerovnice týmž záporným číslem, změní se smysl nerovnice.

(1.41) *Je-li $0 < x \leq y$, platí $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.*
Slovy: Jestliže v nerovnici mezi kladnými čísly přejdeme k reciprokým hodnotám, změní se smysl nerovnice.

Důkaz: Dokážeme jen (1.40). Důkazy ostatních tvrzení přenechávám čtenáři. Nechť tedy

$$x \leq y, \quad z < 0.$$

Přičteme-li na obě strany vztahu $z < 0$ číslo $-z$, dostáváme podle (R11)

$$0 < -z.$$

Násobením vztahu $x \leq y$ číslem $-z$ dostáváme podle (1.39)

$$-xz \leq -yz.$$

Přičtením $xz + yz$ na obě strany této nerovnice dostáváme

$$yz \leq xz, \quad \text{to jest} \quad xz \geq yz.$$

□

Příklad 1.23. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$2x + 1 < 5x - 2. \tag{1.42}$$

Řešení. Na obě strany (1.42) připočítejme $-2x+2$. Užitím (R11) dostáváme

$$3 < 3x. \tag{1.43}$$

Násobením (1.43) číslem $\frac{1}{3}$ dostáváme

$$x > 1.$$

Tedy nerovnici (1.42) vyhovují všechna čísla $x > 1$.

Zavedení absolutní hodnoty reálného čísla.

Zaveďme pojem absolutní hodnota reálného čísla touto definicí.

Definice 1.1. (Absolutní hodnota reálného čísla)

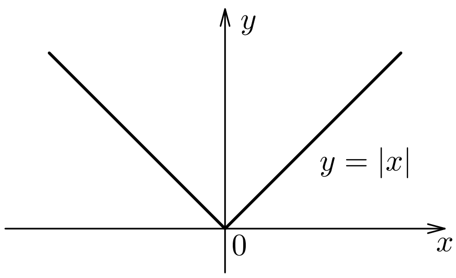
Nechť $x \in \mathbb{R}$. Položme

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{je-li } x \geq 0, \\ -x, & \text{je-li } x \leq 0. \end{cases}$$

Číslo $|x|$ nazveme *absolutní hodnotou* čísla x.

Absolutní hodnota reálného čísla

Na obr. 1.9 je vyznačen graf funkce $y = |x|$.



Obrázek 1.9: Graf funkce absolutní hodnota ($y = |x|$).

Příklad 1.24. a) $|-4| = 4$. Položíme-li $x = -4$, je $x < 0$, takže podle definice je $|-4| = |x| = -(-x) = -(-4) = 4$.

b) $|x - 2|$, kde x je reálné se určí takto: Je-li $x - 2 \geq 0$, to jest, jestliže $x \geq 2$, je $|x - 2| = x - 2$. V případě, že $x - 2 \leq 0$, to jest, jestliže $x \leq 2$, je $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$. Tedy

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{pro } x \geq 2, \\ 2 - x & \text{pro } x < 2. \end{cases}$$

Pro absolutní hodnotu reálných čísel platí vztahy uvedené v následující větě. Jejich důkazy přenecháváme čtenáři.

Absolutní hodnota – pravidla

Věta 1.3. (Pravidla pro absolutní hodnoty)

Nechť $x, y, a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. *Potom platí*

$$|x| \geq 0 \tag{1.44}$$

$$x \leq |x|, -x \leq |x| \tag{1.45}$$

$$|x| = |-x| \tag{1.46}$$

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \tag{1.47}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \tag{1.48}$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ pro } y \neq 0 \tag{1.49}$$

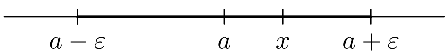
$$|x - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \tag{1.50}$$

Poznámka 1. jestliže pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ položíme

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

je $\rho(x, y)$ vzdálenost bodů x, y.

Poznámka 2. Jsou-li a, ε, kde $\varepsilon > 0$, pevná čísla, potom $|x - a|$ v (1.50) znamená, že x je od bodu a vzdáleno o méně než ε. Poněvadž body $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ jsou od bodu a vzdáleny právě o ε, leží x mezi body $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$, tedy platí $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ (viz obr. 1.10).



Obrázek 1.10: K poznámce 2.

Příklad 1.25. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$2x - 1 < |x - 2| < 3x + 2. \tag{1.51}$$

Řešení. Řešení rozdělme do dvou částí

α) Nechť $x - 2 \geq 0$. Potom $|x - 2| = x - 2$. Dále je

$$x \geq 2. \tag{1.52}$$

Ze vztahu

$$2x - 1 < x - 2$$

dostáváme

$$x < -1. \tag{1.53}$$

Ze vztahu

$$x - 2 < 3x + 2$$

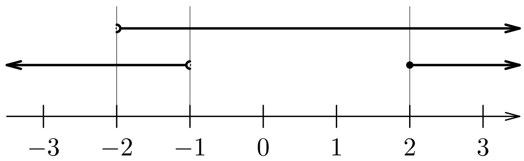
dostáváme

$$2x > -4,$$

tedy

$$x > -2. \tag{1.54}$$

Vztahy (1.52), (1.53), (1.54) vyznačíme na číselné ose.



Vidíme, že pro $x \geq 2$ nemá rovnice řešení.

β) Nechť $x - 2 < 0$. Potom $|x - 2| = -x + 2$. Podle předpokladu je

$$x < 2. \tag{1.55}$$

Ze vztahu (1.51) pro tato x dostáváme

$$2x - 1 < -x + 2.$$

Odtud dostáváme

$$3x < 3,$$

tj.

$$x < 1. \tag{1.56}$$

Ze vztahu

$$-(x - 2) < 3x + 2$$

dostáváme

$$4x > 0,$$

tj.

$$x > 0. \tag{1.57}$$

Ze vztahů (1.55), (1.56), (1.57) dostáváme

$$0 < x < 1.$$

Dané úloze tedy vyhovují všechna čísla, pro něž platí

$$0 < x < 1.$$

1.5.1.1 Zápis reálných čísel v některých číselných soustavách

K zápisu čísel v desítkové soustavě používáme deset symbolů (cifer) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ a případně desetinnou čárku (v zahraničním textu a při práci na počítači často desetinnou tečku). Tak např. zápisem

$$305{,}21 \tag{1.58}$$

zapisujeme číslo $3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}$. Ke zdůraznění, že (1.58) je zápis čísla v desítkové soustavě, lze (1.58) zapsat ve tvaru

$$(305{,}21)_{10}. \tag{1.59}$$

Podobně k zápisu čísla v osmičkové soustavě používáme osm symbolů (cifer) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ a případně čárku, resp. tečku. Potom např. zápis čísla 305,21 v osmičkové soustavě, tj. čísla $(305{,}21)_8$ je zkrácený zápis čísla

$$3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} + 1 \cdot 8^{-2},$$

tj. čísla, jehož ekvivalentem v desítkové soustavě je číslo

$$196{,}375,$$

takže

$$(305{,}21)_8 = (196{,}375)_{10}.$$

Na počítačích se většinou pracuje s čísly zapsanými ve dvojkové soustavě. K jejich zápisu se používá dvou symbolů $0, 1$ a případně čárky, resp. tečky. Potom např. zápis

$$(1011{,}1)_2$$

je zápis čísla ve dvojkové soustavě, jehož ekvivalentem v desítkové soustavě je číslo

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1},$$

tedy

$$(1011{,}1)_2 = (11{,}5)_{10}.$$

Nebude-li řečeno jinak, budeme čísla zapisovat v desítkové soustavě.

Zápis racionálního čísla

Zápis racionálního čísla.

Každé nenulové racionální číslo lze zapsat ve tvaru $+\frac{p}{q}$ nebo $-\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Dělením čísla p číslem q dostaneme buďto číslo v desítkové číselné soustavě s konečným počtem cifer různých od 0, anebo číslo, které má za desetinnou čárkou sice nekonečně mnoho cifer různých od 0, avšak v zápise čísla existuje taková uspořádaná skupina čísel, že za každou takovou skupinou čísel bezprostředně následuje opět tato skupina čísel. Takováto čísla se nazývají periodická. Zápis je možné provést tak, že nad prvním výskytem opakující se skupiny se dá pruh a další navazující skupiny se nepíší. Např. místo $0{,}323232\ldots$ napíšeme $0{,}\overline{32}$, nebo místo $0{,}333\ldots$ se napíše $0{,}\overline{3}$.

Zápis iracionálního čísla v desítkové soustavě by vyžadoval zapsat nekonečně mnoho cifer za desetinnou čárkou. To však není reálně možné. V konkrétním případě bychom mohli uvést pravidlo, jak určit cifru čísla na jeho zvolené pozici.

Zápis iracionálního čísla

Příkladem iracionálního čísla je např. číslo $\sqrt{2}$, o kterém jsme pojednali, nebo Ludolfovo číslo, které se značí symbolem π. Číslo π je důležité v řadě aplikací, např. při výpočtu délky kruhového oblouku, při výpočtu objemu rotačního kužele s daným poloměrem základny a danou výškou.

Aproximace čísel. Uveďme si několik poznámek k aproximaci čísla x číslem $\tilde{x}$. Rozdíl $\tilde{x}-x$ nazýváme *absolutní chybou aproximace* $\tilde{x}$. V reálných situacích tuto chybu neznáme, ale často ji můžeme odhadnout. Odhadem absolutní chyby rozumíme číslo $\delta \geq 0$, pro něž platí $|\tilde{x} - x| \leq \delta$.

Zavedení pojmu absolutní chyba

Jestliže x je iracionální číslo v desítkové soustavě a v jeho zápise ponecháme jen prvních n cifer za desetinnou čárkou, dostaneme racionální číslo $\tilde{x}$, pro než platí $|x - \tilde{x}| < 10^{-n}$.

Předpokládejme, že při měření vzdálenosti dvou míst A, B, kde A je místo v Praze a B je místo v Brně, se dopustíme chyby nejvýše 1 m. Podobně předpokládejme, že při měření délky obdélníkové místnosti se dopustíme rovněž chyby nejvýše 1 m. Je zřejmé, že stejný odhad chyby měření nelze použít ke srovnání přesnosti metody měření.

K posouzení „kvality“ aproximace se pro $x \neq 0$ používá často tzv. *relativní chyba*, definovaná vztahem

$$\frac{x - \tilde{x}}{x}.$$

Zavedení pojmu relativní chyba

Číslo $\delta \geq 0$, pro něž platí

$$\left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right| \leq \delta,$$

nazýváme odhadem *relativní chyby.*

Při numerických výpočtech jsme v jistém okamžiku nuceni čísla iracionální, s nimiž se pracuje, aproximovat čísly racionálními. Provádíme-li výpočty na kalkulačce, nebo na počítači, nemáme k dispozici ani množinu všech racionálních čísel. Pracuje se jen s čísly dané reprezentace v daném rozsahu. Výsledek racionální operace $(+, -, \cdot, :)$ *s těmito čísly se aproximuje podle zabudovaného kritéria opět číslem dané reprezentace.*

Uvažujme nyní množinu všech čísel ve tvaru

$$\pm t_0, t_{-1}t_{-2}\ldots t_{-n} \cdot 10^k, \tag{1.60}$$

kde n je dané přirozené číslo, k je libovolné celé číslo, pro něž platí $-m \leq k \leq m$, kde m je dané přirozené číslo, a t_0, $t_{-1}, \ldots, t_{-n} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, je-li v (1.60) $t_0 = 0$, je $t_0 = t_{-1} = \ldots = t_{-n} = 0$. Jako konkrétní příklad uveďme (1.60) pro $n = 3$, $m = 10$, tj. množinu všech čísel tvaru

$$\pm t_0, t_{-1}t_{-2}t_{-3} \cdot 10^k, \qquad -10 \leq k \leq 10, \tag{1.61}$$

kde $t_0, t_{-1}, t_{-2} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, přičemž je-li $t_0 = 0$, je $t_{-1} = t_{-2} = t_{-3} = 0$. Např. čísla

$$2{,}132 \cdot 10^3, \quad -5{,}701 \cdot 10^{-2}$$

patří do množiny tvaru (1.61).

Vliv zaokrouhlování čísel na výsledek

Nechť a, b jsou čísla tvaru (1.60). Nechť „op“ značí kteroukoli z racionálních operací „$+, -, \cdot, :$“. Položme

$$c = a \text{ op } b.$$

Číslo c nemusí patřit do množiny čísel (1.60). Označme nyní $\tilde{c}$ takové číslo z (1.60), že

$$|c - \tilde{c}| \leq 5 \cdot 10^{-n+k-1}.$$

Položme

$$\tilde{c} = a \text{ op } b.$$

Pokud existují dvě taková čísla $\tilde{c}$, nechť je dáno pravidlo k určení jednoho z nich. Operaci „ op “ nazveme aproximační operací „op“, to jest aproximační sečítání „ $\oplus$ “, aproximační odečítání „ $\ominus$ “, aproximační dělení „ $:$ “ a aproximační násobení „ $\odot$ “.

Uveďme příklad pro aproximační násobení čísel z (1.61). Nechť

$$a = 2{,}130 \cdot 10^3, \quad b = 3,152 \cdot 10^1.$$

Potom, označíme-li $c = a \cdot b$, dostáváme

$$c = 6{,}71376 \cdot 10^4.$$

Položíme-li

$$\tilde{c} = 6{,}714 \cdot 10^4,$$

je $\tilde{c}$ číslo z (1.61), pro něž platí

$$|c - \tilde{c}| < 5 \cdot 10^{-3+4-1} = 5.$$

Položíme tedy

$$\tilde{c} = a \odot b.$$

Je evidentní, že pro aproximační racionální operace neplatí stejné zákony jako pro operace racionální. Např. počítáme-li s čísly (1.61), dostáváme

$$(9{,}853 \cdot 10^3 \oplus 1{,}000 \cdot 10^{-2}) \ominus 9{,}853 \cdot 10^3 = 0,$$

avšak změnou pořadí operací dostáváme

$$(9{,}853 \cdot 10^3 \ominus 9{,}853 \cdot 10^3) \oplus 1{,}000 \cdot 10^{-2}) = 1{,}000 \cdot 10^{-2}.$$

Nahradíme-li při vyčíslování nějakého výrazu racionální operace odpovídajícími aproximačními operacemi, můžeme dostat výsledek naprosto vzdálený od správné hodnoty.

> *Je tomu tak proto, že se omezujeme jen na pevně daný konečný počet cifer a poněvadž při aproximačních racionálních operacích neplatí stejná pravidla jako pro operace racionální.*

Uveďme nyní příklad, na němž ukážeme, že matematicky ekvivalentní výpočtové postupy mohou vést k odlišným výsledkům při použití aproximačních operací místo přesných operací.

Ve statistice se setkáte s touto úlohou.

Úloha. Jsou dána čísla $x_1, x_2, \dots, x_p,\ p > 1$. Vypočítejte σ^2 podle vzorce

$$\sigma^2 = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p}(x_i - \overline{x})^2, \tag{1.62}$$

kde

$$\overline{x} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i. \tag{1.63}$$

Ukazuje se, že σ^2 lze vypočíst matematicky ekvivalentním způsobem podle vzorce

$$\sigma^2 = \frac{1}{p-1}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2\right). \tag{1.64}$$

Výpočet podle (1.62), (1.63) nazýváme *dvouprůchodovým*, napřed je nutno vypočíst $\overline{x}$ podle (1.63) a teprve potom σ^2 podle (1.62). Výpočet podle (1.64) se nazývá *jednoprůchodovým*.

Příklad 1.26. Porovnejte výpočet σ^2 dvouprůchodovou metodou (vztahy (1.62), (1.63)) a jednoprůchodovou metodou (vztah (1.64)) pro data

$$x_1 = 10000, \quad x_2 = 10001, \quad x_3 = 10002,$$

při reprezentaci čísel ve tvaru (1.60) pro $n = 7$, $m = 10$ užitím aproximačních operací $\oplus$, $\ominus$, $\odot$, $\bigcirc\!\!\!\!\!\!:\;$.

Řešení. Čísla x_1, x_2, x_3 zapišme v dané reprezentaci. Dostáváme

$$x_1 = 1{,}0000000 \cdot 10^4, \quad x_2 = 1{,}0001000 \cdot 10^4, \quad x_3 = 1{,}0002000 \cdot 10^4.$$

Dvouprůchodová metoda.

$$\overline{x} = (1{,}0000000 \cdot 10^4 \oplus 1{,}0001000 \cdot 10^4 \oplus 1{,}0002000 \cdot 10^4) \;\bigcirc\!\!\!\!\!\!:\;\; 3{,}0000000 \cdot 10^0.$$

Lehce nahlédneme, že

$$\overline{x} = 1{,}0001000 \cdot 10^4.$$

Dosazením tohoto $\overline{x}$ do (1.62) dostáváme užitím aproximačních racionálních operací

$$\sigma^2 = 1{,}0000000 \cdot 10^0,$$

tj.

$$\sigma^2 = 1.$$

Jednoprůchodová metoda. Užitím aproximačních racionálních operací dostáváme

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= x_1 \odot x_1 = 1{,}0000000 \cdot 10^8,\\
x_2^2 &= x_2 \odot x_2 = 1{,}0002000 \cdot 10^8,\\
x_3^2 &= x_3 \odot x_3 = 1{,}0004000 \cdot 10^8,\\
x_1^2 \oplus x_2^2 \oplus x_3^2 &= 3{,}0006000 \cdot 10^8.
\end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned}
x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 &= 3{,}0003000 \cdot 10^4,\\
(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)^2 &= 9{,}0018001 \cdot 10^8.\\
(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)^2 \odot 3 &= 3{,}0006000 \cdot 10^8.
\end{aligned}$$

Užitím těchto mezivýsledků dostáváme z (1.64) $\sigma^2 = 0$, tedy odlišný výsledek než použitím dvouprůchodové metody.

Poznámka. Při praktických numerických výpočtech ovšem nepoužíváme označení „ op “ pro provádění operací, mlčky používáme označení odpovídající operacím mezi reálnými čísly, tedy opreací „$+$, $-$, $\cdot$, $:$“.

1.5.1.2 Množiny reálných čísel

Zaveďme si několik pojmů spojených s množinami reálných čísel.

Ohraničení číselné množiny

Ohraničené množiny. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že množina M je *shora ohraničená*, jestliže existuje takové číslo h, že

$$x \in M \;\Rightarrow\; x \leq h.$$

Číslo h nazýváme *horním ohraničením množiny M*.

Podobně řekneme, že množina M je *zdola ohraničená*, jestliže existuje takové reálné číslo d, že

$$x \in M \;\Rightarrow\; x \geq d.$$

Číslo d nazýváme *dolním ohraničením množiny M*.

Jestliže množina M je shora i zdola ohraničená, říkáme, že je *ohraničená*.

Jako příklad uveďme množinu

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\ \text{kde } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zřejmě horním ohraničením množiny M je každé reálné číslo $h \geq 1$ a dolním ohraničením množiny M je každé číslo ≤ 0.

Zaveďme si dále pojmy *maximum, minimum a pojmy suprémum a infimum množiny reálných čísel.*

Maximum číselné množiny

Maximum číselné množiny

Řekneme, že číslo $x_{\max}$ *je* maximum *číselné množiny* M, *jestliže*

1. $x_{\max} \in M$,

2. jestliže $x \in M$, *potom* $x \leq x_{\max}$.

Píšeme $x_{\max} = \max\limits_{x \in M} x$, *resp.* $x_{\max} = \max M$. *Jestliže takové číslo neexistuje, říkáme, že množina* M *nemá maximum.*

To znamená, že $x_{\max}$ je horním ohraničením množiny M, které do do M patří.

Minimum číselné množiny

Minimum číselné množiny

Řekneme, že číslo $x_{\min}$ *je* minimum *číselné množiny* M, *jestliže*

1. $x_{\min} \in M$,

2. jestliže $x \in M$, *potom* $x \geq x_{\min}$.

Píšeme $x_{\min} = \min\limits_{x \in M} x$, *resp.* $x_{\min} = \min M$. *Jestliže takové číslo neexistuje, říkáme, že množina* M *nemá minimum.*

To znamená, že $x_{\min}$ je dolním ohraničením množiny M, které do do M patří.

Jako příklad uveďme dvě množiny U, V reálných čísel

$$U = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n^2},\ \text{kde } n \in \mathbb{N}\}, \tag{1.65}$$

$$V = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \wedge x \geq 0\}. \tag{1.66}$$

Zřejmě $\max\limits_{x \in U} x = 1$, $\min\limits_{x \in U} x$ neexistuje, $\max\limits_{x \in V} x = 2$, $\min\limits_{x \in V} x = 0$.

Všimněme si, že podle definice je maximum (minimum) číselné množiny M jejím prvkem.

Uveďme si dva podobné pojmy: supremum a infimum číselné množiny. Tyto pojmy posluchači někdy mylně zaměňují s pojmy maxima a minima číselné množiny.

Supremum číselné množiny

Supremum číselné množiny

Nechť M je množina reálných čísel. Řekneme, že číslo G je supremem *množiny M a píšeme $G = \sup\limits_{x \in M} x$, či $G = \sup M$, jestliže platí*

1. *Je-li $x \in M$, potom $x \leq G$,*
2. *je-li $G' < G$, potom existuje takové $x' \in M$, že $G' \leq x'$.*

Je tedy G nejmenší horní ohraničení množiny M.

Infimum číselné množiny

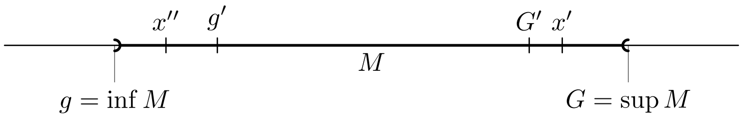
Infimum číselné množiny

Řekneme, že číslo g je infimem *množiny M reálných čísel a píšeme $g = \inf\limits_{x \in M} x$, resp. $g = \inf M$, jestliže platí*

1. *Je-li $x \in M$, potom $x \geq g$,*
2. *je-li $g' > g$, potom existuje takové $x'' \in M$, že $x'' \leq g'$.*

Je tedy g největší dolní ohraničení množiny M.

Na obr. 1.11 ilustrujeme infimum a supremum množiny M.



Obrázek 1.11: Infimum a supremum množiny M.

Všimněme si, že $\sup M$ *a* $\inf M$ *nemusí být prvky množiny M.* Jestliže platí $G = \sup M \in M$, potom G je maximem množiny M. Podobně, platí-li $g = \inf M \in M$, potom g je minimem množiny M.

Jako bezprostřední důsledek vlastnosti (R13) reálných čísel dostáváme toto tvrzení.

Jestliže $M \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) ohraničená, potom existuje $\sup(M)$ $(\inf(M))$.

Jako příklad uveďme množinu U definovanou vztahem (1.65). Zřejmě

$$g = \inf U = 0.$$

Poněvadž $g \notin U$, g je sice infimem množiny U, ale U nemá minimum. Naproti tomu

$$G = \sup U = 1, \qquad G \in U,$$

takže G je zároveň maximem množiny U.

Rozšíření množiny reálných čísel. Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ nyní rozšíříme o dva symboly $\infty, -\infty$, (místo ∞ lze psát i $+\infty$) (čteme (plus) nekonečno a minus nekonečno). Množinu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ budeme značit $\mathbb{R}^*$. Symboly $-\infty, \infty$ nazýváme nevlastními čísly. (Někdy z důvodu stručnosti pouze čísly.) Stejně jako místo termínu reálné číslo lze použít termín bod x, lze mluvit o bodech ∞, resp. $-\infty$.

Množina $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Položme $x < \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jestliže množina $M \subseteq \mathbb{R}$ není shora ohraničená, položíme

$$\sup M = \infty.$$

Nevlastní číslo ∞ je nejmenší horní ohraničení množiny reálných čísel.

Položme $x > -\infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jestliže množina $M \subseteq \mathbb{R}$ není zdola ohraničená, položíme

$$\inf M = -\infty.$$

Nevlastní číslo $-\infty$ je největším dolním ohraničením množiny přirozených čísel.

Některé racionální operace rozšíříme i na nevlastní čísla $-\infty, \infty$ a to takto.

Definice 1.2.

Nechť $a \in \mathbb{R}$, potom definujeme

$$a + \infty = \infty, \ \infty + a = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$a - \infty = -\infty, \ -\infty + a = -\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$-\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$-\infty \cdot (-\infty) = \infty$$

$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & \text{je-li } a > 0 \\ -\infty, & \text{je-li } a < 0 \end{cases}$$

$$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{je-li } a > 0 \\ \infty, & \text{je-li } a < 0 \end{cases}$$

Poznámka. Všimněme si, že některé operace, například

$$\infty - \infty,\ -\infty + \infty,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty),$$

jsou nadále nedefinované.

Zavedení pojmu interval

Intervaly. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $a \leq x \leq b$, budeme zapisovat jako $\langle a, b\rangle$ a nazývat *uzavřeným intervalem o koncových bodech* a, b. Číslo a (b) nazýváme levým (pravým) koncovým bodem intervalu $\langle a, b\rangle$.

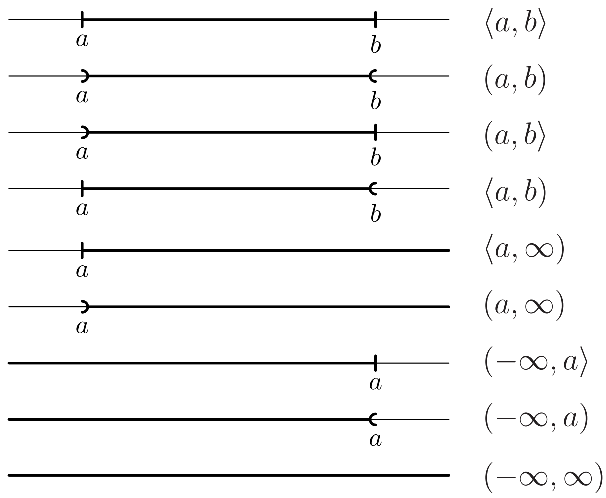
Množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $a < x < b$, budeme zapisovat jako (a, b) a nazývat *otevřeným intervalem o koncových bodech* a, b. Číslo a (b) nazýváme levým (pravým) koncovým bodem intervalu (a, b).

Množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $a \leq x < b$ ($a < x \leq b$), budeme zapisovat jako $\langle a, b)$ ($(a, b\rangle$) a nazývat *zleva uzavřeným (otevřeným) a zprava otevřeným (uzavřeným) intervalem o koncových bodech* a, b. Číslo a nazýváme levým a číslo b nazýváme pravým koncovým bodem intervalu $\langle a, b)$ ($(a, b\rangle$).

Množinu všech čísel $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $a \leq x < \infty$ ($a < x < \infty$), budeme zapisovat jako $\langle a, \infty)$ ((a, ∞)) a nazývat *zleva uzavřeným (otevřeným) intervalem o koncových bodech* a, ∞. Bod a budeme nazývat levým a bod ∞ jeho pravým koncovým bodem.

Množinu všech čísel $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $-\infty < x \leq a$ ($-\infty < x < a$), budeme zapisovat jako $(-\infty, a\rangle$ ($(-\infty, a)$) a nazývat *zprava uzavřeným (otevřeným) intervalem o koncových bodech* $-\infty, a$. Bod $-\infty$ budeme nazývat levým a bod a jeho pravým koncovým bodem.

Množinu všech reálných čísel x můžeme zapsat jako $(-\infty, \infty)$ a nazývat intervalem o koncových bodeh $-\infty, \infty$.



Obrázek 1.12: Intervaly.

Všimněme si, že levý koncový bod každého intervalu je menší než jeho pravý koncový bod. Kdybychom v definici intervalu $\langle a, b\rangle$ nahradili požadavek $a < b$ požadavkem $a \leq b$, zahrnuli bychom pod pojem intervalu též jednobodovou množinu, obsahující jediný prvek a, kterou bychom mohli zapsat jako $\langle a, a\rangle$. Na obr. 1.12 jsou vyznačeny uvedené intervaly.

Zavedení pojmu okolí bodu

Okolí bodu. Zaveďme si ještě pojem okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom interval $\langle a, a+\delta)$ budeme nazývat *pravým δ–okolím bodu a* a budeme jej většinou značit $U_\delta^+(a)$. Tedy $U_\delta^+(a) = \langle a, a+\delta)$. Kvůli zkrácení zápisu jej lze někdy označit stručně $U^+(a)$.

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom interval $(a-\delta, a\rangle$ budeme nazývat *levým δ–okolím bodu a* a budeme jej většinou značit $U_\delta^-(a)$. Tedy $U_\delta^-(a) = (a-\delta, a\rangle$. Kvůli zkrácení zápisu jej lze někdy označit stručně $U^-(a)$.

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Potom interval $(a-\delta, a+\delta)$ budeme nazývat *δ–okolím bodu a* a budeme jej většinou značit $U_\delta(a)$. Tedy $U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$. Kvůli zkrácení zápisu jej lze někdy označit stručně $U(a)$.

Nechť $k \in \mathbb{R}$. Potom množinu (k, ∞) nazýváme k-okolím bodu ∞ a značíme $U_k(\infty)$, nebo stručně $U(\infty)$. Podobně množinu $(-\infty, k)$ nazýváme k-okolím bodu $-\infty$ a značíme $U_k(-\infty)$, nebo stručně $U(-\infty)$.

1.5.2 Komplexní čísla

Řada matematických úloh není řešitelná v oboru reálných čísel. Např. neexistuje reálné číslo x, pro něž je $x^2 = -1$. To znamená, že rovnice $x^2+1 = 0$ nemá v oboru reálných čísel řešení. Tato a celá řada jiných úloh nás inspiruje k zavedení komlexních čísel.

Definice 1.3.

Označme $\mathbb{C}$ množinu uspořádaných dvojic reálných čísel (x, y), na níž jsou zavedeny operace sečítání „+“ a násobení „·“ s těmito vlastnostmi: Pro $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ položíme

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \tag{1.67}$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{1.68}$$

Množinu $\mathbb{C}$ nazveme množinou komplexních čísel, její prvky nazýváme komplexními čísly.

Je-li $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, lze psát

$$z = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) \tag{1.69}$$

Číslo $(c, 0)$ lze zkráceně označit jako c pro každé $c \in \mathbb{R}$. Symbol $(c, 0)$ označuje tedy reálné číslo. Číslo $(0, 1)$ označíme symbolem i a nazveme *imaginární jednotkou*.

Potom (1.69) lze zapsat jako

$$z = a + ib. \tag{1.70}$$

Jestliže $z = a + ib \in \mathbb{C}$, potom číslo a *nazýváme jeho reálnou částí* a značíme ji $\mathrm{Re}(z)$, b nazýváme *imaginární částí* a značíme $\mathrm{Im}(z)$. Je tedy

$$\mathrm{Re}(a + ib) = a, \qquad \mathrm{Im}(a + ib) = b.$$

Nechť $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Potom číslo $a - ib$ nazýváme *číslem komplexně sdruženým* k číslu z. Budeme jej značit $\bar{z}$. Tedy $\bar{z} = a - ib$.

Vzhledem k definování součtu a součinu čísel (a_1, b_1), (a_2, b_2) dostáváme

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$
$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Příklad 1.27.
$$(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$$
$$(2 + 3i) \cdot (4 - i) = 11 + 10i$$

Sečítání a násobení komplexních čísel

Lze ukázat, že operace sčítání a násobení komplexních čísel mají tyto vlastnosti

(1) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ pro každé $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
(2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ pro každé $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
(3) Pro $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$ platí $z + 0 = z$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$,
(4) Ke každému $z \in \mathbb{C}$ existuje $-z \in \mathbb{C}$ tak, že $z + (-z) = 0$,
(5) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ pro každé $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,
(6) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ pro každé $z_{1,2} \in \mathbb{C}$,
(7) Pro $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ a pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $1 \cdot z = z$,
(8) Ke každému $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ existuje $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tak, že $z \cdot z^{-1} = 1$,
(9) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$ pro každé $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

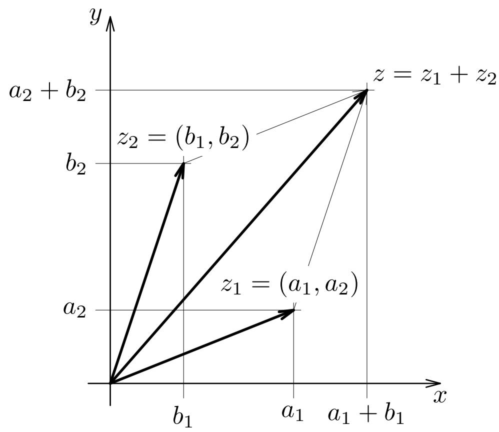
Vidíme, že operace sečítání a násobení komplexních čísel mají vlastnosti, které jsme uvedli u reálných čísel na straně 37. Komplexní čísla však nejsou lineárně uspořádaná.

Komplexní čísla se znázorňují jako body v rovině, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic, nazývá se *Gaussovou rovinou.* Každé komplexní číslo $z = x + iy$ se v ní znázorňuje jako bod o souřadnicích x, y, tedy jako $[x, y]$.

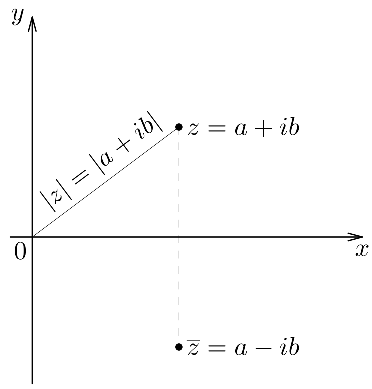
Na obr. 1.13 je graficky znázorněn součet dvou komlexních čísel.

Na obr. 1.14 je vyznačeno komplexní číslo z a k němu komplexně sdružené číslo $\bar{z}$.

Absolutní hodnota komplexního čísla. Nechť $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Potom číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$ nazýváme *absolutní hodnotou komplexního čísla* z a značíme ji $|z|$. Je tedy $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Je to vzdálenost bodů $[0, 0]$, $[a, b]$.



Obrázek 1.13: Součet dvou komplexních čísel.



Obrázek 1.14: Komplexně sdružená čísla.

Příklad 1.28. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

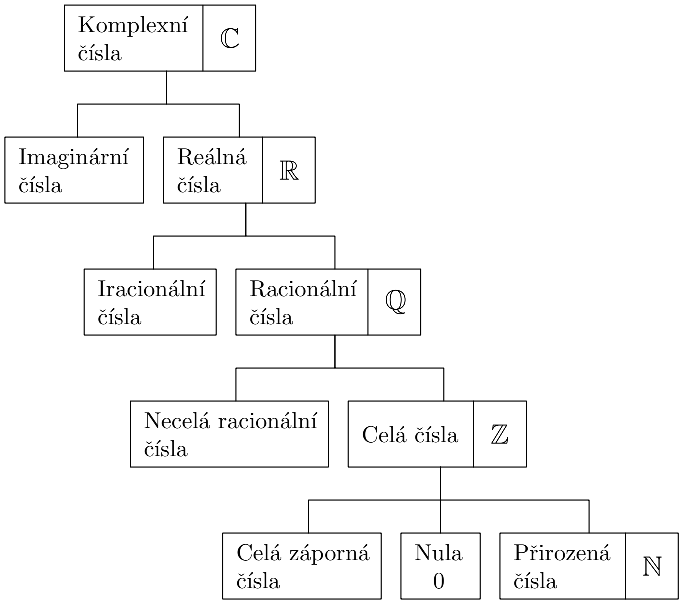
$$z = \frac{1+2i}{3-4i}.$$

Řešení. Zlomek, jímž je komplexní číslo z definováno, rozšíříme číslem komplexně sdruženým k číslu ve jmenovateli, to jest číslem $3 + 4i$. Dostaneme

$$z = \frac{(1+2i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)}, \quad \text{to jest} \quad z = \frac{-5+10i}{25}.$$

Je tedy $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{5}, \operatorname{Im} z = \frac{2}{5}$.

Z výkladu je zřejmé, že *reálná čísla jsou podmnožinou komplexních čísel*, tedy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Komplexní čísla, která nejsou reálná, nazýváme *imaginárními*. Rozdělení komplexních čísel lze schematicky znázornit takto:



Zaveďme si ještě celočíselné mocniny komplexních čísel následovně.

Nechť $a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Položme

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n}, \tag{1.71}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ pro } a \neq 0, \tag{1.72}$$

$$a^0 = 1, \text{ pro } a \neq 0, \tag{1.73}$$

$$0^n = 0. \tag{1.74}$$

Pro celočíselné mocniny komplexních čísel platí tato pravidla.

Nechť $a, b \in \mathbb{C}, r, s \in \mathbb{Z}$. Potom platí

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \tag{1.75}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \tag{1.76}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \tag{1.77}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \tag{1.78}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \tag{1.79}$$

pokud má levá strana význam.

Připomenutí důležitých vzorců pro počítání s čísly.

***n*–faktoriál.** Číslo $n!$ (čteme „n faktoriál“) definujeme takto:

$$
\begin{aligned}
0! &= 1,\\
n! &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Kombinační číslo. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Definujeme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Důležité vzorce

Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.80}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.81}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{1.82}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1.83}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{1.84}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{1.85}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{1.86}$$

Binomická věta

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Úlohy k procvičení

1. V jakém vzájemném vztahu jsou tyto číselné množiny: množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel, množina $\mathbb{R}$ reálných čísel, množina $\mathbb{Q}$ racionálních čísel, množina $\mathbb{Z}$ celých čísel, množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel. [$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$]

2. Rozhodněnte o správnosti výroku: Jestliže $x, y \in \mathbb{R}$, $2x + 1 < 0$, potom $y(2x+1) < 0$. [Ne, platí jen pro $y > 0$.]

3. Rozhodněte o správnosti výroku: Jestliže $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$, potom $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$. [Ne, $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.]

4. Co víte o dekadickém zápisu iracionálního čísla a racionálního čísla?

5. Určete vzdálenost bodů x, y na číselné ose pomocí absolutní hodnoty. [$|x - y|$]

6. Co je to relativní a co je absolutní chyba reálného čísla?

7. Co víte o přesnosti výpočtu na počítači (otázka zaokrouhlování čísel)?

8. Co je to maximum, suprémum, minimum a infimum číselné množiny? Uveďte příklady.

9. Co víte o existenci suprémа (infima) číselné množiny?

10. Co víte o racionálních operacích v množině $\mathbb{R}^*$?

11. Čemu je rovno $\frac{\infty}{-\infty}$?

12. Co jsou to intervaly?

13. Je interval a) $(2,3)$, b) $\langle 2,3)$ pravým okolím bodu 2 ve smyslu v textu zavedené definice? [a) není, b) je]

14. Co jsou to komplexní čísla?

15. Co je to absolutní hodnota komplexního čísla? Co je to číslo komplexně sdružené k číslu $a+ib$, $b \neq 0$?

16. Vypočítejte

a) $$\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{1}{5}-1}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right)-\frac{2}{3}}$$ $[\frac{-\frac{104}{105}}{\frac{1}{7}} = -\frac{104}{15}]$

b) $$\frac{\frac{1}{2+\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}{2-\frac{1}{2+3}}$$ $[\frac{-\frac{15}{4}}{\frac{9}{5}} = -\frac{25}{42}]$

17. Nechť $a,b \in \mathbb{R}$. Vypočítejte $\frac{b}{a-a}$. [Není definováno, nulou nelze dělit.]

18. Nalezněte chybu v následujícím výpočtu:
Nechť $a,b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Položme

$$c = a - b. \tag{1.87}$$

Vynásobením rovnice (1.87) výrazem $(a-b)$ dostáváme

$$ac - bc = a^2 - ab - ab + b^2.$$

Úpravou dostáváme

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc,$$

tedy

$$a(a-b-c) = b(a-b-c). \tag{1.88}$$

Dělíme-li (1.88) výrazem $(a-b-c)$, dostáváme $a=b$. Avšak předpoklad je, že $a \neq b$. Kde je chyba? [$a-b-c=0$, nulou nelze dělit.]

19. Upravte

a) $$\left(\frac{a^{-2}b^2(a-2)^{-2}}{a^0b^{-8}}\right)^{-2} : \frac{a^2(a-2)^3}{a^{-4}b^7}$$ $[\frac{a-2}{a^2b^{13}};\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq 2]$

b) $\left(1+\dfrac{a^2}{1-a^2}\right)\left(\dfrac{1+a^2}{1-a^2}\right)^{-1}$ $\quad[\frac{1}{1+a^2};\ a \neq -1 \wedge a \neq 1]$

c) $(a^3+b^3)(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $\quad[a^6-b^6]$

d) $\dfrac{\frac{1+a}{1+a+a^2}-\frac{1-a}{1-a+a^2}}{\frac{1-a}{1-a+a^2}+\frac{1+a}{1+a+a^2}}$ $\quad[a^3,\ a \in \mathbb{R}]$

20. Užitím binomické věty vypočítejte $(x-2y)^4$.

$[x^4-8x^3y+24x^2y^2-32y^3x+16y^4]$

21. Načrtněte grafy funkcí

a) $y=|x-2|+2$

b) $y=|2x+1|-x+1$

22. Řešte nerovnici $|3x-1|+x<1$. $\quad[(0,\frac{1}{2})]$

23. Užitím absolutní hodnoty reálného čísla vyjádřete, že

a) $x \in (2,7)$ $\quad[|x-\frac{9}{2}|<\frac{5}{2}]$

b) $x \in (-1,3)$ $\quad[|x-1|<2]$

24. Nechť $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 3-i$ jsou komplexní čísla. Určete

a) z_1+z_2 $\quad[4+i]$

b) z_1-z_2 $\quad[-2+3i]$

c) $z_1 \cdot z_2$ $\quad[5+5i]$

d) $\frac{z_1}{z_2}$ $\quad[\frac{1}{10}+\frac{7}{10}i]$

e) $|z_1|$ $\quad[\sqrt{5}]$

f) $|z_2|$ $\quad[\sqrt{10}]$

g) $\overline{z_1}$ $\quad[1-2i]$

h) $\overline{z_2}$ $\quad[3+i]$

25. V $\mathbb{R}^*$ proveďte tyto výpočty

a) $\infty+3$ $\quad[\infty]$

b) $\infty\cdot\infty$ $\quad[\infty]$

c) $\infty-\infty$ $\quad$[není definováno]

d) $2\cdot\infty-\infty$ $\quad$[není definováno]

e) $\frac{3}{0}$ $\quad$[není definováno]

f) $\frac{3}{-\infty}$ $\quad[0]$